

# Valószínűségszámítás és Matematikai Statisztika

IV.-VI. óra

Miskolc, 2025.

## IV. óra

# Valószínűségi változók (diszkrét eset), Várható érték és szórásnégyzet

# 1.Valószínűségi változók (diszkrét eset)

# Valószínűségi változók

# Valószínűségi változók

Legyen  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  egy Kolmogorov-féle valószínűségi mező. Egy  $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  függvényt **valószínűségi változónak** nevezünk, ha

$$(\xi < x) \doteq \{\omega \in \Omega \mid \xi(\omega) < x\} \in \mathcal{F} \quad (x \in \mathbb{R}),$$

azaz a  $\xi$  nívóhalmazai események.

# Valószínűségi változók

Legyen  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  egy Kolmogorov-féle valószínűségi mező. Egy  $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  függvényt **valószínűségi változónak** nevezünk, ha

$$(\xi < x) \doteq \{\omega \in \Omega \mid \xi(\omega) < x\} \in \mathcal{F} \quad (x \in \mathbb{R}),$$

azaz a  $\xi$  nívóhalmazai események.

Érdemes megjegyezni, hogyha  $\xi$  tetszőleges valószínűségi változó, akkor

$$(\xi = x) \doteq \{\omega \in \Omega \mid \xi(\omega) = x\} \in \mathcal{F}$$

tetszőleges  $x \in \mathbb{R}$  esetén.

# Valószínűségi változó eloszlásfüggvénye

# Valószínűségi változó eloszlásfüggvénye

Legyen  $\xi$  egy tetszőleges valószínűségi változó. Az  $\mathbb{F}_\xi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\mathbb{F}_\xi(x) \doteq \mathbb{P}(\xi < x) \quad (x \in \mathbb{R})$$

módon definiált függvényt a  $\xi$  valószínűségi változó **eloszlásfüggvényének** nevezzük.

# Az eloszlásfüggvény tulajdonságai

# Az eloszlásfüggvény tulajdonságai

Az  $\mathbb{F}_\xi$  eloszlásfüggvény

# Az eloszlásfüggvény tulajdonságai

Az  $\mathbb{F}_\xi$  eloszlásfüggvény

- 1 Monoton növekvő;

# Az eloszlásfüggvény tulajdonságai

Az  $\mathbb{F}_\xi$  eloszlásfüggvény

- 1 Monoton növekvő;
- 2 Balról folytonos;

# Az eloszlásfüggvény tulajdonságai

Az  $\mathbb{F}_\xi$  eloszlásfüggvény

- 1 Monoton növekvő;
- 2 Balról folytonos;
- 3  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \mathbb{F}_\xi(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \mathbb{F}_\xi(x) = 1.$

# A valószínűségi változók fajtái

# A valószínűségi változók fajtái

A valószínűségi változóknek három fajtája van:

# A valószínűségi változók fajtái

A valószínűségi változóknek három fajtája van:

- 1 Diszkrét;

# A valószínűségi változók fajtái

A valószínűségi változóknak három fajtája van:

- 1 Diszkrét;
- 2 Folytonos;

# A valószínűségi változók fajtái

A valószínűségi változóknak három fajtája van:

- 1 Diszkrét;
- 2 Folytonos;
- 3 Egyéb;

## 2. Diszkrét valószínűségi változó

# Diszkrét valószínűségi változó

# Diszkrét valószínűségi változó

- Azt mondjuk, hogy egy  $\xi$  **valószínűségi változó diszkrét**, ha értékkészlete megszámlálható.

# Diszkrét valószínűségi változó

- Azt mondjuk, hogy egy  $\xi$  **valószínűségi változó diszkrét**, ha értékkészlete megszámlálható.
- Egy  $\xi$  diszkrét valószínűségi változó értékkészletét

$$\mathbb{R}_\xi \doteq \{x_1, x_2, \dots\}$$

módon jelöljük.

# Diszkrét valószínűségi változó

- Azt mondjuk, hogy egy  $\xi$  **valószínűségi változó diszkrét**, ha értékészlete megszámlálható.
- Egy  $\xi$  diszkrét valószínűségi változó értékészletét

$$\mathbb{R}_\xi \doteq \{x_1, x_2, \dots\}$$

módon jelöljük.

- Ha  $\xi$  egy diszkrét valószínűségi változó, akkor a

$$p_1 \doteq \mathbb{P}(\xi = x_1), \quad p_2 \doteq \mathbb{P}(\xi = x_2), \quad , \dots$$

valós számsorozatot a  $\xi$  valószínűségi változó **eloszlásának** a nevezzük.

# Diszkrét valószínűségi változó eloszlásának a tulajdonságai

# Diszkrét valószínűségi változó eloszlásának a tulajdonságai

- 1  $p_i \geq 0$  minden  $i = 1, 2, \dots$  esetén;

# Diszkrét valószínűségi változó eloszlásának a tulajdonságai

- 1  $p_i \geq 0$  minden  $i = 1, 2, \dots$  esetén;
- 2  $\sum_i p_i = 1$ .

# Diszkrét valószínűségi változó eloszlásának a tulajdonságai

- 1  $p_i \geq 0$  minden  $i = 1, 2, \dots$  esetén;
- 2  $\sum_i p_i = 1$ .

Azaz minden diszkrét valószínűségi változó eloszlása nemnegatív, 1 összegű valós számok véges, vagy végtelen sorozata.

### 3. Diszkrét valószínűségi változó várható értéke

# Diszkrét valószínűségi változó várható értéke

# Diszkrét valószínűségi változó várható értéke

A  $\xi$  diszkrét valószínűségi változó várható értékének az

# Diszkrét valószínűségi változó várható értéke

A  $\xi$  diszkrét valószínűségi változó várható értékének az

$$\mathbb{E}(\xi) \doteq \sum_i x_i p_i = \sum_i x_i \mathbb{P}(\xi = x_i)$$

# Diszkrét valószínűségi változó várható értéke

A  $\xi$  diszkrét valószínűségi változó várható értékének az

$$\mathbb{E}(\xi) \doteq \sum_i x_i p_i = \sum_i x_i \mathbb{P}(\xi = x_i)$$

módon definiált valós számot nevezünk, amennyiben a definícióban szereplő numerikus sor abszolút konvergens.

# A várható értéke tulajdonságai

## A várható értéke tulajdonságai

Legyenek  $\xi$ ,  $\eta$  valószínűségi változók;  $c$  egy valós szám. A várható érték a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

# A várható értéke tulajdonságai

Legyenek  $\xi$ ,  $\eta$  valószínűségi változók;  $c$  egy valós szám. A várható érték a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

- 1 **Additív**, azaz  $\mathbb{E}(\xi + \eta) = \mathbb{E}(\xi) + \mathbb{E}(\eta)$ ;

# A várható értéke tulajdonságai

Legyenek  $\xi$ ,  $\eta$  valószínűségi változók;  $c$  egy valós szám. A várható érték a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

- 1 **Additív**, azaz  $\mathbb{E}(\xi + \eta) = \mathbb{E}(\xi) + \mathbb{E}(\eta)$ ;
- 2 **Homogén**, azaz  $\mathbb{E}(c\xi) = c\mathbb{E}(\xi)$ ;

## A várható értéke tulajdonságai

Legyenek  $\xi$ ,  $\eta$  valószínűségi változók;  $c$  egy valós szám. A várható érték a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

- 1 **Additív**, azaz  $\mathbb{E}(\xi + \eta) = \mathbb{E}(\xi) + \mathbb{E}(\eta)$ ;
- 2 **Homogén**, azaz  $\mathbb{E}(c\xi) = c\mathbb{E}(\xi)$ ;
- 3 **Eltolással kapcsolatos tulajdonság**:  $\mathbb{E}(\xi + c) = \mathbb{E}(\xi) + c$ .

# A transzformációs szabály diszkrét valószínűségi változó esetén

# A transzformációs szabály diszkrét valószínűségi változó esetén

Legyen  $\xi$  egy olyan diszkrét valószínűségi változó, amelynek van várható értéke,  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  egy ("elég jó") függvény. Ekkor a  $g(\xi)$  valószínűségi változó várható értéke

# A transzformációs szabály diszkrét valószínűségi változó esetén

Legyen  $\xi$  egy olyan diszkrét valószínűségi változó, amelynek van várható értéke,  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  egy ("elég jó") függvény. Ekkor a  $g(\xi)$  valószínűségi változó várható értéke

$$\mathbb{E}(g(\xi)) = \sum_i g(x_i) p_i.$$

módon számolható.

# A transzformációs szabály diszkrét valószínűségi változó esetén

Legyen  $\xi$  egy olyan diszkrét valószínűségi változó, amelynek van várható értéke,  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  egy ("elég jó") függvény. Ekkor a  $g(\xi)$  valószínűségi változó várható értéke

$$\mathbb{E}(g(\xi)) = \sum_i g(x_i) p_i.$$

módon számolható.

A transzformációs formula azt fejezi ki, hogy a  $g(\xi)$  várható értékének a kiszámolásához nem kell meghatároznunk a  $g(\xi)$  valószínűségi változó eloszlását, az  $\mathbb{E}(g(\xi))$  a  $\xi$  eloszlása alapján közvetlenül számolható.

## 4. Valószínűségi változó szórásnégyzete

# Valószínűségi változó szórásnégyzete

# Valószínűségi változó szórásnégyzete

A  $\xi$  valószínűségi változó

# Valószínűségi változó szórásnégyzete

A  $\xi$  valószínűségi változó

- szórásnégyzetének a

$$\mathbb{D}^2(\xi) \doteq \mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}(\xi))^2$$

módon definiált valós számot nevezük, amennyiben a definícióban szereplő numerikus sor abszolút konvergens.

# Valószínűségi változó szórásnégyzete

A  $\xi$  valószínűségi változó

- szórásnégyzetének a

$$\mathbb{D}^2(\xi) \doteq \mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}(\xi))^2$$

módon definiált valós számot nevezük, amennyiben a definícióban szereplő numerikus sor abszolút konvergens.

- **A szórásnégyzet kiszámítása:**

$$\mathbb{D}^2(\xi) \doteq \mathbb{E}(\xi^2) - [\mathbb{E}(\xi)]^2.$$

# Valószínűségi változó szórásnégyzete

A  $\xi$  valószínűségi változó

- szórásnégyzetének a

$$\mathbb{D}^2(\xi) \doteq \mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}(\xi))^2$$

módon definiált valós számot nevezük, amennyiben a definícióban szereplő numerikus sor abszolút konvergens.

- **A szórásnégyzet kiszámítása:**

$$\mathbb{D}^2(\xi) \doteq \mathbb{E}(\xi^2) - [\mathbb{E}(\xi)]^2.$$

- Az  $\mathbb{E}(\xi^2)$  számot a  $\xi$  valószínűségi változó **második momentumának** nevezük. Az  $\mathbb{E}(\xi^2)$  diszkrét esetben például a transzformációs szabály alapján  $\mathbb{E}(\xi^2) = \sum_i x_i^2 p_i$  módon számolható (legalábbis diszkrét esetben).

