

Valószínűségszámítás és Matematikai Statisztika

Miskolc, 2025.

Dr. Glavosits Tamás

4. előadás

Valószínűségi változók,

1. Valószínűségi változók

A valószínűségi változók

Definíció

Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ egy valószínűségi mező. Egy $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt **valószínűségi változónak** nevezünk, ha

$$(\xi < x) := \{\omega \in \Omega \mid \xi(\omega) < x\} = \xi^{-1} (] - \infty, x[) \in \mathcal{F}$$

minden $x \in \mathbb{R}$ esetén, azaz a ξ nívóhalmazai események.

Tétel

Ha ξ egy valószínűségi változó, akkor

$$(\xi = x) := \{\omega \in \Omega \mid \xi(\omega) = x\} = \xi^{-1}(x) \in \mathcal{F}$$

minden $x \in \mathbb{R}$ esetén.

Valószínűségi változó eloszlásfüggvénye

Definíció

Egy ξ valószínűségi változó **eloszlásfüggvényének** az $F_\xi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$F_\xi(x) := \mathbb{P}(\xi < x) \quad (x \in \mathbb{R})$$

módon definiált függvényt nevezzük.

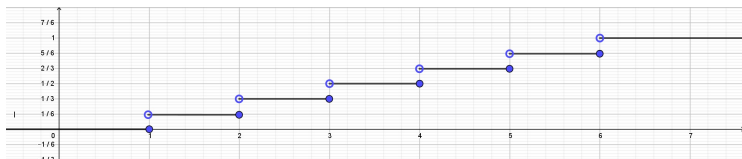
Megjegyzés

Minden valószínűségi változónak van eloszlásfüggvénye.

Példa valószínűségi változó eloszlásfüggvényére

Dobókockával dobunk, akkor ezt a kísérletet egy $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ klasszikus valószínűségi mező írja le, ahol $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Jelölje ξ a dobott számot. Ekkor a ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye

$$\mathbb{F}(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \in]-\infty, 1[\\ \frac{k}{6}, & \text{ha } x \in]k-1, k] \quad (k = 2, 3, 4, 5, 6) \\ 1, & \text{ha } x > 6. \end{cases}$$



Amelyik egy monoton növekvő lépcsős függvény, ahol $\lim_{x \rightarrow -\infty} \mathbb{F}(x) = 0$, és $\lim_{x \rightarrow +\infty} \mathbb{F}(x) = 1$.

Az eloszlásfüggvény tulajdonságai

Tétel

Legyen ξ egy valószínűségi változó \mathbb{F} eloszlásfüggvénnyel. Ekkor \mathbb{F} rendelkezik a következő tulajdonságokkal.

1. *Monoton növekvő;*
2. *Balról folytonos;*
3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \mathbb{F}(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \mathbb{F}(x) = 1.$

2. Diszkrét valószínűségi változók

Diszkrét valószínűségi változók eloszlása

Egy (x_n) sorozatot **injektív sorozatnak** nevezünk, ha $x_i \neq x_j$ valahányszor $i \neq j$.

Definíció

A ξ valószínűségi változót **diszkrét valószínűségi változónak** nevezük, ha létezik x_1, x_2, \dots véges, vagy megszámlálhatóan végtelen injektív sorozat, amelyre

- $\mathbb{P}(\xi = x_i) > 0$ minden $i = 1, 2, \dots$ esetén;
- $\mathbb{P}(\xi \in \{x_1, x_2, \dots\}) = 1$.

További jelölések:

- A x_1, x_2, \dots sorozatot a ξ **diszkrét valószínűségi változó értékeinek** nevezük és \mathcal{R}_ξ módon jelöljük.
- A $p_1 := \mathbb{P}(\xi = x_1)$, $p_2 := \mathbb{P}(\xi = x_2)$ \dots , sorozatot a ξ diszkrét valószínűségi változó eloszlásának, vagy csak egyszerűen **diszkrét eloszlásnak** nevezük.

