Valószínűségszámítás és Matematikai Statisztika

Miskolc, 2025.

Dr. Glavosits Tamás

3. előadás

Feltételes valószínűség, Bayes tétel, Események függetlensége

1. Feltételes valószínűség

A feltételes valószínűség fogalma

Definition

Ha A, $B \in \mathcal{F}$ események úgy, hogy $\mathbb{P}(B) \neq 0$, akkor

$$\mathbb{P}(A|B) := \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

valószínűséget az A esemény B eseményre vonatkozó **feltételes valószínűségének** nevezzük.

A feltételes valószínűség tulajdonságai

Theorem

Legyen $B \in \mathcal{F}$ úgy, hogy $\mathbb{P}(B) > 0$, továbbá A_1, A_2 pozitív valószínűségű események.

1. ***1-re normáltság:***, *azaz* $\mathbb{P}(\Omega|B) = 1$, *(illetve* $\mathbb{P}(B|B) = 1$*);*
2. ***Véges additivitás:*** *Ha* $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, *akkor* $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2|B) = \mathbb{P}(A_1|B) + \mathbb{P}(A_2|B)$*;*
3. ***Komplementer esemény feltételes valószínűsége:*** *Tetszőleges* A *esemény esetén* $\mathbb{P}\left(\overline{A}|B\right) = 1 - \mathbb{P}(A|B)$.

2. Bayes tétel

Bayes-formula

Theorem

A Bayes-formula *Ha A, B pozitív valószínűségű események, akkor*

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B) \cdot \mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)}.$$

Teljes eseményrendszer

Definition

A $B_1, B_2, \ldots, B_n$ eseményeket **teljes eseményrendszer**nek nevezünk, ha páronként diszjunktak és lefedik az Ω-t, azaz $B_j \cap B_k = \emptyset$, ha $j \neq k$ és $B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n = \Omega$.
Hasonlóan értelmezhető egy megszámlálhatóan végtelen sok tagból álló teljes eseményrendszer is.

A teljes valószínűség tétele

Theorem

A teljes valószínűség tétele *Ha $B_1, B_2, \ldots, B_n$ egy olyan teljes eseményrendszer, amely pozitív valószínűségű eseményekből áll, A egy tetszőleges esemény, akkor*

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i).$$

Hasonló módon fogalmazható meg a megszámlálhatóan végtelen változat is.

Bayes tétel

Theorem

A Bayes Tétel *Ha* $B_1, B_2, \ldots, B_n$ *pozitív valószínűségi eseményekből álló teljes eseményrendszer,* A *egy tetszőleges pozitív valószínűségi esemény, akkor*

$$\mathbb{P}(B_j|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B_j)\mathbb{P}(B_j)}{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i)}.$$

Példa

Example

Egy urnában van 5 golyó, melyek közül 3 piros és 2 fehér golyó. Kihúzunk egy golyót, majd visszarakjuk. Ha a kihúzott golyó piros, volt, beteszünk az urnába még 2 piros golyót, ha fehér volt, akkor még 5 fehér golyót. Ezt követően megint húzunk. Mennyi a valószínűsége, hogy másodszorra piros golyót húzunk.

Megoldás

Jelölje

- B_1 azt az eseményt, hogy először piros golyót húzunk,
- B_2 azt az eseményt, hogy először fehér golyót húzunk,
- A azt az eseményt, hogy másodszorra piros golyót húzunk.

Ekkor

$$\mathbb{P}(B_1) = \frac{3}{5}, \quad \mathbb{P}(B_2) = \frac{2}{5}, \quad \mathbb{P}(A|B_1) = \frac{5}{7}, \quad \mathbb{P}(A|B_2) = \frac{3}{10}.$$

A teljes valószínűség tétele alapján kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B_1)\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(A|B_2)\mathbb{P}(B_2) =$$
$$= \frac{5}{7} \cdot \frac{3}{5} + \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{5} = \frac{96}{175} = 0.5486.$$

A láncszabály

Theorem

Láncszabály *Legyenek* $B_1, B_2, \ldots, B_n$ *olyan események, melyekre* $\mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_{n-1}) \neq 0$*. Ekkor*

$$\mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_n) = \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}(B_2|B_1) \cdots \mathbb{P}(B_n|B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_{n-1}).$$

Motiváció két esemény függetlenségének fogalmához

Úgy érezzük, hogy akkor független A, és B, ha

$$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A).$$

Problémák:

- A fenti kifejezéshez szükséges, hogy $\mathbb{P}(B) \neq 0$;
- és nem szimmetrikus a kifejezés.

Ebből egy kis számolással kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B),$$

és a kapott kifejezés nem igényli, hogy $\mathbb{P}(B) \neq 0$, továbbá szimmetrikus

3. Események függetlensége

Két esemény függetlensége

Definition

Legyenek A és B események. Azt mondjuk, hogy **az A és a B események függetlenek**, ha

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(A).$$

Véges sok esemény páronkénti és teljes függetlensége

Definition

Azt mondjuk, hogy $A_1, A_2, \ldots, A_n$ események

- **páronként függetlenek**, ha közülük bármely két különböző független, azaz $1 \leqslant i < j \leqslant n$, akkor

$$\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j).$$

- **teljesen függetlenek**, ha $2 \leqslant k \leqslant n$ és $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n$, akkor

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = \mathbb{P}(A_{i_1})\mathbb{P}(A_{i_2}) \ldots \mathbb{P}(A_{i_k}).$$

Eseménysorozat páronkénti és teljes függetlensége

Definition

Azt mondjuk, hogy az $A_1, A_2, \ldots$ eseménysorozat tagjai

- **páronként függetlenek** ha közülük bármely kettő független, azaz ha $i < j$, akkor
$$\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j),$$
- **teljesen függetlenek**, ha $2 \leqslant k$ és $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k$, akkor
$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = \mathbb{P}(A_{i_1})\mathbb{P}(A_{i_2})\ldots\mathbb{P}(A_{i_k}).$$

Tétel

Theorem

Ha az $A_1, A_2, \ldots$ egy olyan eseménysorozat, amely tagjai teljesen függetlenek és tagja közül akármennyit, (esetleg az összeset) a komplementerére cserélünk, akkor az így kapott eseménysorozat tagjai teljesen függetlenek maradnak.

Vége az 3. előadásnak