# Valószínűségi változó szórása

# Valószínűségi változó szórása

A  $\xi$  valószínűségi változó

- Ha  $\xi$  egy olyan valószínűségi változó, amelynek van szórásnégyzete, akkor a

$$\mathbb{D}(\xi) \doteq \sqrt{\mathbb{D}^2(\xi)}$$

módon definiált számot a  $\xi$  valószínűségi változó **szórásának** nevezzük.

# A szórásnégyzet tulajdonságai

# A szórásnégyzet tulajdonságai

A szórásnégyzet

# A szórásnégyzet tulajdonságai

A szórásnégyzet

- 1 Négyzetesen homogén, azaz  $\mathbb{D}^2(c\xi) = c^2\mathbb{D}^2(\xi)$ ;

# A szórásnégyzet tulajdonságai

A szórásnégyzet

- 1 **Négyzetesen homogén**, azaz  $\mathbb{D}^2(c\xi) = c^2\mathbb{D}^2(\xi)$ ;
- 2 **Transzláció invariáns**, azaz  $\mathbb{D}^2(\xi + c) = \mathbb{D}^2(\xi)$ .

# Szórásnégyzet és additivitás

## Szórásnégyzet és additivitás

- Ha  $\xi_1$  és  $\xi_2$  valószínűségi változók, akkor

$$\mathbb{D}^2(\xi_1 + \xi_2) = \mathbb{D}^2(\xi_1) + 2\text{cov}(\xi_1, \xi_2) + \mathbb{D}^2(\xi_2),$$

## Szórásnégyzet és additivitás

- Ha  $\xi_1$  és  $\xi_2$  valószínűségi változók, akkor

$$\mathbb{D}^2(\xi_1 + \xi_2) = \mathbb{D}^2(\xi_1) + 2\text{cov}(\xi_1, \xi_2) + \mathbb{D}^2(\xi_2),$$

- tehát a szórásnégyzet csak akkor additív, ha  $\text{cov}(\xi_1, \xi_2) = 0$ .

## Szórásnégyzet és additivitás

- Ha  $\xi_1$  és  $\xi_2$  valószínűségi változók, akkor

$$\mathbb{D}^2(\xi_1 + \xi_2) = \mathbb{D}^2(\xi_1) + 2\text{cov}(\xi_1, \xi_2) + \mathbb{D}^2(\xi_2),$$

- tehát a szórásnégyzet csak akkor additív, ha  $\text{cov}(\xi_1, \xi_2) = 0$ .
- A  $\text{cov}(\xi_1, \xi_2)$  mennyiséget a  $\xi_1$  és  $\xi_2$  valószínűségi változók **kovarianciájának** nevezzük.

## Szórásnégyzet és additivitás

- Ha  $\xi_1$  és  $\xi_2$  valószínűségi változók, akkor

$$\mathbb{D}^2(\xi_1 + \xi_2) = \mathbb{D}^2(\xi_1) + 2\text{cov}(\xi_1, \xi_2) + \mathbb{D}^2(\xi_2),$$

- tehát a szórásnégyzet csak akkor additív, ha  $\text{cov}(\xi_1, \xi_2) = 0$ .
- A  $\text{cov}(\xi_1, \xi_2)$  mennyiséget a  $\xi_1$  és  $\xi_2$  valószínűségi változók **kovarianciájának** nevezzük.
- Ha  $\text{cov}(\xi_1, \xi_2) = 0$ , akkor azt mondjuk, hogy a  $\xi_1$  és  $\xi_2$  valószínűségi változók **korrelálatlanok**.

## Szórásnégyzet és additivitás

- Ha  $\xi_1$  és  $\xi_2$  valószínűségi változók, akkor

$$\mathbb{D}^2(\xi_1 + \xi_2) = \mathbb{D}^2(\xi_1) + 2\text{cov}(\xi_1, \xi_2) + \mathbb{D}^2(\xi_2),$$

- tehát a szórásnégyzet csak akkor additív, ha  $\text{cov}(\xi_1, \xi_2) = 0$ .
- A  $\text{cov}(\xi_1, \xi_2)$  mennyiséget a  $\xi_1$  és  $\xi_2$  valószínűségi változók **kovarianciájának** nevezzük.
- Ha  $\text{cov}(\xi_1, \xi_2) = 0$ , akkor azt mondjuk, hogy a  $\xi_1$  és  $\xi_2$  valószínűségi változók **korrelálatlanok**.
- Valószínűségi változók kovarianciája

$$\text{cov}(\xi_1, \xi_2) \doteq \mathbb{E}((\xi_1 - \mathbb{E}(\xi_1))(\xi_2 - \mathbb{E}(\xi_2)))$$

módon van definiálva.

## Szórásnégyzet és additivitás

- Ha  $\xi_1$  és  $\xi_2$  valószínűségi változók, akkor

$$\mathbb{D}^2(\xi_1 + \xi_2) = \mathbb{D}^2(\xi_1) + 2\text{cov}(\xi_1, \xi_2) + \mathbb{D}^2(\xi_2),$$

- tehát a szórásnégyzet csak akkor additív, ha  $\text{cov}(\xi_1, \xi_2) = 0$ .
- A  $\text{cov}(\xi_1, \xi_2)$  mennyiséget a  $\xi_1$  és  $\xi_2$  valószínűségi változók **kovarianciájának** nevezzük.
- Ha  $\text{cov}(\xi_1, \xi_2) = 0$ , akkor azt mondjuk, hogy a  $\xi_1$  és  $\xi_2$  valószínűségi változók **korrelálatlanok**.
- Valószínűségi változók kovarianciája

$$\text{cov}(\xi_1, \xi_2) \doteq \mathbb{E}((\xi_1 - \mathbb{E}(\xi_1))(\xi_2 - \mathbb{E}(\xi_2)))$$

módon van definiálva.

- A korrelálatlanság gyengébb tulajdonság, mint a függetlenség, azaz ha két valószínűségi változó független, akkor korrelálatlan.

## 5. Diszkrét valószínűségi változó generátorfüggvénye

# Diszkrét valószínűségi változó generátorfüggvénye

# Diszkrét valószínűségi változó generátorfüggvénye

A generátorfüggvény egy olyan matematikai segédeszköz, amely sok esetben segít a diszkrét valószínűségi változó várható értékének és szórásnégyzetének a meghatározásában.

# Diszkrét valószínűségi változó generátorfüggvénye

A generátorfüggvény egy olyan matematikai segédeszköz, amely sok esetben segít a diszkrét valószínűségi változó várható értékének és szórásnégyzetének a meghatározásában.

- Legyen  $\xi$  egy olyan diszkrét valószínűségi amely csak nemnegatív egész értékeket vesz fel. Definiáljuk a  $G_\xi : D \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  függvényt

$$G_\xi(z) \doteq \sum_{k \in \mathcal{R}_\xi} p_k z^k = \sum_{k \in \mathcal{R}_\xi} \mathbb{P}(\xi = k) z^k \quad (z \in D)$$

módon. A  $D$  halmaz a komplex számok testének egy olyan legbővebb részhalmaza, amelyen a  $G_\xi$  hatványsor abszolút konvergens.

- Amennyiben a  $\xi$  valószínűségi változónak létezik várható értéke, az a generátorfüggvény segítségével

$$\mathbb{E}(\xi) = G'_\xi(1)$$

módon számolható.

- Amennyiben a  $\xi$  valószínűségi változónak létezik várható értéke, az a generátorfüggvény segítségével

$$\mathbb{E}(\xi) = G'_\xi(1)$$

módon számolható.

- Amennyiben a  $\xi$  valószínűségi változónak létezik a szórásnégyzete, az a generátorfüggvény segítségével

$$\mathbb{D}^2(\xi) = G'_\xi(1) + G''_\xi(1) - [G'_\xi(1)]^2$$

módon számolható.

# Példa.

## Példa.

- Legyen  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  egy klasszikus valószínűségi mező, ahol  $\Omega \doteq \{a, b, c, d\}$ .

## Példa.

- Legyen  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  egy klasszikus valószínűségi mező, ahol  $\Omega \doteq \{a, b, c, d\}$ .
- Definiáljuk a  $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  valószínűségi változót az alábbi táblázat segítségével:

$\omega$	$a$	$b$	$c$	$d$
$\xi(\omega)$	5	1	5	2

## Példa.

- Legyen  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  egy klasszikus valószínűségi mező, ahol  $\Omega \doteq \{a, b, c, d\}$ .
- Definiáljuk a  $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  valószínűségi változót az alábbi táblázat segítségével:

$\omega$	$a$	$b$	$c$	$d$
$\xi(\omega)$	5	1	5	2

- Ekkor a  $\xi$  értékkészlet  $\mathcal{R}(\xi) = \{1, 2, 5\}$ .

A  $\xi$  eloszlása:

$$(\xi = 1) = \{b\} \quad \Longrightarrow \quad p_1 = \mathbb{P}(\xi = 1) = \mathbb{P}(\{b\}) = \frac{1}{4} = 0.25,$$

$$(\xi = 2) = \{d\} \quad \Longrightarrow \quad p_2 = \mathbb{P}(\xi = 2) = \mathbb{P}(\{d\}) = \frac{1}{4} = 0.25,$$

$$(\xi = 5) = \{a, c\} \quad \Longrightarrow \quad p_3 = \mathbb{P}(\xi = 5) = \mathbb{P}(\{a, c\}) = \frac{2}{4} = 0.5.$$

A  $\xi$  eloszlása:

$$(\xi = 1) = \{b\} \quad \implies \quad p_1 = \mathbb{P}(\xi = 1) = \mathbb{P}(\{b\}) = \frac{1}{4} = 0.25,$$

$$(\xi = 2) = \{d\} \quad \implies \quad p_2 = \mathbb{P}(\xi = 2) = \mathbb{P}(\{d\}) = \frac{1}{4} = 0.25,$$

$$(\xi = 5) = \{a, c\} \quad \implies \quad p_3 = \mathbb{P}(\xi = 5) = \mathbb{P}(\{a, c\}) = \frac{2}{4} = 0.5.$$

$x_k$	1	2	5
$p_k$	0.25	0.25	0.5

Így kapjuk, hogy

A  $\xi$  eloszlása:

$$(\xi = 1) = \{b\} \quad \implies \quad p_1 = \mathbb{P}(\xi = 1) = \mathbb{P}(\{b\}) = \frac{1}{4} = 0.25,$$

$$(\xi = 2) = \{d\} \quad \implies \quad p_2 = \mathbb{P}(\xi = 2) = \mathbb{P}(\{d\}) = \frac{1}{4} = 0.25,$$

$$(\xi = 5) = \{a, c\} \quad \implies \quad p_3 = \mathbb{P}(\xi = 5) = \mathbb{P}(\{a, c\}) = \frac{2}{4} = 0.5.$$

$x_k$	1	2	5
$p_k$	0.25	0.25	0.5

Így kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}(\xi) = 1 \cdot 0.25 + 2 \cdot 0.25 + 5 \cdot 0.5 = 3.25;$$