Diszkrét valószínűségi változók eloszlásának a tulajdonságai

Tétel

Egy diszkrét eloszlás pozitív, 1 összegű számok sorozata, azaz $\sum_i p_i = 1$;

Bizonyítás. A valószínűség σ -additivitása alapján nyilvánvaló, ugyanis

$$\sum_i p_i = \sum_i \mathbb{P}(\xi = x_i) = \mathbb{P}\left(\bigcup_i (\xi = x_i)\right) = \mathbb{P}(\xi \in \{x_1, x_2, \dots\}) = 1.$$



Diszkrét valószínűségi változó várható értéke

Definíció

Egy ξ diszkrét valószínűségi változó várható értékét

$$\mathbb{E}(\xi) := \sum_i x_i p_i$$

módon definiáljuk, amennyiben a $\sum_i |x_i| p_i$ sor konvergens (azaz a $\sum_i x_i p_i$ sor abszolút konvergens).

3. Abszolút folytonos valószínűségi változók

Abszolút folytonos valószínűségi változók

Definíció

Egy ξ valószínűségi változót **abszolút folytonosnak** nevezünk, ha létezik egy $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, amelyre

$$\mathbb{F}(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Egy ilyen f függvényt a ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvényének nevezük.

Megjegyzés

Ha ξ egy abszolút folytonos valószínűségi változó \mathbb{F} eloszlásfüggvényével és f sűrűségfüggvényével, akkor

$$f(x) = \mathbb{F}'(x)$$

minden olyan x pontban, amelyben az eloszlásfüggvény differenciálható.

A sűrűségfüggvény tulajdonságai

Tétel

A sűrűségfüggvény tulajdonságai. Legyen ξ egy abszolút folytonos valószínűségi változó f sűrűségfüggvénnyel. Ekkor

1. f **nemnegatív**, azaz $f(x) \geq 0$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén. (Ez így nem teljesen pontos, legfeljebb egy Lebesgue-nullmértékű halmazon lehet negatív, de előírhatjuk, hogy legyen nemnegatív, ugyanis egy Lebesgue-nullmértékű halmazon szabad megváltoztatni egy sűrűségfüggvény értékét.)
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$.

Abszolút folytonos valószínűségi változó várható értéke

Definíció

Egy ξ abszolút folytonos valószínűségi változó várható értékét

$$\mathbb{E}(\xi) := \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

módon definiáljuk, amennyiben az $\int_{-\infty}^{+\infty} |x|f(x)dx$ integrál létezik és véges.

Intervallumba és valószínűsége

Tétel

Legyen ξ egy valószínűségi változó és $-\infty \leq a < b \leq +\infty$.

1. **Intervallumba és valószínűsége eloszlásfüggvénnyel kifejezve:**

$$\mathbb{P}(\xi \in [a, b]) = F(b) - F(a) \quad \text{és} \quad \mathbb{P}(\xi = x_0) = F(x_0 + 0) - F(x_0).$$

2. **Intervallumba és valószínűsége diszkrét esetben:**

$$\mathbb{P}(\xi \in H) = \sum_{x_j \in H} p_j,$$

3. **Intervallumba és valószínűsége abszolút folytonos esetben:**

$$\mathbb{P}(\xi \in H) = \int_a^b f(x) dx$$

A H halmaz jelöli az $[a, b]$, $]a, b[$, $[a, b[$, $]a, b]$ intervallumok közül bármelyiket.

A várható érték tulajdonságai

Tétel

A várható érték tulajdonságai

1. **Transzformációs formula valószínűségi változókra** Ha ξ egy olyan valószínűségi változó, amelynek létezik várható értéke, $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ egy mérhető (gondolhatjuk, hogy folytonos) függvény és létezik az $\mathbb{E}(g(\xi))$ várható érték, akkor
 - **diszkrét esetben** $\mathbb{E}(g(\xi)) = \sum_i g(x_i)p_i$;
 - **abszolút folytonos esetben** $\mathbb{E}(g(\xi)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx$.

