

Valószínűségszámítás és Matematikai Statisztika

Miskolc, 2025.

Dr. Glavosits Tamás

1. előadás

Halmazok, Kombinatorika, Klasszikus valószínűségi mező

1. Matematikai alapok

Számhalmazok

Az alábbi jelöléseket használjuk:

- **Pozitív egész számok halmaza:** $\mathbb{Z}_+ := \{1, 2, 3, \dots\}$.
- **Egész számok halmaza:**
 $\mathbb{Z} := \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$.
- **Racionális számok halmaza:** $\mathbb{Q} := \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}_+ \right\}$.
- **Valós számok halmaza:** \mathbb{R} (Gondoljunk arra, hogy a számegyenes pontjai.)
- **Komplex számok halmaza:** $\mathbb{C} := \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$, ahol i egy olyan szám, amelyre $i^2 = -1$.

Halmazokkal kapcsolatos ismeretek

Definíció

Ha a egy elem, A egy halmaz, akkor $a \in A$ jelöli azt a tényt, hogy az a elem hozzátartozik a A halmazhoz, illetve $a \notin A$ azt, hogy nem tartozik hozzá.

- **Tartalmazás:** Azt mondjuk, hogy az A halmaz **részhalma**za a B halmaznak, ha az A minden eleme egyúttal a B halmaznak is eleme. Jele: $A \subseteq B$.
- **Alaphalmaz:** Általában rögzítünk egy X alaphalmazt és az általunk vizsgált halmazok ennek az alaphalmaznak a részhalmaizai.

Hatványhalmaz

Definíció

Az X halmaz összes részhalmazának a halmazát $\mathcal{P}(X)$ módon jelöljük.

Példa Legyen például $X := \{1, 2, 3\}$. Ekkor

$$\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}.$$

A fenti példa sugallja az alábbi tételt:

Tétel

n elemű halmaznak 2^n részhalmaza van.

Halmazműveletek

Definíció

A legfontosabb halmazműveletek a metszet, az unió, a különbség és a komplementer. Legyenek A , B halmazok, az X az alaphalmaz.

- **Az A és B halmazok metszete:**

$$A \cap B := \{x \in X \mid x \in A \text{ és } x \in B\}.$$

- **Az A és B halmazok uniója:**

$$A \cup B := \{x \in X \mid x \in A \text{ vagy } x \in B\}.$$

- **Az A és B halmazok különbsége:**

$$A \setminus B := \{x \in X \mid x \in A \text{ és } x \notin B\}.$$

- **Az A halmaz komplementere: $\bar{A} := X \setminus A$.**

- **Az A és B halmazok Descartes-szorzata:**

$$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A \text{ és } b \in B\}.$$

Halmazműveletek halmzsorozatokra

Definíció

Legyen A_1, A_2, \dots az X univerzális halmaz részhalmazaiból álló sorozat. Ekkor tudjuk definiálni az A_i halmzsorozat tagjainak metszetét és unióját az alábbi módon

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i := \{x \in X \mid \forall i \in \mathbb{Z}_+ : x \in A_i\};$$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i := \{x \in X \mid \exists i \in \mathbb{Z}_+ : x \in A_i\};$$

ahol a \forall jelenti, hogy "minden elem...", és a \exists jelenti, hogy "létezik elem...".

De Morgan azonosságok

Tétel

Legyenek A, B halmazok az X univerzális halmaz részhalmazai.
Ekkor

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B} \quad \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}.$$

Tétel

Legyenek A_1, A_2, \dots halmazok egy sorozata. Ekkor

$$\overline{\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \bar{A}_i, \quad \overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \bar{A}_i.$$

Véges és végtelen halmazok

Definíció

Egy X halmazt **végesnek** nevezünk, ha

- 0 eleme van, azaz ($X = \emptyset$);
- 1 eleme van, azaz (X egy szingleton);
- 2 eleme van; ...

Egy X halmazt **végtelennek** nevezünk, ha X nem véges.

Definíció

Egy X véges halmaz elemeinek a számát az X halmaz **számosságának** nevezzük. Jele: $|X|$.