A  $\xi$  eloszlása:

$$(\xi = 1) = \{b\} \quad \implies \quad p_1 = \mathbb{P}(\xi = 1) = \mathbb{P}(\{b\}) = \frac{1}{4} = 0.25,$$

$$(\xi = 2) = \{d\} \quad \implies \quad p_2 = \mathbb{P}(\xi = 2) = \mathbb{P}(\{d\}) = \frac{1}{4} = 0.25,$$

$$(\xi = 5) = \{a, c\} \quad \implies \quad p_3 = \mathbb{P}(\xi = 5) = \mathbb{P}(\{a, c\}) = \frac{2}{4} = 0.5.$$

$x_k$	1	2	5
$p_k$	0.25	0.25	0.5

Így kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}(\xi) = 1 \cdot 0.25 + 2 \cdot 0.25 + 5 \cdot 0.5 = 3.25;$$

$$\mathbb{E}(\xi^2) = 1^2 \cdot 0.25 + 2^2 \cdot 0.25 + 5^2 \cdot 0.5 = 13.75;$$

A  $\xi$  eloszlása:

$$(\xi = 1) = \{b\} \quad \implies \quad p_1 = \mathbb{P}(\xi = 1) = \mathbb{P}(\{b\}) = \frac{1}{4} = 0.25,$$

$$(\xi = 2) = \{d\} \quad \implies \quad p_2 = \mathbb{P}(\xi = 2) = \mathbb{P}(\{d\}) = \frac{1}{4} = 0.25,$$

$$(\xi = 5) = \{a, c\} \quad \implies \quad p_3 = \mathbb{P}(\xi = 5) = \mathbb{P}(\{a, c\}) = \frac{2}{4} = 0.5.$$

$x_k$	1	2	5
$p_k$	0.25	0.25	0.5

Így kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}(\xi) = 1 \cdot 0.25 + 2 \cdot 0.25 + 5 \cdot 0.5 = 3.25;$$

$$\mathbb{E}(\xi^2) = 1^2 \cdot 0.25 + 2^2 \cdot 0.25 + 5^2 \cdot 0.5 = 13.75;$$

$$\mathbb{D}^2(\xi) = \mathbb{E}(\xi^2) - [\mathbb{E}(\xi)]^2 = 3, 1875.$$

Csak azért, hogy lássuk a generátorfüggvény működését, most a várható értéket és a szórásnégyzetet kiszámítjuk a generátorfüggvény segítségével is.

Csak azért, hogy lássuk a generátorfüggvény működését, most a várható értéket és a szórásnégyzetet kiszámítjuk a generátorfüggvény segítségével is.

$$G_{\xi}(z) = 0.25z + 0.25z^2 + 0.5z^5,$$

Csak azért, hogy lássuk a generátorfüggvény működését, most a várható értéket és a szórásnégyzetet kiszámítjuk a generátorfüggvény segítségével is.

$$G_{\xi}(z) = 0.25z + 0.25z^2 + 0.5z^5,$$

$$G'_{\xi}(z) = 0.25 + 0.25 \cdot 2 \cdot z + 0.5 \cdot 5 \cdot z^4 \quad \implies$$

Csak azért, hogy lássuk a generátorfüggvény működését, most a várható értéket és a szórásnégyzetet kiszámítjuk a generátorfüggvény segítségével is.

$$G_{\xi}(z) = 0.25z + 0.25z^2 + 0.5z^5,$$

$$G'_{\xi}(z) = 0.25 + 0.25 \cdot 2 \cdot z + 0.5 \cdot 5 \cdot z^4 \quad \implies$$

$$\implies \mathbb{E}(\xi) = G'_{\xi}(1) = 0.25 + 0.25 \cdot 2 \cdot 1 + 0.5 \cdot 5 \cdot 1 = 3.25,$$

Csak azért, hogy lássuk a generátorfüggvény működését, most a várható értéket és a szórásnégyzetet kiszámítjuk a generátorfüggvény segítségével is.

$$G_{\xi}(z) = 0.25z + 0.25z^2 + 0.5z^5,$$

$$G'_{\xi}(z) = 0.25 + 0.25 \cdot 2 \cdot z + 0.5 \cdot 5 \cdot z^4 \quad \implies$$

$$\implies \mathbb{E}(\xi) = G'_{\xi}(1) = 0.25 + 0.25 \cdot 2 \cdot 1 + 0.5 \cdot 5 \cdot 1 = 3.25,$$

$$G''_{\xi}(z) = 0.25 \cdot 2 + 0.5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot z^3 \quad \implies$$

Csak azért, hogy lássuk a generátorfüggvény működését, most a várható értéket és a szórásnégyzetet kiszámítjuk a generátorfüggvény segítségével is.

$$G_{\xi}(z) = 0.25z + 0.25z^2 + 0.5z^5,$$

$$G'_{\xi}(z) = 0.25 + 0.25 \cdot 2 \cdot z + 0.5 \cdot 5 \cdot z^4 \quad \implies$$

$$\implies \mathbb{E}(\xi) = G'_{\xi}(1) = 0.25 + 0.25 \cdot 2 \cdot 1 + 0.5 \cdot 5 \cdot 1 = 3.25,$$

$$G''_{\xi}(z) = 0.25 \cdot 2 + 0.5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot z^3 \quad \implies$$

$$\implies G''_{\xi}(1) = 0.25 \cdot 2 \cdot 1 + 0.5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 1 = 10.5 \quad \implies$$

Csak azért, hogy lássuk a generátorfüggvény működését, most a várható értéket és a szórásnégyzetet kiszámítjuk a generátorfüggvény segítségével is.

$$G_{\xi}(z) = 0.25z + 0.25z^2 + 0.5z^5,$$

$$G'_{\xi}(z) = 0.25 + 0.25 \cdot 2 \cdot z + 0.5 \cdot 5 \cdot z^4 \quad \implies$$

$$\implies \mathbb{E}(\xi) = G'_{\xi}(1) = 0.25 + 0.25 \cdot 2 \cdot 1 + 0.5 \cdot 5 \cdot 1 = 3.25,$$

$$G''_{\xi}(z) = 0.25 \cdot 2 + 0.5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot z^3 \quad \implies$$

$$\implies G''_{\xi}(1) = 0.25 \cdot 2 \cdot 1 + 0.5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 1 = 10.5 \quad \implies$$

$$\begin{aligned} \mathbb{D}^2(\xi) &= G'_{\xi}(1) + G''_{\xi}(1) - [G'_{\xi}(1)]^2 = 3.25 + 10.5 - 3.25^2 = \\ &= 3.1875. \end{aligned}$$

Csak azért, hogy lássuk a generátorfüggvény működését, most a várható értéket és a szórásnégyzetet kiszámítjuk a generátorfüggvény segítségével is.

$$G_{\xi}(z) = 0.25z + 0.25z^2 + 0.5z^5,$$

$$G'_{\xi}(z) = 0.25 + 0.25 \cdot 2 \cdot z + 0.5 \cdot 5 \cdot z^4 \quad \implies$$

$$\implies \mathbb{E}(\xi) = G'_{\xi}(1) = 0.25 + 0.25 \cdot 2 \cdot 1 + 0.5 \cdot 5 \cdot 1 = 3.25,$$

$$G''_{\xi}(z) = 0.25 \cdot 2 + 0.5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot z^3 \quad \implies$$

$$\implies G''_{\xi}(1) = 0.25 \cdot 2 \cdot 1 + 0.5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 1 = 10.5 \quad \implies$$

$$\begin{aligned} \mathbb{D}^2(\xi) &= G'_{\xi}(1) + G''_{\xi}(1) - [G'_{\xi}(1)]^2 = 3.25 + 10.5 - 3.25^2 = \\ &= 3.1875. \end{aligned}$$

$$\mathbb{E}(\xi) = 1 \cdot 0.25 + 2 \cdot 0.25 + 5 \cdot 0.5 = 3.25;$$

$$\mathbb{E}(\xi^2) = 1^2 \cdot 0.25 + 2^2 \cdot 0.25 + 5^2 \cdot 0.5 = 13.75;$$

$$\mathbb{D}^2(\xi) = \mathbb{E}(\xi^2) - [\mathbb{E}(\xi)]^2 = 3,1875.$$

# Példa

## Példa

Egy urnában van két golyó, egy piros és egy kék. Visszatevéssel kihúzunk három golyót. jelölje  $\xi$  a kihúzott piros golyók számát. Határozzuk meg a  $\xi$  eloszlását, várható értékét és szórásnégyzetét.

## Példa

Egy urnában van két golyó, egy piros és egy kék. Visszatevéssel kihúzunk három golyót. jelölje  $\xi$  a kihúzott piros golyók számát. Határozzuk meg a  $\xi$  eloszlását, várható értékét és szórásnégyzetét.

- A golyók halmaza legyen  $G = \{P, K\}$ .

## Példa

Egy urnában van két golyó, egy piros és egy kék. Visszatevéssel kihúzzunk három golyót. jelölje  $\xi$  a kihúzott piros golyók számát. Határozzuk meg a  $\xi$  eloszlását, várható értékét és szórásnégyzetét.

- A golyók halmaza legyen  $G = \{P, K\}$ .
- Az eseménytér:

$$\Omega \doteq G \times G \times G = \left\{ \underbrace{(P, P, P)}_{\omega_1}, \underbrace{(P, P, K)}_{\omega_2}, \underbrace{(P, K, P)}_{\omega_3}, \underbrace{(P, K, K)}_{\omega_4}, \right. \\ \left. \underbrace{(K, P, P)}_{\omega_5}, \underbrace{(K, P, K)}_{\omega_6}, \underbrace{(K, K, P)}_{\omega_7}, \underbrace{(K, K, K)}_{\omega_8} \right\}.$$

## Példa

Egy urnában van két golyó, egy piros és egy kék. Visszatevéssel kihúzzunk három golyót. jelölje  $\xi$  a kihúzott piros golyók számát. Határozzuk meg a  $\xi$  eloszlását, várható értékét és szórásnégyzetét.

- A golyók halmaza legyen  $G = \{P, K\}$ .
- Az eseménytér:

$$\Omega \doteq G \times G \times G = \left\{ \underbrace{(P, P, P)}_{\omega_1}, \underbrace{(P, P, K)}_{\omega_2}, \underbrace{(P, K, P)}_{\omega_3}, \underbrace{(P, K, K)}_{\omega_4}, \right. \\ \left. \underbrace{(K, P, P)}_{\omega_5}, \underbrace{(K, P, K)}_{\omega_6}, \underbrace{(K, K, P)}_{\omega_7}, \underbrace{(K, K, K)}_{\omega_8} \right\}.$$

Ekkor az  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  egy klasszikus valószínűségi mező.

- Készítsük el a  $\xi$  valószínűségi változó értéktáblázatát.

- Készítsük el a  $\xi$  valószínűségi változó értéktáblázatát.