Tétel

A várható érték tulajdonságai

2. **Transzformáció formula valószínűségi vektorváltozókra** ($n = 2$ eset). Ha ξ_1, ξ_2 olyan valószínűségi változók, amelyeknek létezik várható értékük, $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ egy mérhető (vagy mondjuk folytonos) függvény úgy, hogy a $g(\xi_1, \xi_2)$ valószínűségi változónak is létezik várható értéke, akkor

- **diszkrét esetben** $\mathbb{E}(g(\xi_1, \xi_2)) = \sum_{ij} g(x_i, x_j) p_{ij}$, ahol $p_{ij} := \mathbb{P}(\xi_1 = x_i, \xi_2 = x_j)$ ($i = 1, 2, \dots, j = 1, 2, \dots$);

- **abszolút folytonos esetben**

$$\mathbb{E}(g(\xi_1, \xi_2)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y) f(x, y) dy dx, \text{ ahol}$$

$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ egy olyan függvény, amelyre

$\mathbb{P}(\xi_1 < x, \xi_2 < y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u, v) dv du$ hasonló formulák könnyen megfogalmazhatóak $n \in \mathbb{Z}_+, n \geq 2$ esetén.

Tétel

A várható érték tulajdonságai

- 3. A várható érték additivitása** Ha $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ olyan valószínűségi változók, amelyeknek létezik várható értéke, akkor
 - $n = 2$ eset: $\mathbb{E}(\xi_1 + \xi_2) = \mathbb{E}(\xi_1) + \mathbb{E}(\xi_2)$;
 - $n \geq 2$ eset: $\mathbb{E}(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n) = \mathbb{E}(\xi_1) + \mathbb{E}(\xi_2) + \dots + \mathbb{E}(\xi_n)$.
- 4. A várható érték homogenitása** Ha ξ olyan valószínűségi változó, amelynek van várható értéke és $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor
$$\mathbb{E}(\lambda\xi) = \lambda\mathbb{E}(\xi).$$

A várható érték tulajdonságai

Tétel

- 5. Eltolással kapcsolatos tulajdonság** Ha ξ olyan valószínűségi változó, amelynek van várható értéke, $c \in \mathbb{R}$, akkor
$$\mathbb{E}(\xi + c) = \mathbb{E}(\xi) + c.$$
- 6. A várható érték becslése** Ha ξ egy olyan valószínűségi változó, amelyre $-\infty < m < M < +\infty$ valós számok olyanok, hogy $\mathbb{P}(-m < \xi < M) = 1$, akkor $m < \mathbb{E}(\xi) < M$.

4. Momentumok és centrált momentumok

Szórásnégyzet és szórás

Definíció

Ha ξ egy valószínűségi változó, amelyre létezik az $\mathbb{E}(\xi^k)$ várható érték, akkor az

- $\mathbb{E}(\xi^k)$ értéket a ξ valószínűségi változó **k -adik momentumának**,
- $\mathbb{E}((\xi - \mathbb{E}(\xi))^k)$ értéket a ξ valószínűségi változó **centrál momentumának** nevezzük.
- A második centrál momentumot **szórásnégyzetnek** nevezzük és $\mathbb{D}^2(\xi)$ módon jelöljük.
- Ha egy ξ valószínűségi változónak létezik szórásnégyzete, akkor a $\mathbb{D}(\xi) = \sqrt{\mathbb{D}^2(\xi)}$ számot a ξ valószínűségi változó **szórásának** nevezzük.

A szórásnégyzet kiszámítása

Tétel

A szórásnégyzet kiszámítása Ha a ξ valószínűségi változónak létezik szórásnégyzete, akkor a

$$\mathbb{D}^2(\xi) = \mathbb{E}(\xi^2) - \mathbb{E}(\xi)^2$$

módon számolható.

A szórásnégyzet tulajdonságai

Tétel

Legyenek ξ , ξ_1 , ξ_2 olyan valószínűségi változók, amelyeknek létezik szórásnégyzetük és $c \in \mathbb{R}$.