Definíció

Egy X végtelen halmazt **megszámlálhatóan végtelennek** nevezünk, ha az elemei injektív sorozatba rendezhetőek.

Véges halmazok számosságairól

Tétel

Ha A és B véges halmazok, akkor

- $|A \times B| = |A| \cdot |B|$;
- *továbbá, ha A , és B diszjunkt halmazok, (azaz $A \cap B = \emptyset$), akkor*

$$|A \cup B| = |A| + |B|.$$

2. Kombinatorika

Matematikai eszközök

Faktoriális függvény:

$$n! := \begin{cases} 1, & \text{ha } n = 0; \\ 1 \cdot 2 \cdots n, & \text{ha } n \in \mathbb{Z}_+. \end{cases}$$

Binomiális együttható:

$$\binom{n}{k} := \begin{cases} \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdots k} = \frac{(n)_k}{k!}, & \text{ha } 0 \leq k \leq n; \\ 0 & \text{, egyébként.} \end{cases}$$

Polinomiális együttható:

$$\binom{n}{k_1 k_2 \dots k_r} := \begin{cases} \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdots k_r!}, & \text{ha } 0 \leq k_i \leq n, \text{ és } k_1 + \dots + k_r = n; \\ 0 & \text{, egyébként.} \end{cases}$$

Permutációk

Definíció

1. **Ismétlés nélküli permutáció** n különböző elem összes lehetséges sorrendjét keressük. Ezek számát P_n módon jelöljük.
2. **Ismétléses permutáció** esetén az n elem közül k_1, k_2, \dots, k_r azonos tulajdonságú szerepel, amelyek egymás közötti sorrendje nem számít $k_1 + k_2 + \dots + k_r = n$. Ezek számát $P_n^{k_1, \dots, k_r(i)}$ módon jelöljük.

Tétel

Ismétlés nélküli és ismétléses permutációk száma

$$P_n = n! \quad (n \in \mathbb{Z}_+),$$
$$P_n^{k_1, k_2, \dots, k_r(i)} = \binom{n}{k_1 k_2 \dots k_r} := \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_r!}$$

Példa permutációra

Hányféle sorrendben írható le az A , B , C betű?

Példa permutációra

Hányféle sorrendben írható le az A , B , C betű?

A sorrendek:

ABC , ACB , BAC , BCA , CAB , CBA .

6 különböző sorrend létezik.

Példa permutációra

Hányféle sorrendben írható le az A , B , C betű?

A sorrendek:

ABC , ACB , BAC , BCA , CAB , CBA .

6 különböző sorrend létezik.

Képlettel:

$$P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6.$$

Példa ismétléses permutációra

Hány különböző sorrendben írható fel az A, A, B, B betű?

Példa ismétléses permutációra

Hány különböző sorrendben írható fel az A, A, B, B betű?

A sorrendek:

$AABB, ABAB, ABBA, BAAB, BABA, BBAA$.

6 különböző sorrend létezik.

Példa ismétléses permutációra

Hány különböző sorrendben írható fel az A, A, B, B betű?

A sorrendek:

$AABB, ABAB, ABBA, BAAB, BABA, BBAA$.

6 különböző sorrend létezik.

Képlettel:

$$P_4^{2,2(r)} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{24}{4} = 6.$$

Variációk

Definíció

Az n elem k tagú variációi azt jelentik, hogy az n elemből kiválasztunk k darabot úgy hogy számít a kiválasztott elemek sorrendje.

1. **Ismétlés nélküli variációk** Egy elem legfeljebb egyszer választható. Az n elem k -tagú ismétlés nélküli variációinak számát V_n^k módon jelöljük.
2. **Ismétléses variációk** Egy elem többször is választható. n elem k -tagú ismétléses variációinak számát $V_n^{k(i)}$ módon jelöljük.

Tétel

Az n elem k tagú ismétlés nélküli és ismétléses variációinak a száma

$$V_n^k = n(n-1) \cdots (n-k+1) := (n)_k, \quad V_n^{k(i)} = n^k.$$

Példa ismétlés nélküli variációra

Hány 3-tagú sorozat képezhető az A, B, C, D, E, F betűkből, ha minden betű csak egyszer szerepelhet?