$\omega_i$	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$	$\omega_4$	$\omega_5$	$\omega_6$	$\omega_7$	$\omega_8$
$\xi(\omega_i)$	3	2	2	1	2	1	1	0

$$\Omega \doteq G \times G \times G = \left\{ \underbrace{(P, P, P)}_{\omega_1}, \underbrace{(P, P, K)}_{\omega_2}, \underbrace{(P, K, P)}_{\omega_3}, \underbrace{(P, K, K)}_{\omega_4}, \right. \\ \left. \underbrace{(K, P, P)}_{\omega_5}, \underbrace{(K, P, K)}_{\omega_6}, \underbrace{(K, K, P)}_{\omega_7}, \underbrace{(K, K, K)}_{\omega_8} \right\}.$$

- Most meghatározzuk a  $\xi$  valószínűségi változó eloszlását. A  $\xi$  valószínűségi változó értékészlete

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 3.$$

- Most meghatározzuk a  $\xi$  valószínűségi változó eloszlását. A  $\xi$  valószínűségi változó értékészlete

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 3.$$

- A  $\xi$  valószínűségi változó eloszlása:

$$(\xi = 0) = \{\omega_8\} \quad \implies \quad p_0 = \mathbb{P}(\xi = 0) = \frac{1}{8},$$

$$(\xi = 1) = \{\omega_4, \omega_6, \omega_7\} \quad \implies \quad p_1 = \mathbb{P}(\xi = 1) = \frac{3}{8},$$

$$(\xi = 2) = \{\omega_2, \omega_3, \omega_5\} \quad \implies \quad p_2 = \mathbb{P}(\xi = 2) = \frac{3}{8},$$

$$(\xi = 3) = \{\omega_1\} \quad \implies \quad p_3 = \mathbb{P}(\xi = 3) = \frac{1}{8}.$$

- Foglaljuk táblázatba a  $\xi$  valószínűségi változó eloszlását.

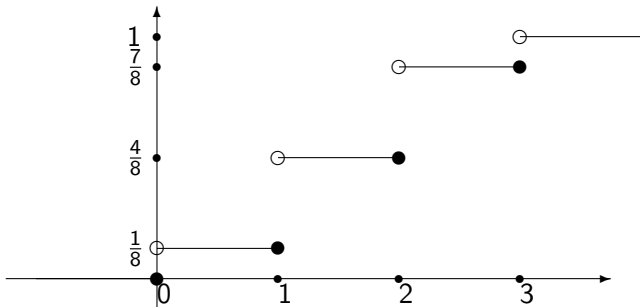
- Foglaljuk táblázatba a  $\xi$  valószínűségi változó eloszlását.

$x_i$	0	1	2	3
$p_i$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

- Foglaljuk táblázatba a  $\xi$  valószínűségi változó eloszlását.

$x_i$	0	1	2	3
$p_i$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

- A  $\xi$  valószínűségi változó eloszlásfüggvénye:



Tehát egy olyan valószínűségi változó eloszlásfüggvénye, amely csak véges sok értéket vesz fel, egy olyan balról folytonos lépcsős függvény, amely a valószínűségi változó legkisebb értékénél kisebb, vagy egyenlő helyeken 0 értéket, a valószínűségi változó legnagyobb értékénél nagyobb helyeken 1 értéket vesz fel, továbbá minden  $x_i$  helyen  $p_i$  értéket ugrik.

Tehát egy olyan valószínűségi változó eloszlásfüggvénye, amely csak véges sok értéket vesz fel, egy olyan balról folytonos lépcsős függvény, amely a valószínűségi változó legkisebb értékénél kisebb, vagy egyenlő helyeken 0 értéket, a valószínűségi változó legnagyobb értékénél nagyobb helyeken 1 értéket vesz fel, továbbá minden  $x_i$  helyen  $p_i$  értéket ugrik.

A táblázatból kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}(\xi) = 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = 1.5$$

$$\mathbb{E}(\xi^2) = 0^2 \cdot \frac{1}{8} + 1^2 \cdot \frac{3}{8} + 2^2 \cdot \frac{3}{8} + 3^2 \cdot \frac{1}{8} = 3$$

$$\mathbb{D}^2(\xi) = \mathbb{E}(\xi^2) - [\mathbb{E}(\xi)]^2 = 3 - 1.5^2 = .75$$

# Példa

## Példa

Kockával dobunk. Számoljuk ki a dobott szám-mint valószínűségi változó - várható értékét és szórásnégyzetét.

## Példa

Kockával dobunk. Számoljuk ki a dobott szám-mint valószínűségi változó - várható értékét és szórásnégyzetét.

Mo.: Jelölje  $\xi$  a dobott számot.

## Példa

Kockával dobunk. Számoljuk ki a dobott szám-mint valószínűségi változó - várható értékét és szórásnégyzetét.

Mo.: Jelölje  $\xi$  a dobott számot.

A  $\xi$  eloszlása:

$x_j$	1	2	3	4	5	6
$p_j$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

## Példa

Kockával dobunk. Számoljuk ki a dobott szám-mint valószínűségi változó - várható értékét és szórásnégyzetét.

Mo.: Jelölje  $\xi$  a dobott számot.

A  $\xi$  eloszlása:

$x_i$	1	2	3	4	5	6
$p_i$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

A így kapjuk, hogy:

## Példa

Kockával dobunk. Számoljuk ki a dobott szám-mint valószínűségi változó - várható értékét és szórásnégyzetét.

Mo.: Jelölje  $\xi$  a dobott számot.

A  $\xi$  eloszlása:

$x_i$	1	2	3	4	5	6
$p_i$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

A így kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\xi) &= 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = \\ &= \frac{1}{6}(1 + 2 + \dots + 6) = \frac{7}{2} = 3.5,\end{aligned}$$

## Példa

Kockával dobunk. Számoljuk ki a dobott szám-mint valószínűségi változó - várható értékét és szórásnégyzetét.

Mo.: Jelölje  $\xi$  a dobott számot.

A  $\xi$  eloszlása:

$x_i$	1	2	3	4	5	6
$p_i$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

A így kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\xi) &= 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = \\ &= \frac{1}{6}(1 + 2 + \dots + 6) = \frac{7}{2} = 3.5,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\xi^2) &= 1^2 \cdot \frac{1}{6} + 2^2 \cdot \frac{1}{6} + 3^2 \cdot \frac{1}{6} + 4^2 \cdot \frac{1}{6} + 5^2 \cdot \frac{1}{6} + 6^2 \cdot \frac{1}{6} = \\ &= \frac{1}{6}(1^2 + 2^2 + \dots + 6^2) = \frac{91}{6},\end{aligned}$$

## Példa

Kockával dobunk. Számoljuk ki a dobott szám-mint valószínűségi változó - várható értékét és szórásnégyzetét.

Mo.: Jelölje  $\xi$  a dobott számot.

A  $\xi$  eloszlása:

$x_i$	1	2	3	4	5	6
$p_i$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

A így kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\xi) &= 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = \\ &= \frac{1}{6}(1 + 2 + \dots + 6) = \frac{7}{2} = 3.5,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\xi^2) &= 1^2 \cdot \frac{1}{6} + 2^2 \cdot \frac{1}{6} + 3^2 \cdot \frac{1}{6} + 4^2 \cdot \frac{1}{6} + 5^2 \cdot \frac{1}{6} + 6^2 \cdot \frac{1}{6} = \\ &= \frac{1}{6}(1^2 + 2^2 + \dots + 6^2) = \frac{91}{6},\end{aligned}$$

$$\mathbb{D}^2(\xi) = \mathbb{E}(\xi^2) - [\mathbb{E}]^2 = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{35}{12} = 2.9167.$$

# Példa

## Példa

Száz dobókockával dobunk. Számoljuk ki a dobott számok összegének a várható értékét és szórásnégyzetét.

## Példa

Száz dobókockával dobunk. Számoljuk ki a dobott számok összegének a várható értékét és szórásnégyzetét.

Mo.: Jelölje  $\xi_i$  az egyes dobókockákkal dobott számokat  $i = 1, 2, \dots, 100$ ; illetve jelölje  $\xi$  a dobott számok összegét.

## Példa

Száz dobókockával dobunk. Számoljuk ki a dobott számok összegének a várható értékét és szórásnégyzetét.

Mo.: Jelölje  $\xi_i$  az egyes dobókockákkal dobott számokat  $i = 1, 2, \dots, 100$ ; illetve jelölje  $\xi$  a dobott számok összegét.

A várható érték additivitása alapján kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\xi) &= \mathbb{E}(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_{100}) = \\ &= \mathbb{E}(\xi_1) + \mathbb{E}(\xi_2) + \dots + \mathbb{E}(\xi_{100}) = 100 \cdot 3.5 = 350.\end{aligned}$$

## Példa

Száz dobókockával dobunk. Számoljuk ki a dobott számok összegének a várható értékét és szórásnégyzetét.

Mo.: Jelölje  $\xi_i$  az egyes dobókockákkal dobott számokat  $i = 1, 2, \dots, 100$ ; illetve jelölje  $\xi$  a dobott számok összegét.

A várható érték additivitása alapján kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\xi) &= \mathbb{E}(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_{100}) = \\ &= \mathbb{E}(\xi_1) + \mathbb{E}(\xi_2) + \dots + \mathbb{E}(\xi_{100}) = 100 \cdot 3.5 = 350.\end{aligned}$$

Mivel a  $\xi_i$  valószínűségi változók függetlenek, így

$$\begin{aligned}\mathbb{D}^2(\xi) &= \mathbb{D}^2(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_{100}) = \\ &= \mathbb{D}^2(\xi_1) + \mathbb{D}^2(\xi_2) + \dots + \mathbb{D}^2(\xi_{100}) = 100 \cdot \frac{35}{12} = 291.6667.\end{aligned}$$

# 1. Feladat.

**1. Feladat.** *Egy lezser hallgató maximum négyszer jöhet el vizsgázni, és minden vizsgán 0.25 valószínűséggel megy át. Hányszor vizsgázik átlagban egy lezser hallgató?*

# 1. Megoldás.

**1. Megoldás.** Jelölje  $\xi$  a vizsgák számát és jelölje  $A$  azt az eseményt, hogy a lezser hallgató átmegy egy adott vizsgán. Ekkor  $\mathbb{P}(A) = 0.25$ . A  $\xi$  diszkrét valószínűségi változó eloszlása:

**1. Megoldás.** Jelölje  $\xi$  a vizsgák számát és jelölje  $A$  azt az eseményt, hogy a lezser hallgató átmegy egy adott vizsgán. Ekkor  $\mathbb{P}(A) = 0.25$ . A  $\xi$  diszkrét valószínűségi változó eloszlása:

$$\begin{aligned}x_1 &= 1, & p_1 &= 0.25, \\x_2 &= 2, & p_2 &= 0.75 \cdot 0.25, \\x_3 &= 3, & p_3 &= 0.75^2 \cdot 0.25, \\x_4 &= 4, & p_4 &= 0.75^3.\end{aligned}$$

**1. Megoldás.** Jelölje  $\xi$  a vizsgák számát és jelölje  $A$  azt az eseményt, hogy a lezser hallgató átmegy egy adott vizsgán. Ekkor  $\mathbb{P}(A) = 0.25$ . A  $\xi$  diszkrét valószínűségi változó eloszlása:

$$\begin{aligned}x_1 &= 1, & p_1 &= 0.25, \\x_2 &= 2, & p_2 &= 0.75 \cdot 0.25, \\x_3 &= 3, & p_3 &= 0.75^2 \cdot 0.25, \\x_4 &= 4, & p_4 &= 0.75^3.\end{aligned}$$