1. **Négyzetesen homogén**, azaz $\mathbb{D}^2(c\xi) = c^2\mathbb{D}^2(\xi)$. Ennek megfelelően a szórás abszolút homogén, azaz $\mathbb{D}(c\xi) = |c|\mathbb{D}(\xi)$.
2. **Transzláció invariáns** $\mathbb{D}^2(\xi + c) = \mathbb{D}^2(\xi)$.
3. **Pozitív szemidefinit**, azaz $\mathbb{D}^2(\xi) \geq 0$ és $\mathbb{D}^2(\xi) = 0$ akkor és csak akkor, ha létezik $c \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $\mathbb{P}(\xi = c) = 1$.
4. **Összeg szórásnégyzete:**
 $\mathbb{D}^2(\xi_1 + \xi_2) = \mathbb{D}^2(\xi_1) + \mathbb{D}^2(\xi_2) + 2\text{cov}(\xi_1, \xi_2)$. (Tehát az additivitás csak korrelálatlan esetben teljesül.)

1. Példa

Példa

(Szabályos) dobókockával dobunk. Jelölje ξ a dobott számot. Határozza meg a ξ várható értékét és szórásnégyzetét.

Megoldás:

A ξ eloszlása:

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

A ξ várható értéke:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\xi) &= 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = \\ &= \frac{1}{6}(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = \frac{21}{6} = 3.5\end{aligned}$$

1. Példa folytatása

A ξ második momentuma:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\xi) &= 1^2 \cdot \frac{1}{6} + 2^2 \cdot \frac{1}{6} + 3^2 \cdot \frac{1}{6} + 4^2 \cdot \frac{1}{6} + 5^2 \cdot \frac{1}{6} + 6^2 \cdot \frac{1}{6} = \\ &= \frac{1}{6}(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2) = \frac{91}{6}\end{aligned}$$

A ξ szórásnégyzete:

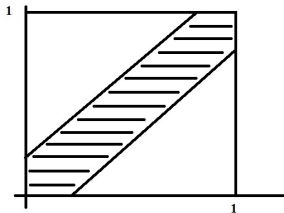
$$\mathbb{D}^2(\xi) = \mathbb{E}(\xi^2) - (\mathbb{E}(\xi))^2 = \frac{91}{6} - 3.5^2 = \frac{35}{12}$$

2. Példa

Példa

Ledobunk két pontot véletlenszerűen, egymástól függetlenül a $[0, 1]$ intervallumra. Jelölje ξ a két pont távolságát. Határozza meg a ξ valószínűségi változó eloszlás- és sűrűségfüggvényét, várható értékét és szórásnégyzetét.

Megoldás: Ez a feladat hasonló a valószínűség geometriai kiszámítási módja részben leírt feladathoz, amikor két ember egy adott időintervallumban véletlenszerűen és egymástól függetlenül megjelenik egy adott helyen... Most is hasonló ábrára kell gondolni.



Legyen $x \in [0, 1]$. Ekkor

$$\mathbb{P}(\xi < x) = \frac{1 - 2\frac{(1-x)^2}{2}}{1} = 1 - (1-x)^2 = -x^2 + 2x,$$

így a ξ eloszlásfüggvénye:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 0, \\ -x^2 + 2x, & \text{ha } x \in [0, 1] \\ 1, & \text{ha } x > 1. \end{cases}$$

A ξ sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \notin [0, 1] \\ -2x + 2, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

A ξ várható értéke:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\xi) &= \int_0^1 x(-2x + 2)dx = \\ &= \int_0^1 (-2x^2 + 2x)dx = \left[\frac{-2x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} \right]_{x=0}^{x=1} = -\frac{2}{3} + 1 = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

A ξ második momentuma:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\xi^2) &= \int_0^1 x^2(-2x + 2)dx = \\ &= \int_0^1 (-2x^3 + 2x^2)dx = \left[\frac{-2x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} \right]_{x=0}^{x=1} = -\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

A ξ szórásnégyzete:

$$\mathbb{D}^2(\xi) = \mathbb{E}(\xi^2) - [\mathbb{E}(\xi)]^2 = \frac{1}{6} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{18}.$$

Vége az 4. előadásnak