Valószínűségszámítás és Matematikai Statisztika

Miskolc, 2025.

Dr. Glavosits Tamás

2. előadás

Golyóhúzás urnából, A valószínűség geometriai kiszámítási módja, Kolmogorov féle valószínűségi mező

1. Golyóhúzás urnából

Jelölések

A golyókat egyesével húzzuk ki az urnából, de a **visszatevés nélküli eset**ben a a kihúzott golyót a húzást követően nem rakjuk vissza az urnába, a **visszatevéses eset**ben visszarakjuk.
Mindkét esetben az alábbi jelöléseket alkalmazzuk:

- N számú golyó van az urnában;
- s a piros golyók száma;
- $N - s$ a fehér golyók száma;
- n golyót húzunk ki;
- k jelöli a kihúzott piros golyók számát;
- p_k jelöli azt a valószínűséget, hogy a kihúzott piros golyók száma k.

Az urnában lévő golyók halmazát mindkét esetben jelölje

$$G := \{P_1, P_2, \ldots, P_s, F_1, F_2, \ldots, F_{N-s}\}.$$

Visszatevés nélküli golyóhúzás

Először konstruáljuk meg az Ω halmazt. Mivel ebben az esetben a kihúzott golyók nem kerülnek vissza az urnába, ezért

$$\Omega := \{(g_1, g_2, \ldots, g_n) \in G^n |\ g_j \neq g_k,\ \text{ha } j \neq k\}.$$

Érdemes észrevenni, hogy a k értéke nem lehet tetszőleges, teljesítenie kell az alábbi egyenlőtlenséget

$$\max(0, n - (N - s)) \leqslant k \leqslant \min(s, n).$$

Szintén érdemes megjegyezni, hogy

$$|\Omega| = V_N^n = (N)_n.$$

A kedvező esetek száma Képzeljük el, hogy kihúztuk az n db golyót és az 1, 2, ..., n pozíció közül k helyen van piros golyó. Az n hely közül a piros helyeket

$$C_n^k = \binom{n}{k}$$

féleképpen lehet kiválasztani.
Ha már a piros és a fehér helyek rögzítve vannak, akkor ezeket a helyeket a megfelelő színű golyókkal

$$V_s^k \cdot V_{N-s}^{n-k} = (s)_k (N-s)_{n-k}$$

féleképpen lehet feltölteni megfelelő színű golyókkal.

A kedvező és az összes esetek száma

A kedvező esetek száma:

$$\binom{n}{k}(s)_k(N-s)_{n-k}.$$

Az összes esetek száma:

$$V_N^n = (N)_n.$$

A visszatevés nélküli golyóhúzás valószínűsége

A keresett valószínűség:

$$p_k = \mathbb{P}(A_k) = \frac{\binom{n}{k}(s)_k(N-s)_{n-k}}{(N)_n} =$$

$$= \frac{\frac{n!}{(n-k)!k!}(s)_k(N-s)_{n-k}}{(N)_n} = \frac{\frac{(s)_k}{k!}\frac{(N-s)_{n-k}}{(n-k)!}}{\frac{(N)_n}{n!}} = \frac{\binom{n}{k}\binom{N-s}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

Visszatevéses golyóhúzás

Először konstruáljuk meg az Ω halmazt. Mivel a golyókat a kihúzást követően visszarakjuk az urnába, így

$$\Omega := G \times G \times \cdots \times G = G^n.$$

A visszatevés nélküli esettel analóg módon kapjuk, hogy
A kedvező esetek száma:

$$C_n^k \cdot V_s^{k(i)} \cdot V_{N-s}^{n-k(i)} = \binom{n}{k} s^k (N-s)^{n-k}.$$