Így

$$\mathbb{E}(\xi) = 1 \cdot 0.25 + 2 \cdot 0.75 \cdot 0.25 + 3 \cdot 0.75^2 \cdot 0.25 + 4 \cdot 0.75^3 = \frac{175}{64} = 2.7344.$$

**2. Feladat.** *Egy játékban a játékos és a bankár is megpörgeti a rulettet. (A ruletten az 1, 2, ... , 7 számok vannak.) A játékos akkor nyer, ha nagyobb számot pörget, mint a bankár. A játékos nyérése esetén 1800 Ft nyereményt kap. Mennyit kellene a játékosnak minden pörgetése előtt befizetnie, hogy játékonként átlagosan 200 Ft haszna legyen a banknak?*

**2. Feladat.** *Egy játékban a játékos és a bankár is megpörgeti a rulettet. (A ruletten az 1, 2, ... , 7 számok vannak.) A játékos akkor nyer, ha nagyobb számot pörget, mint a bankár. A játékos nyérése esetén 1800 Ft nyereményt kap. Mennyit kellene a játékosnak minden pörgetése előtt befizetnie, hogy játékonként átlagosan 200 Ft haszna legyen a banknak?*

**2. Megoldás.**

**2. Feladat.** *Egy játékban a játékos és a bankár is megpörgeti a rulettet. (A ruletten az 1, 2, ... , 7 számok vannak.) A játékos akkor nyer, ha nagyobb számot pörget, mint a bankár. A játékos nyérése esetén 1800 Ft nyereményt kap. Mennyit kellene a játékosnak minden pörgetése előtt befizetnie, hogy játékonként átlagosan 200 Ft haszna legyen a banknak?*

**2. Megoldás.** *Jelölje  $J$  azt az eseményt, hogy a játékos nyer,  $B$  azt az eseményt, hogy a bank nyer.*

**2. Feladat.** *Egy játékban a játékos és a bankár is megpörgeti a rulettet. (A ruletten az 1, 2, ... , 7 számok vannak.) A játékos akkor nyer, ha nagyobb számot pörget, mint a bankár. A játékos nyerése esetén 1800 Ft nyereményt kap. Mennyit kellene a játékosnak minden pörgetése előtt befizetnie, hogy játékonként átlagosan 200 Ft haszna legyen a banknak?*

**2. Megoldás.** *Jelölje  $J$  azt az eseményt, hogy a játékos nyer,  $B$  azt az eseményt, hogy a bank nyer.*

$$\mathbb{P}(J) = \frac{7 \cdot 7 - 7}{7 \cdot 7} = \frac{7 \cdot 7 - 7}{2 \cdot 7 \cdot 7} = \frac{3}{7},$$

**2. Feladat.** *Egy játékban a játékos és a bankár is megpörgeti a rulettet. (A ruletten az 1, 2, ... , 7 számok vannak.) A játékos akkor nyer, ha nagyobb számot pörget, mint a bankár. A játékos nyerése esetén 1800 Ft nyereményt kap. Mennyit kellene a játékosnak minden pörgetése előtt befizetnie, hogy játékonként átlagosan 200 Ft haszna legyen a banknak?*

**2. Megoldás.** *Jelölje  $J$  azt az eseményt, hogy a játékos nyer,  $B$  azt az eseményt, hogy a bank nyer.*

$$\mathbb{P}(J) = \frac{7 \cdot 7 - 7}{7 \cdot 7} = \frac{7 \cdot 7 - 7}{2 \cdot 7 \cdot 7} = \frac{3}{7},$$

$$\mathbb{P}(B) = 1 - \frac{3}{7} = \frac{4}{7}.$$

*$x$  forintot kell a játékosnak befizetnie minden pörgetés előtt.*

**2. Feladat.** *Egy játékban a játékos és a bankár is megpörgeti a rulettet. (A ruletten az 1, 2, ... , 7 számok vannak.) A játékos akkor nyer, ha nagyobb számot pörget, mint a bankár. A játékos nyerése esetén 1800 Ft nyereményt kap. Mennyit kellene a játékosnak minden pörgetése előtt befizetnie, hogy játékonként átlagosan 200 Ft haszna legyen a banknak?*

**2. Megoldás.** *Jelölje  $J$  azt az eseményt, hogy a játékos nyer,  $B$  azt az eseményt, hogy a bank nyer.*

$$\mathbb{P}(J) = \frac{7 \cdot 7 - 7}{7 \cdot 7} = \frac{7 \cdot 7 - 7}{2 \cdot 7 \cdot 7} = \frac{3}{7},$$
$$\mathbb{P}(B) = 1 - \frac{3}{7} = \frac{4}{7}.$$

*$x$  forintot kell a játékosnak befizetnie minden pörgetés előtt. A  $\xi$  valószínűségi változó jelöli a bank nyereségét.*

A  $\xi$  eloszlása:

$x_j$	$x$	$x - 1800$
$p_j$	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{7}$

A  $\xi$  eloszlása:

$x_i$	$x$	$x - 1800$
$p_i$	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{7}$

Így  $200 = \mathbb{E}(\xi) = \frac{4}{7}x + \frac{3}{7}(x - 1800)$ , amiből kapjuk, hogy

$$1400 = 4x + 3(x - 1800), \quad x = \frac{1400 + 5400}{7} = 971.4286.$$

Vége az IV. órának

## V. óra

# Nevezetes diszkrét eloszlások, Folytonos valószínűségi változók

# Nevezetes diszkrét eloszlások

Az alábbi nevezetes diszkrét valószínűségi változókkal fogunk megismerkedni:

# Nevezetes diszkrét eloszlások

Az alábbi nevezetes diszkrét valószínűségi változókkal fogunk megismerkedni:

- 1 Bernoulli;

# Nevezetes diszkrét eloszlások

Az alábbi nevezetes diszkrét valószínűségi változókkal fogunk megismerkedni:

- 1 Bernoulli;
- 2 Binomiális;

# Nevezetes diszkrét eloszlások

Az alábbi nevezetes diszkrét valószínűségi változókkal fogunk megismerkedni:

- 1 Bernoulli;
- 2 Binomiális;
- 3 Hipergeometrikus;

# Nevezetes diszkrét eloszlások

Az alábbi nevezetes diszkrét valószínűségi változókkal fogunk megismerkedni:

- 1 Bernoulli;
- 2 Binomiális;
- 3 Hipergeometrikus;
- 4 Geometriai;

# Nevezetes diszkrét eloszlások

Az alábbi nevezetes diszkrét valószínűségi változókkal fogunk megismerkedni:

- 1 Bernoulli;
- 2 Binomiális;
- 3 Hipergeometrikus;
- 4 Geometriai;
- 5 Poisson.

# 1. A Bernoulli eloszlás

# A Bernoulli eloszlás

## A Bernoulli eloszlás

Feldobunk egy érmét. Jelölje  $F$  azt az eseményt, hogy fejet dobunk,  $I$  azt, hogy írást. Legyen

$$\mathbb{P}(F) = p, \quad \mathbb{P}(I) = 1 - p \doteq q.$$

## A Bernoulli eloszlás

Feldobunk egy érmét. Jelölje  $F$  azt az eseményt, hogy fejet dobunk,  $I$  azt, hogy írást. Legyen

$$\mathbb{P}(F) = p, \quad \mathbb{P}(I) = 1 - p \doteq q.$$

Jelölje  $\xi$  a fejdobások számát. Ekkor azt mondjuk hogy  $\xi$  egy  $p$  paraméterű **Bernoulli eloszlású valószínűségi változó**.

## A Bernoulli eloszlás

Feldobunk egy érmét. Jelölje  $F$  azt az eseményt, hogy fejet dobunk,  $I$  azt, hogy írást. Legyen

$$\mathbb{P}(F) = p, \quad \mathbb{P}(I) = 1 - p \doteq q.$$

Jelölje  $\xi$  a fejdobások számát. Ekkor azt mondjuk hogy  $\xi$  egy  $p$  paraméterű Bernoulli eloszlású valószínűségi változó.

A  $\xi$  eloszlása:

$x_i$	0	1
$p_i$	$q$	$p$

## A Bernoulli eloszlás

Feldobunk egy érmét. Jelölje  $F$  azt az eseményt, hogy fejet dobunk,  $I$  azt, hogy írást. Legyen

$$\mathbb{P}(F) = p, \quad \mathbb{P}(I) = 1 - p \doteq q.$$

Jelölje  $\xi$  a fejdobások számát. Ekkor azt mondjuk hogy  $\xi$  egy  $p$  paraméterű Bernoulli eloszlású valószínűségi változó.

A  $\xi$  eloszlása:

$x_i$	0	1
$p_i$	$q$	$p$

Ekkor a  $\xi$  várható értékét és szórásnégyzetét

$$\mathbb{E}(\xi) = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p,$$

$$\mathbb{E}(\xi^2) = 0^2 \cdot q + 1^2 \cdot p = p,$$

$$\mathbb{D}^2(\xi) = \mathbb{E}(\xi^2) - [\mathbb{E}(\xi)]^2 = p - p^2 = p(1 - p) = pq$$

módon számolható.

## 2. A binomiális eloszlás

# A binomiális eloszlás

# A binomiális eloszlás

Jelölje  $\xi$  egy  $p$  valószínűségű  $A$  esemény bekövetkezéseinek a számát  $n$  független kísérlet esetén.

## A binomiális eloszlás

Jelölje  $\xi$  egy  $p$  valószínűségű  $A$  esemény bekövetkezéseinek a számát  $n$  független kísérlet esetén.

Ekkor azt mondjuk, hogy  $\xi$  **binomiális eloszlású**  $n$  és  $p$  **paraméterekkel**, amit  $\xi \sim B(n, p)$  módon jelölünk.

## A binomiális eloszlás

Jelölje  $\xi$  egy  $p$  valószínűségű  $A$  esemény bekövetkezéseinek a számát  $n$  független kísérlet esetén.

Ekkor azt mondjuk, hogy  $\xi$  **binomiális eloszlású**  $n$  és  $p$  **paraméterekkel**, amit  $\xi \sim B(n, p)$  módon jelölünk.

Ekkor a  $\xi$  eloszlása

## A binomiális eloszlás

Jelölje  $\xi$  egy  $p$  valószínűségű  $A$  esemény bekövetkezéseinek a számát  $n$  független kísérlet esetén.

Ekkor azt mondjuk, hogy  $\xi$  **binomiális eloszlású**  $n$  és  $p$  **paraméterekkel**, amit  $\xi \sim B(n, p)$  módon jelölünk.

Ekkor a  $\xi$  eloszlása

$$p_k = \mathbb{P}(\xi = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \quad (k = 0, 1, \dots, n).$$

## A binomiális eloszlás

Jelölje  $\xi$  egy  $p$  valószínűségű  $A$  esemény bekövetkezéseinek a számát  $n$  független kísérlet esetén.