Példa ismétlés nélküli variációra

Hány 3-tagú sorozat képezhető az A, B, C, D, E, F betűkből, ha minden betű csak egyszer szerepelhet?

A sorrendek:

$ABC, ABD, ABE, ABF, ACB, ACD, ACE, ACF, ADB, ADC,$
 ADE, ADF, \dots

120 különböző sorrend létezik.

Példa ismétlés nélküli variációra

Hány 3-tagú sorozat képezhető az A, B, C, D, E, F betűkből, ha minden betű csak egyszer szerepelhet?

A sorrendek:

$ABC, ABD, ABE, ABF, ACB, ACD, ACE, ACF, ADB, ADC,$
 ADE, ADF, \dots

120 különböző sorrend létezik.

Képlettel:

$$V_6^3 = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120.$$

Példa ismétléses variációra

Hány 3-tagú sorozat képezhető az A, B, C, D, E, F betűkből, ha minden betű többször is szerepelhet?

Példa ismétléses variációra

Hány 3-tagú sorozat képezhető az A, B, C, D, E, F betűkből, ha minden betű többször is szerepelhet?

A sorrendek:

$AAA, AAB, AAC, AAD, AAE, AAF, ABA, ACA, \dots$

216 különböző sorrend létezik.

Példa ismétléses variációra

Hány 3-tagú sorozat képezhető az A, B, C, D, E, F betűkből, ha minden betű többször is szerepelhet?

A sorrendek:

$AAA, AAB, AAC, AAD, AAE, AAF, ABA, ACA, \dots$

216 különböző sorrend létezik.

Képlettel:

$$V_6^{3(r)} = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 216.$$

Kombinációk

Definíció

Az n elem közül úgy választunk ki k darabot, hogy nem számít a kiválasztott elemek sorrendje.

1. **Ismétlés nélküli kombinációk** Egy elem legfeljebb egyszer választható. Az n elem k -tagú ismétlés nélküli kombinációinak számát C_n^k módon jelöljük.
2. **Ismétléses kombinációk** Egy elem többször is választható. Az n elem k -tagú ismétléses kombinációinak számát $C_n^{k(i)}$ módon jelöljük.

Kombinációk

Tétel

Az n elem k tagú ismétlés nélküli és ismétléses kombinációinak a száma

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdots k} = \frac{(n)_k}{k!},$$
$$C_n^{k(i)} = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)_k}{k!}.$$

Példa ismétlés nélküli kombinációra

Hány részhalmaza van az $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ halmaznak?

Példa ismétlés nélküli kombinációra

Hány részhalmaza van az $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ halmaznak?

A részhalmazok:

0-elemű részhalmaz: \emptyset

1-elemű részhalmaz: $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\},$

2-elemű részhalmaz: $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 4\},$
 $\{2, 5\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\},$

3-elemű részhalmaz: $\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\} \dots,$

4-elemű részhalmaz: $\{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 5\}, \{1, 2, 4, 5\},$
 $\{1, 3, 4, 5\}, \{2, 3, 4, 5\},$

elemű részhalmaz: $\{1, 2, 3, 4, 5\}.$

32 különböző részhalmaza van.

Példa ismétlés nélküli kombinációra

Hány részhalmaza van az $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ halmaznak?

A részhalmazok:

0-elemű részhalmaz: \emptyset

1-elemű részhalmaz: $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\},$

2-elemű részhalmaz: $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 4\},$
 $\{2, 5\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\},$

3-elemű részhalmaz: $\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\} \dots,$

4-elemű részhalmaz: $\{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 5\}, \{1, 2, 4, 5\},$
 $\{1, 3, 4, 5\}, \{2, 3, 4, 5\},$

5-elemű részhalmaz: $\{1, 2, 3, 4, 5\}.$

32 különböző részhalmaza van.