Az összes esetek száma:

$$V_N^{n(i)} = N^n.$$

Visszatevéses golyóhúzás valószínűsége

A keresett valószínűség: A kedvező/összes képlet alapján kapjuk, hogy

$$p_k = \mathbb{P}(A_k) = \frac{\binom{n}{k} s^k (N-s)^{n-k}}{N^n} = \binom{n}{k} \frac{s^k}{N^k} \cdot \frac{(N-s)^{n-k}}{N^{n-k}} =$$

$$= \binom{n}{k} \left(\frac{s}{N}\right)^k \left(1 - \frac{s}{N}\right)^{n-k}.$$

2. A valószínűség geometriai kiszámítási módja

Geometriai valószínűség

Legyen $\mathcal{K}$ egy kísérlet. A kísérlet minden lehetséges kimeneteléhez rendeljük hozzá az $\mathbb{R}^n$ egy pontját. A kapott ponthalmazt jelöljük Ω-val.

A valószínűség geometriai kiszámítása egy $A \subseteq \Omega$ esemény kiszámítására akkor alkalmazható, ha létezik olyan m mérték (általában ívhossz, felszín, vagy térfogat), amelyre

$$0 < m(\Omega) < +\infty$$

és az $A \in \mathbb{R}^n$ ponthalmaz szintén az m mérték szerint mérhető. Ekkor az A esemény valószínűségét

$$\mathbb{P}(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)}$$

módon számoljuk.

Példa geometriai valószínűségre

Példa

Két ember déli 12 és délután 2 óra között véletlenszerűen megjelennek egy adott helyen, ahol 20 percet tartózkodnak. mennyi a valószínűsége, hogy találkoznak?

Mo.:

$$\Omega := [1, 120] \times [0, 120], \qquad A := \{(x, y) \in \Omega \mid \ |x - y| < 20\}.$$

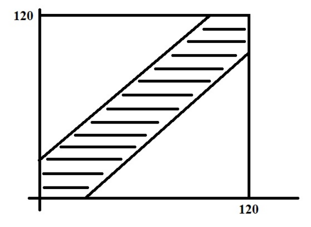
Könnyű látni, hogy

$$|x - y| < 20 \quad \iff \quad y > x - 20 \text{ és } y < x + 20.$$

folytatás

Példa

A kapott egyenlőtlenségek egy-egy félsíkot határoznak meg, amelyet egymással, illetve az Ω pontjaival összemetszve kapjuk a következő ábrán látható bevonalkázott sávot.



A keresett valószínűség

$$\mathbb{P}(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{120^2 - 2 \cdot \frac{100^2}{2}}{120^2} = 1 - \left(\frac{100}{120}\right)^2 = \frac{11}{36} = 0.3056.$$

3. Kolmogorov-féle valószínűségi mező

2.3.1.A σ-algebra fogalma és tulajdonságai

Valószínűségszámítás rövid története

A klasszikus valószínűségi mezőkkel először Pascal és Fermat foglalkoztak.
Blase Pascal (1623 – 1662) francia matematikus, fizikus, filozófus és katolikus író.
Pierre de Fermat (1601 – 1665) francia bíró, polihisztor, de mindenekelőtt matematikus volt.
Andrej Nyikolajevics Kolmogorov (1903 - 1987) szovjet matematikus volt, aki a valószínűségszámítást mérékelméleti alapokra helyezte. Érdemes megemlíteni Kolmogorov 1988-as cikkét.

σ-algebra

Definíció

Legyen X egy nemüres halmaz, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ egy halmazcsalád. Azt mondjuk, hogy $\mathcal{A}$ **egy σ-algebra X-en**, ha

1. $X \in \mathcal{A}$;
2. Ha $A \in \mathcal{A}$, akkor $\overline{A} := X \setminus A \in \mathcal{A}$;
3. Ha $A_1, A_2, \ldots$ egy $\mathcal{A}$-beli halmazokból álló sorozat, akkor

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A},$$

A σ-algebra tulajdonságai

Tétel

Ha $\mathcal{A}$ egy σ-algebra az X halmazon, akkor

1. $\emptyset \in \mathcal{A}$;
2. *Ha* (A_n) *egy* $\mathcal{A}$*-beli halmazokból álló sorozat, akkor akkor* $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$;
3. *Ha* $A, B \in \mathcal{A}$, *akkor* $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B \in \mathcal{A}$;
4. *Ha* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *halmazok egy* $\mathcal{A}$*-beli véges sorozata, akkor* $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \in \mathcal{A}$, *és* $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \in \mathcal{A}$;

(Tehát egy σ-algebra tartalmazza az $\emptyset$ halmazt és zárt a megszámlálható halmazműveletekre nézve.)