Ekkor azt mondjuk, hogy  $\xi$  **binomiális eloszlású**  $n$  és  $p$  **paraméterekkel**, amit  $\xi \sim B(n, p)$  módon jelölünk.

Ekkor a  $\xi$  eloszlása

$$p_k = \mathbb{P}(\xi = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \quad (k = 0, 1, \dots, n).$$

A  $\xi$  várható értéke és szórásnégyzete

## A binomiális eloszlás

Jelölje  $\xi$  egy  $p$  valószínűségű  $A$  esemény bekövetkezéseinek a számát  $n$  független kísérlet esetén.

Ekkor azt mondjuk, hogy  $\xi$  **binomiális eloszlású**  $n$  és  $p$  **paraméterekkel**, amit  $\xi \sim B(n, p)$  módon jelölünk.

Ekkor a  $\xi$  eloszlása

$$p_k = \mathbb{P}(\xi = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \quad (k = 0, 1, \dots, n).$$

A  $\xi$  várható értéke és szórásnégyzete

$$\mathbb{E}(\xi) = np, \quad \mathbb{D}^2(\xi) = npq.$$

- A fenti képletek úgy jegyezhetőek meg könnyen, ha arra gondolunk, hogy a  $\xi$  valószínűségi változó  $n$  darab független valószínűségi változó összege, azaz

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n.$$

A  $\xi_1$  azt figyeli, hogy az  $A$  esemény az első kísérlet során bekövetkezik-e, vagy sem; a  $\xi_2$  a második kísérletet figyeli; és így tovább. A  $\xi_i$  valószínűségi változók  $p$  paraméterű Bernoulli eloszlású változó minden  $i = 1, 2, \dots, n$  esetén. A  $\xi$  várható értékének a kiszámítása során tudjuk alkalmazni a várható érték additivitását; illetve, mivel a  $\xi_i$  valószínűségi változók függetlenek, így a szórásnégyzetek is összeadódnak.

- A fenti képletek úgy jegyezhetőek meg könnyen, ha arra gondolunk, hogy a  $\xi$  valószínűségi változó  $n$  darab független valószínűségi változó összege, azaz

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n.$$

A  $\xi_1$  azt figyeli, hogy az  $A$  esemény az első kísérlet során bekövetkezik-e, vagy sem; a  $\xi_2$  a második kísérletet figyeli; és így tovább. A  $\xi_i$  valószínűségi változók  $p$  paraméterű Bernoulli eloszlású változó minden  $i = 1, 2, \dots, n$  esetén. A  $\xi$  várható értékének a kiszámítása során tudjuk alkalmazni a várható érték additivitását; illetve, mivel a  $\xi_i$  valószínűségi változók függetlenek, így a szórásnégyzetek is összeadódnak.

- A golyóhúzás urnából visszatevéssel, ha  $\xi$  jelöli a kihúzott piros golyók számát binomiális eloszlású  $n$  és  $p = \frac{s}{N}$  paraméterekkel, ahol  $N$  jelöli a golyók számát,  $s$  a piros golyók számát,  $N - s$  a fehér golyók számát,  $n$  golyót húzunk, amelyek között  $k$  piros golyó van.

Legyen  $p \in (0, 1)$ , és  $q \doteq 1 - p$ . A binomiális tétel alapján kapjuk, hogy

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = (p + q)^n = 1,$$

a szumma jel mögött éppen egy  $\xi \sim B(n, p)$  valószínűségi változó eloszlásának a tagjai állnak. Innen származik az eloszlás neve.

### 3. A hipergeometrikus eloszlás

## A hipergeometrikus eloszlás

Golyót húzunk urnából visszatevés nélkül. Jelölje  $\xi$  jelöli a kihúzott piros golyók számát. Ekkor azt mondjuk, hogy a  $\xi$  valószínűségi változó **hipergeometrikus eloszlású**.

# A hipergeometrikus eloszlás

Golyót húzunk urnából visszatevés nélkül. Jelölje  $\xi$  jelöli a kihúzott piros golyók számát. Ekkor azt mondjuk, hogy a  $\xi$  valószínűségi változó **hipergeometrikus eloszlású**.

A hipergeometrikus eloszlás a következő paramétereiktől függ:

# A hipergeometrikus eloszlás

Golyót húzunk urnából visszatevés nélkül. Jelölje  $\xi$  jelöli a kihúzott piros golyók számát. Ekkor azt mondjuk, hogy a  $\xi$  valószínűségi változó **hipergeometrikus eloszlású**.

A hipergeometrikus eloszlás a következő paramétereiktől függ:

- $N$  jelöli a golyók számát;

# A hipergeometrikus eloszlás

Golyót húzunk urnából visszatevés nélkül. Jelölje  $\xi$  jelöli a kihúzott piros golyók számát. Ekkor azt mondjuk, hogy a  $\xi$  valószínűségi változó **hipergeometrikus eloszlású**.

A hipergeometrikus eloszlás a következő paramétereiktől függ:

- $N$  jelöli a golyók számát;
- $s$  a piros golyók számát;

# A hipergeometrikus eloszlás

Golyót húzunk urnából visszatevés nélkül. Jelölje  $\xi$  jelöli a kihúzott piros golyók számát. Ekkor azt mondjuk, hogy a  $\xi$  valószínűségi változó **hipergeometrikus eloszlású**.

A hipergeometrikus eloszlás a következő paramétereiktől függ:

- $N$  jelöli a golyók számát;
- $s$  a piros golyók számát;
- $N - s$  a fehér golyók számát;

## A hipergeometrikus eloszlás

Golyót húzunk urnából visszatevés nélkül. Jelölje  $\xi$  jelöli a kihúzott piros golyók számát. Ekkor azt mondjuk, hogy a  $\xi$  valószínűségi változó **hipergeometrikus eloszlású**.

A hipergeometrikus eloszlás a következő paramétereiktől függ:

- $N$  jelöli a golyók számát;
- $s$  a piros golyók számát;
- $N - s$  a fehér golyók számát;
- $n$  golyót húzunk;

# A hipergeometrikus eloszlás

Golyót húzunk urnából visszatevés nélkül. Jelölje  $\xi$  jelöli a kihúzott piros golyók számát. Ekkor azt mondjuk, hogy a  $\xi$  valószínűségi változó **hipergeometrikus eloszlású**.

A hipergeometrikus eloszlás a következő paramétereiktől függ:

- $N$  jelöli a golyók számát;
- $s$  a piros golyók számát;
- $N - s$  a fehér golyók számát;
- $n$  golyót húzunk;
- amelyek között  $k$  piros golyó van.

Ekkor  $(\max\{0, n - (N - s)\} \leq k \leq \min\{s, n\})$ .

Ekkor  $(\max\{0, n - (N - s)\} \leq k \leq \min\{s, n\})$ .

A  $\xi$  valószínűségi változó eloszlása:

Ekkor  $(\max\{0, n - (N - s)\} \leq k \leq \min\{s, n\})$ .

A  $\xi$  valószínűségi változó eloszlása:

$$p_k = \mathbb{P}(\xi = k) = \frac{\binom{s}{k} \binom{N-s}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

Ekkor  $(\max\{0, n - (N - s)\} \leq k \leq \min\{s, n\})$ .

A  $\xi$  valószínűségi változó eloszlása:

$$p_k = \mathbb{P}(\xi = k) = \frac{\binom{s}{k} \binom{N-s}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

A  $\xi$  várható értéke és szórásnégyzete

Ekkor  $(\max\{0, n - (N - s)\} \leq k \leq \min\{s, n\})$ .

A  $\xi$  valószínűségi változó eloszlása:

$$p_k = \mathbb{P}(\xi = k) = \frac{\binom{s}{k} \binom{N-s}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

A  $\xi$  várható értéke és szórásnégyzete

$$\mathbb{E}(\xi) = n \frac{s}{N}, \quad \mathbb{D}^2(\xi) = n \frac{N-n}{N-1} \frac{s}{N} \left(1 - \frac{s}{N}\right).$$

## 4. A geometriai eloszlás

# A geometriai eloszlás

## A geometriai eloszlás

Független kísérletek sorozatát végezzük. Jelölje  $\xi$  azt a számot, hogy egy  $p$  valószínűségű  $A$  esemény hányadik kísérlet során következik be először. Ekkor  $\xi$ -t  $p$  **paraméterű geometriai eloszlás**nak nevezzük.

## A geometriai eloszlás

Független kísérletek sorozatát végezzük. Jelölje  $\xi$  azt a számot, hogy egy  $p$  valószínűségű  $A$  esemény hányadik kísérlet során következik be először. Ekkor  $\xi$ -t  $p$  **paraméterű geometriai eloszlásnak** nevezzük.

A  $\xi$  valószínűségi változó eloszlása:

## A geometriai eloszlás

Független kísérletek sorozatát végezzük. Jelölje  $\xi$  azt a számot, hogy egy  $p$  valószínűségű  $A$  esemény hányadik kísérlet során következik be először. Ekkor  $\xi$ -t  $p$  **paraméterű geometriai eloszlásnak** nevezzük.

A  $\xi$  valószínűségi változó eloszlása:

$$p_k = \mathbb{P}(\xi = k) = pq^{k-1} \quad (k \in \mathbb{Z}_+).$$

## A geometriai eloszlás

Független kísérletek sorozatát végezzük. Jelölje  $\xi$  azt a számot, hogy egy  $p$  valószínűségű  $A$  esemény hányadik kísérlet során következik be először. Ekkor  $\xi$ -t  $p$  **paraméterű geometriai eloszlás**nak nevezzük.

A  $\xi$  valószínűségi változó eloszlása:

$$p_k = \mathbb{P}(\xi = k) = pq^{k-1} \quad (k \in \mathbb{Z}_+).$$

A  $\xi$  várható értéke és szórásnégyzete

## A geometriai eloszlás

Független kísérletek sorozatát végezzük. Jelölje  $\xi$  azt a számot, hogy egy  $p$  valószínűségű  $A$  esemény hányadik kísérlet során következik be először. Ekkor  $\xi$ -t  $p$  paraméterű **geometriai eloszlásnak** nevezzük.

A  $\xi$  valószínűségi változó eloszlása:

$$p_k = \mathbb{P}(\xi = k) = pq^{k-1} \quad (k \in \mathbb{Z}_+).$$

A  $\xi$  várható értéke és szórásnégyzete

$$\mathbb{E}(\xi) = \frac{1}{p}, \quad \mathbb{D}^2(\xi) = \frac{q}{p^2}.$$

Legyen  $p \in (0, 1)$ , és  $q \doteq 1 - p$ . A mértani sor összegképletére vonatkozó összefüggés alapján kapjuk, hogy

$$\sum_{k=1}^{\infty} pq^{k-1} = \frac{p}{1-q} = 1.$$

A szumma jel mögött éppen egy  $p$  paraméterű geometriai eloszlás tagjai állnak. Innen származik az eloszlás neve.