Képlettel:

$$\begin{aligned} C_5^0 + C_5^1 + C_5^2 + C_5^3 + C_5^4 + C_5^5 &= \binom{5}{0} + \binom{5}{1} + \binom{5}{2} + \binom{5}{3} + \binom{5}{4} + \binom{5}{5} = \\ &= 1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 32 \end{aligned}$$

Példa ismétléses kombinációra

Van 5 különböző ízű fagyalt. Hányféleképpen vehetünk ki 3-gombócos fagyaltot, ha nem számít a fagyaltgömbök sorrendje?

Példa ismétléses kombinációra

Van 5 különböző ízű fagyalt. Hányféleképpen vehetünk ki 3-gombócos fagyaltot, ha nem számít a fagyaltgömbök sorrendje?

Képlettel:

$$C_5^{3(r)} = \binom{5+3-1}{3} = \binom{7}{3} = 35.$$

A binomiális együtthatók tulajdonságai

Tétel

1. $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1;$

2. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k};$

3. $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$

A binomiális és polinomiális tétel

Tétel

1. A binomiális tétel:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

minden $n \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$; $a, b \in \mathbb{R}$ esetén;

2. A polinomiális tétel:

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_r)^n = \sum_{\substack{k_1+k_2+\dots+k_r=n \\ k_i \geq 0}} \binom{n}{k_1 k_2 \dots k_r} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_r^{k_r}$$

minden $n \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$; $r \in \mathbb{Z}_+$; $a_1, a_2, \dots, a_r \in \mathbb{R}$ esetén.

3. A klasszikus valószínűségi mező

Klasszikus valószínűségi mező

Definíció

Egy $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ hármast **klasszikus valószínűségi mezőnek** nevezzük, ha

- Ω egy nemüres véges halmaz. Neve **eseménytér**, elemei az **elemi események**. (Az elemi események nem események.)
- $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ az **események halmaza**, azaz a klasszikus valószínűségi mezőben az eseménytér minden részhalmaza esemény.
- $\mathbb{P} : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ a **valószínűség függvény**, amely

$$\mathbb{P}(A) := \frac{|A|}{|\Omega|} \quad (A \in \mathcal{P}(\Omega))$$

módon van definiálva, ahol $|A|$, illetve $|\Omega|$ jelöli az A , illetve az Ω halmazok elemeinek a számát.

1. Példa klasszikus valószínűségi mezőre

Szabályos dobókockával dobunk. Mennyi a valószínűsége, hogy páratlan számot dobunk?

Megoldás

Ezt a kísérletet egy $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ klasszikus valószínűségi mező írja le, ahol $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Ekkor $A = \{1, 3, 5\}$ az az esemény, amelynek a valószínűségét keressük.

A keresett valószínűség

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

2. Példa klasszikus valószínűségi mezőre

Szabályos dobókockával 3-szor dobunk. Mennyi a valószínűsége, hogy a dobott számok között legalább 2 hatos szerepel?

Megoldás

Ezt a kísérletet egy $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ klasszikus valószínűségi mező írja le, ahol

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$$

így az összes esetek száma 6^3 .

Ezek közül a kedvező esetek a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) := \{ & (6, 6, 1), \dots, (6, 6, 5), (6, 1, 6), \dots \\ & \dots, (6, 1, 5), (1, 6, 6), \dots, (5, 6, 6), (6, 6, 6) \} \end{aligned}$$

halmaz elemei. Így a kedvező esetek száma:

$|\mathbb{P}(A)| := 3 \cdot 5 + 1 = 16$, amiből kapjuk, hogy a keresett valószínűség:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{16}{6^3} = \frac{2}{27} = 0.0740.$$

Klasszikus valószínűségi mező tulajdonságai

Tétel

Ha $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ egy klasszikus valószínűségi mező, akkor a $\mathbb{P} : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$

- **Nemnegatív**, azaz $\mathbb{P}(A) \geq 0$ minden $A \subseteq \Omega$ esetén;
- **1-re normált**, azaz $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;
- **Végesen additív**, azaz ha A_1, A_2, \dots, A_k páronként diszjunkt események, akkor

$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \dots + \mathbb{P}(A_k).$$

Vége az 1. előadásnak