3. Kolmogorov-féle valószínűségi mező

2.3.2. A Kolmogorov-féle valószínűségi mező

A Kolmogorov-féle valószínűségi mező

Definíció

Az $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ hármast **Kolmogorov-féle valószínűségi mező**nek nevezzük, ha

1. Ω egy nemüres halmaz, neve **eseménytér**, elemei az **elemi esemény**ek. Az elemi események nem események.
2. $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ egy σ-algebra Ω-n. Az $\mathcal{F}$ az **események halmaza**.
3. $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ egy függvény, amelyre

I. **Nemnegatív**, azaz $\mathbb{P}(A) \geqslant 0$ minden $A \in \mathcal{F}$ esetén;

II. **1-re normált**, azaz $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;

III. σ-**additív**, azaz ha A_1, A_2, ... események páronként diszjunkt sorozata, azaz ($A_i \in \mathcal{F}$ $i = 1, 2, \ldots$ és $A_j \cap A_k = \emptyset$ ha $j \neq k$), akkor

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

A valószínűség tulajdonságai 1-3

Tétel

Ha $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *egy Kolmogorov-féle valószínűségi mező, akkor*

1. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.
2. ***A valószínűség véges additivitása***, *azaz*

   $$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \cdots + \mathbb{P}(A_n)$$

   minden $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *páronként diszjunkt esemény esetén.*
3. ***A komplementer esemény valószínűsége***

   $$\mathbb{P}\left(\overline{A}\right) = 1 - \mathbb{P}(A)$$

   minden $A \in \mathcal{F}$ *esetén.*

A valószínűség tulajdonságai 4-6

Tétel

Ha $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *egy Kolmogorov-féle valószínűségi mező, akkor*

4. *Ha* $A, B \in \mathcal{F}$ *úgy, hogy* $A \subseteq B$, *akkor*
$$\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A).$$
5. ***A valószínűség monotonitása*** *Ha* $A, B \in \mathcal{F}$ *olyanok, hogy* $A \subseteq B$, *akkor*
$$\mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B).$$
6. $0 \leqslant \mathbb{P}(A) \leqslant 1$ *tetszőleges* $A \in \mathcal{F}$ *eseményre;*

A valószínűség tulajdonságai 7-9

7. **Szita-formula két eseményre**

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

minden $A, B \in \mathcal{F}$ esetén.

8. **Szita-formula három eseményre**

$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) =$

$= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C).$

minden $A, B, C \in \mathcal{F}$ esetén.

9. **Poincare formula**

$$\mathbb{P}(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k} (-1)^{k+1} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}).$$

minden $A_1, A_2, \ldots, A_n$ esemény esetén.

A valószínűség folytonossága

Tétel

A valószínűség folytonossága

1. *Ha* (B_n) *események csökkenő sorozata, azaz*
$$B_1 \supseteq B_2 \supseteq \dots$$
és $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \emptyset$*, akkor* $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(B_n) = 0$.
2. *Ha* (B_n) *események csökkenő sorozata, azaz* $B_1 \supseteq B_2 \supseteq \dots$ *és* $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = B$*, akkor* $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(B)$.
3. *Ha* (B_n) *események növekvő sorozata, azaz*
$$B_1 \subseteq B_2 \subseteq \dots,$$
és $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = B$*, akkor* $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(B)$.

Vége az 2. előadásnak