## 5. A Poisson eloszlás

# A Poisson eloszlás

Legyen  $\lambda > 0$  egy rögzített valós szám. Azt mondjuk, hogy a  $\xi$  valószínűségi változó **Poisson eloszlású**  $\lambda$  **paraméterrel**, ha eloszlása:

$$p_k = \mathbb{P}(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

A  $\xi$  várható értéke és szórásnégyzete

$$\mathbb{E}(\xi) = \mathbb{D}^2(\xi) = \lambda.$$

## Az exponenciális függvény Taylor sora

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Az exponenciális függvény Taylor sora

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Írjuk  $x$  helyére  $\lambda$ -t, mindkét oldalt osszuk el  $e^\lambda$ -val, majd az  $e^{-\lambda}$ -t vigyük be a szumma jel mögé. Így kapjuk, hogy

Az exponenciális függvény Taylor sora

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Írjuk  $x$  helyére  $\lambda$ -t, mindkét oldalt osszuk el  $e^\lambda$ -val, majd az  $e^{-\lambda}$ -t vigyük be a szumma jel mögé. Így kapjuk, hogy

$$1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Az exponenciális függvény Taylor sora

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Írjuk  $x$  helyére  $\lambda$ -t, mindkét oldalt osszuk el  $e^\lambda$ -val, majd az  $e^{-\lambda}$ -t vigyük be a szumma jel mögé. Így kapjuk, hogy

$$1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Érdemes észrevenni, hogy a szumma jel mögött éppen egy  $\lambda$  paraméterű Poisson eloszlás tagjai állnak.

Az exponenciális függvény Taylor sora

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Írjuk  $x$  helyére  $\lambda$ -t, mindkét oldalt osszuk el  $e^\lambda$ -val, majd az  $e^{-\lambda}$ -t vigyük be a szumma jel mögé. Így kapjuk, hogy

$$1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Érdemes észrevenni, hogy a szumma jel mögött éppen egy  $\lambda$  paraméterű Poisson eloszlás tagjai állnak.

Ebből már lehet sejteni, hogy a Poisson eloszlásnak lesz köze az exponenciális eloszláshoz. A két eloszlás közötti kapcsolatot Poisson folyamatok című részben fogjuk leírni.

Az exponenciális függvény Taylor sora

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Írjuk  $x$  helyére  $\lambda$ -t, mindkét oldalt osszuk el  $e^\lambda$ -val, majd az  $e^{-\lambda}$ -t vigyük be a szumma jel mögé. Így kapjuk, hogy

$$1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Érdemes észrevenni, hogy a szumma jel mögött éppen egy  $\lambda$  paraméterű Poisson eloszlás tagjai állnak.

Ebből már lehet sejteni, hogy a Poisson eloszlásnak lesz köze az exponenciális eloszláshoz. A két eloszlás közötti kapcsolatot Poisson folyamatok című részben fogjuk leírni.

A Poisson eloszlás megkapható a binomiálisból megfelelő határátmenettel.

A Poisson eloszlás a nevét felfedezőjéről **Siméon Denis Poisson**ról kapta (Recherches sur la probabilité des jugements en matières criminelles et matière civile). Az eloszlás első közismert alkalmazása a porosz hadseregben lórúgástól meghalt katonák számának leírása volt (Ladislaus von Bortkiewicz: Das Gesetz der kleinen Zahlen („A kis számok törvénye”), 1898)

**1. Feladat.** *Egy dobozban van 10 golyó, 5 piros és 5 fehér. Kihúzunk 5-öt visszatevéssel. Mennyi a valószínűsége, hogy a kihúzott golyók között*

- a. pontosan 2 piros van;*
- b. legalább 2 piros van;*
- c. legfeljebb 2 piros van.*

# 1. Megoldás.

**1. Megoldás.** Jelölje  $\xi$  a kihúzott piros golyók számát.

$\xi \sim B(n = 5, p = \frac{1}{2})$ . Ekkor

**1. Megoldás.** Jelölje  $\xi$  a kihúzott piros golyók számát.

$\xi \sim B(n = 5, p = \frac{1}{2})$ . Ekkor

**a.** A keresett valószínűség:

**1. Megoldás.** Jelölje  $\xi$  a kihúzott piros golyók számát.

$\xi \sim B(n = 5, p = \frac{1}{2})$ . Ekkor

**a.** A keresett valószínűség:

$$\mathbb{P}(\xi = 2) = \binom{5}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \binom{5}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 0.3125.$$

b. A keresett valószínűség (a véges additivitás alapján):

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\xi \geq 2) &= \mathbb{P}((\xi = 2) + (\xi = 3) + (\xi = 4) + (\xi = 5)) = \\ &= \mathbb{P}(\xi = 2) + \mathbb{P}(\xi = 3) + \mathbb{P}(\xi = 4) + \mathbb{P}(\xi = 5) = \\ &= p_2 + p_3 + p_4 + p_5.\end{aligned}$$

b. A keresett valószínűség (a véges additivitás alapján):

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\xi \geq 2) &= \mathbb{P}((\xi = 2) + (\xi = 3) + (\xi = 4) + (\xi = 5)) = \\ &= \mathbb{P}(\xi = 2) + \mathbb{P}(\xi = 3) + \mathbb{P}(\xi = 4) + \mathbb{P}(\xi = 5) = \\ &= p_2 + p_3 + p_4 + p_5.\end{aligned}$$

Azonban tudjuk, hogy  $p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = 1$ , így egyszerűbb úgy számolni, hogy

b. A keresett valószínűség (a véges additivitás alapján):

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\xi \geq 2) &= \mathbb{P}((\xi = 2) + (\xi = 3) + (\xi = 4) + (\xi = 5)) = \\ &= \mathbb{P}(\xi = 2) + \mathbb{P}(\xi = 3) + \mathbb{P}(\xi = 4) + \mathbb{P}(\xi = 5) = \\ &= p_2 + p_3 + p_4 + p_5.\end{aligned}$$

Azonban tudjuk, hogy  $p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = 1$ , így egyszerűbb úgy számolni, hogy

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\xi \geq 2) &= 1 - (p_0 + p_1) = \\ &= 1 - \left( \binom{5}{0} \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^{10} + \binom{5}{1} \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^9 \right) = \\ &= 1 - \frac{1 + 5}{2^{10}} = 1 - \frac{6}{2^{10}} = 0.9941.\end{aligned}$$

b. A keresett valószínűség (a véges additivitás alapján):

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\xi \geq 2) &= \mathbb{P}((\xi = 2) + (\xi = 3) + (\xi = 4) + (\xi = 5)) = \\ &= \mathbb{P}(\xi = 2) + \mathbb{P}(\xi = 3) + \mathbb{P}(\xi = 4) + \mathbb{P}(\xi = 5) = \\ &= p_2 + p_3 + p_4 + p_5.\end{aligned}$$

Azonban tudjuk, hogy  $p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = 1$ , így egyszerűbb úgy számolni, hogy

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\xi \geq 2) &= 1 - (p_0 + p_1) = \\ &= 1 - \left( \binom{5}{0} \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^{10} + \binom{5}{1} \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^9 \right) = \\ &= 1 - \frac{1 + 5}{2^{10}} = 1 - \frac{6}{2^{10}} = 0.9941.\end{aligned}$$

c. A keresett valószínűség:

b. A keresett valószínűség (a véges additivitás alapján):

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\xi \geq 2) &= \mathbb{P}((\xi = 2) + (\xi = 3) + (\xi = 4) + (\xi = 5)) = \\ &= \mathbb{P}(\xi = 2) + \mathbb{P}(\xi = 3) + \mathbb{P}(\xi = 4) + \mathbb{P}(\xi = 5) = \\ &= p_2 + p_3 + p_4 + p_5.\end{aligned}$$

Azonban tudjuk, hogy  $p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = 1$ , így egyszerűbb úgy számolni, hogy

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\xi \geq 2) &= 1 - (p_0 + p_1) = \\ &= 1 - \left( \binom{5}{0} \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^{10} + \binom{5}{1} \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^9 \right) = \\ &= 1 - \frac{1 + 5}{2^{10}} = 1 - \frac{6}{2^{10}} = 0.9941.\end{aligned}$$

c. A keresett valószínűség:

$$\mathbb{P}(\xi \leq 2) = p_0 + p_1 + p_2 = \frac{1 + 5 + 10}{2^5} = \frac{16}{2^5} = \frac{1}{2} = 0.5.$$

**2. Feladat.** *Egy szabályos érmét feldobunk 5-ször. Mennyi a valószínűsége, hogy a fejdobások száma*

- a. pontosan 2;*
- b. legalább 2;*
- c. legfeljebb 2.*

## 2. Megoldás.

2. Megoldás. *Lásd előző feladat.*

**3. Feladat.** *Egy dobozban van 10 golyó, 5 piros és 5 fehér. Kihúzunk 5-öt visszatevés nélkül. Mennyi a valószínűsége, hogy a kihúzott golyók között*

- a. pontosan 2 piros van;*
- b. legalább 2 piros van;*
- c. legfeljebb 2 piros van.*

### 3. Megoldás.

**3. Megoldás.** Jelölje  $\xi$  a kihúzott piros golyók számát. Ekkor  $\xi$  hipergeometrikus eloszlású  $N = 10$ ,  $s = N - s = 5$ ,  $n = 5$  paraméterekkel.

**3. Megoldás.** Jelölje  $\xi$  a kihúzott piros golyók számát. Ekkor  $\xi$  hipergeometrikus eloszlású  $N = 10$ ,  $s = N - s = 5$ ,  $n = 5$  paraméterekkel.

a. A keresett valószínűség:

$$\mathbb{P}(\xi = 2) = \frac{\binom{5}{2} \binom{5}{3}}{\binom{10}{5}} = \frac{25}{63} = 0.3968.$$

**3. Megoldás.** Jelölje  $\xi$  a kihúzott piros golyók számát. Ekkor  $\xi$  hipergeometrikus eloszlású  $N = 10$ ,  $s = 5$ ,  $n = 5$  paraméterekkel.

**a.** A keresett valószínűség:

$$\mathbb{P}(\xi = 2) = \frac{\binom{5}{2} \binom{5}{3}}{\binom{10}{5}} = \frac{25}{63} = 0.3968.$$

**b.** A keresett valószínűség:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\xi \geq 2) &= 1 - \mathbb{P}(\xi < 2) = 1 - (p_0 + p_1) = \\ &= 1 - \left( \frac{\binom{5}{0} \binom{5}{5}}{\binom{10}{5}} + \frac{\binom{5}{1} \binom{5}{4}}{\binom{10}{5}} \right) = 1 - \frac{1 + 25}{\binom{10}{5}} = \frac{113}{126} = 0.8968. \end{aligned}$$

**3. Megoldás.** Jelölje  $\xi$  a kihúzott piros golyók számát. Ekkor  $\xi$  hipergeometrikus eloszlású  $N = 10$ ,  $s = N - s = 5$ ,  $n = 5$  paraméterekkel.

a. A keresett valószínűség:

$$\mathbb{P}(\xi = 2) = \frac{\binom{5}{2} \binom{5}{3}}{\binom{10}{5}} = \frac{25}{63} = 0.3968.$$

b. A keresett valószínűség:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\xi \geq 2) &= 1 - \mathbb{P}(\xi < 2) = 1 - (p_0 + p_1) = \\ &= 1 - \left( \frac{\binom{5}{0} \binom{5}{5}}{\binom{10}{5}} + \frac{\binom{5}{1} \binom{5}{4}}{\binom{10}{5}} \right) = 1 - \frac{1 + 25}{\binom{10}{5}} = \frac{113}{126} = 0.8968. \end{aligned}$$

c. A keresett valószínűség:

$$\mathbb{P}(\xi \leq 2) = p_0 + p_1 + p_2 = \frac{\binom{5}{0} \binom{5}{5} + \binom{5}{1} \binom{5}{4} + \binom{5}{2} \binom{5}{3}}{\binom{10}{5}} = 0.5.$$

**4. Feladat.** *Egy kilogramm kalácsban átlag 52 szem mazsola van. Az 5 dekás szeletekben a mazsolák száma Poisson-eloszlást követ. Legalább hány szeletet kell vennünk, hogy már legalább 0.92 legyen annak a valószínűsége, hogy lesz közöttük mazsola nélküli szelet?*

## 4. Megoldás.

#### 4. Megoldás. *A megoldás főbb lépései:*

#### 4. Megoldás. *A megoldás főbb lépései:*

- *Jelölje  $\xi$  az 5 dekás szeletben lévő mazsolák számát.*

#### 4. Megoldás. *A megoldás főbb lépései:*

- *Jelölje  $\xi$  az 5 dekás szeletben lévő mazsolák számát.*
- *Mivel 100 dkg kalácsban 52 szem mazsola van, így 5 dkg kalácsban  $\frac{5 \cdot 52}{100} = 2.6$  mazsola van. Így  $\xi \sim \text{Poiss}(\lambda = 2.6)$ .*

#### 4. Megoldás. A megoldás főbb lépései:

- Jelölje  $\xi$  az 5 dekás szeletben lévő mazsolák számát.
- Mivel 100 dkg kalácsban 52 szem mazsola van, így 5 dkg kalácsban  $\frac{5 \cdot 52}{100} = 2.6$  mazsola van. Így  $\xi \sim \text{Poiss}(\lambda = 2.6)$ .
- Legyen  $p_0 \doteq \mathbb{P}(\xi = 0)$ . Ekkor  $p_0 = e^{-2.6}$ .

#### 4. Megoldás. A megoldás főbb lépései:

- Jelölje  $\xi$  az 5 dekás szeletben lévő mazsolák számát.
- Mivel 100 dkg kalácsban 52 szem mazsola van, így 5 dkg kalácsban  $\frac{5 \cdot 52}{100} = 2.6$  mazsola van. Így  $\xi \sim \text{Poiss}(\lambda = 2.6)$ .
- Legyen  $p_0 \doteq \mathbb{P}(\xi = 0)$ . Ekkor  $p_0 = e^{-2.6}$ .
- Azt az  $n \in \mathbb{Z}_+$  számot keressük, amelyre  $1 - (1 - p_0)^n \geq 0.92$ .

#### 4. Megoldás. A megoldás főbb lépései:

- Jelölje  $\xi$  az 5 dekás szeletben lévő mazsolák számát.
- Mivel 100 dkg kalácsban 52 szem mazsola van, így 5 dkg kalácsban  $\frac{5 \cdot 52}{100} = 2.6$  mazsola van. Így  $\xi \sim \text{Pois}(\lambda = 2.6)$ .
- Legyen  $p_0 \doteq \mathbb{P}(\xi = 0)$ . Ekkor  $p_0 = e^{-2.6}$ .
- Azt az  $n \in \mathbb{Z}_+$  számot keressük, amelyre  $1 - (1 - p_0)^n \geq 0.92$ .
- A kapott exponenciális egyenlőtlenséget megoldva kapjuk, hogy  $n \geq \frac{\ln(0.08)}{\ln(1 - e^{-2.6})} = 32.7266$ , tehát legalább 33 db süteményt kell kivenni.

# Folytonos valószínűségi változók

# Folytonos valószínűségi változók

# Folytonos valószínűségi változók

Egy  $\xi$  valószínűségi változót folytonosnak nevezünk, ha létezik hozzá olyan  $f_\xi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  függvény, amellyel

# Folytonos valószínűségi változók

Egy  $\xi$  valószínűségi változót folytonosnak nevezünk, ha létezik hozzá olyan  $f_\xi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  függvény, amellyel

$$\mathbb{F}_\xi(x) = \int_{-\infty}^x f_\xi(t) dt \quad (x \in \mathbb{R}).$$

# Folytonos valószínűségi változók

Egy  $\xi$  valószínűségi változót folytonosnak nevezünk, ha létezik hozzá olyan  $f_\xi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  függvény, amellyel

$$\mathbb{F}_\xi(x) = \int_{-\infty}^x f_\xi(t) dt \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Az  $f_\xi$  függvényt a  $\xi$  valószínűségi változó **sűrűségfüggvényének** nevezzük.

# A sűrűségfüggvény tulajdonságai

# A sűrűségfüggvény tulajdonságai

Ha az  $f_\xi$  függvény a  $\xi$  abszolút folytonos valószínűségi változó sűrűségfüggvénye, akkor az  $f_\xi$  függvény rendelkezik a következő tulajdonságokkal:

# A sűrűségfüggvény tulajdonságai

Ha az  $f_\xi$  függvény a  $\xi$  abszolút folytonos valószínűségi változó sűrűségfüggvénye, akkor az  $f_\xi$  függvény rendelkezik a következő tulajdonságokkal:

- 1 Nemnegatív, azaz  $f_\xi(x) \geq 0$  minden  $x \in \mathbb{R}$  esetén;

# A sűrűségfüggvény tulajdonságai

Ha az  $f_\xi$  függvény a  $\xi$  abszolút folytonos valószínűségi változó sűrűségfüggvénye, akkor az  $f_\xi$  függvény rendelkezik a következő tulajdonságokkal:

- 1 Nemnegatív, azaz  $f_\xi(x) \geq 0$  minden  $x \in \mathbb{R}$  esetén;
- 2  $\int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(t) dt = 1$ .

Érdemes megjegyezni, hogyha a  $\xi$  valószínűségi változót abszolút folytonos, akkor a sűrűségfüggvény az eloszlásfüggvényből

$$f_{\xi}(x) = \mathbb{F}'_{\xi}(x) \quad (x \in \mathbb{R})$$

módon számolható.

# Intervallumba esés valószínűsége

# Intervallumba esés valószínűsége

Ha  $\xi$  egy abszolút folytonos valószínűségi változó,  
 $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ , akkor

$$\mathbb{P}(\xi \in (a, b)) = \int_a^b f_\xi(x) dx = \mathbb{F}_\xi(b) - \mathbb{F}_\xi(a).$$

# Intervallumba esés valószínűsége

Ha  $\xi$  egy abszolút folytonos valószínűségi változó,  
 $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ , akkor

$$\mathbb{P}(\xi \in (a, b)) = \int_a^b f_\xi(x) dx = \mathbb{F}_\xi(b) - \mathbb{F}_\xi(a).$$

Ez a formula nem érzékeny arra, hogy az intervallum végpontjai hozzátartoznak, vagy nem tartoznak hozzá az intervallumhoz.

# Folytonos valószínűségi változó várható értéke

# Folytonos valószínűségi változó várható értéke

A  $\xi$  folytonos valószínűségi változó várható értékét

# Folytonos valószínűségi változó várható értéke

A  $\xi$  folytonos valószínűségi változó várható értékét

$$\mathbb{E}(\xi) \doteq \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{\xi}(x) dx$$

# Folytonos valószínűségi változó várható értéke

A  $\xi$  folytonos valószínűségi változó várható értékét

$$\mathbb{E}(\xi) \doteq \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{\xi}(x) dx$$

módon definiáljuk, amennyiben az  $\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f_{\xi}(x) dx$  integrál létezik és véges.

# A transzformáció formula

## A transzformációs formula

Folytonos valószínűségi változók esetén is érvényes a transzformációs formula, mely szerint az  $\mathbb{E}(g(\xi))$  várható érték

## A transzformációs formula

Folytonos valószínűségi változók esetén is érvényes a transzformációs formula, mely szerint az  $\mathbb{E}(g(\xi))$  várható érték

$$\mathbb{E}(g(\xi)) \doteq \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_{\xi}(x) dx$$

## A transzformációs formula

Folytonos valószínűségi változók esetén is érvényes a transzformációs formula, mely szerint az  $\mathbb{E}(g(\xi))$  várható érték

$$\mathbb{E}(g(\xi)) \doteq \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_{\xi}(x) dx$$

módon számolható, ha a  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  egy elég jó függvény, és az  $\mathbb{E}(g(\xi))$  várható érték létezik.

## A transzformációs formula

Folytonos valószínűségi változók esetén is érvényes a transzformációs formula, mely szerint az  $\mathbb{E}(g(\xi))$  várható érték

$$\mathbb{E}(g(\xi)) \doteq \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_{\xi}(x) dx$$

módon számolható, ha a  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  egy elég jó függvény, és az  $\mathbb{E}(g(\xi))$  várható érték létezik.

Például  $g(x) = x^2$  speciális esetben kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}(\xi^2) \doteq \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_{\xi}(x) dx.$$

## Valószínűségi változó mediánja

# A medián

Egy  $\xi$  valószínűségi változó **mediánjának** nevezünk egy olyan  $\mu$  számot, amelyre

$$\mathbb{P}(\xi < \mu) \leq \frac{1}{2}, \quad \mathbb{P}(\xi > \mu) \leq \frac{1}{2}.$$

# A medián tulajdonságai

## A medián tulajdonságai

Legyen  $\xi$  egy tetszőleges valószínűségi változó. Ekkor teljesülnek a következők.

# A medián tulajdonságai

Legyen  $\xi$  egy tetszőleges valószínűségi változó. Ekkor teljesülnek a következők.

- 1 A medián mindig létezik, de nem feltétlenül egyértelmű;

## A medián tulajdonságai

Legyen  $\xi$  egy tetszőleges valószínűségi változó. Ekkor teljesülnek a következők.

- 1 A medián mindig létezik, de nem feltétlenül egyértelmű;
- 2 Ha a  $\mu$  egy olyan szám, amelyre  $\mathbb{F}_\xi(\mu) = \frac{1}{2}$ , akkor a  $\mu$  egy mediánja a  $\xi$ -nek. Abszolút folytonos esetben a megfordítás is igaz;

## A medián tulajdonságai

Legyen  $\xi$  egy tetszőleges valószínűségi változó. Ekkor teljesülnek a következők.

- 1 A medián mindig létezik, de nem feltétlenül egyértelmű;
- 2 Ha a  $\mu$  egy olyan szám, amelyre  $\mathbb{F}_\xi(\mu) = \frac{1}{2}$ , akkor a  $\mu$  egy mediánja a  $\xi$ -nek. Abszolút folytonos esetben a megfordítás is igaz;
- 3 Ha  $\xi$  egy folytonos valószínűségi változó, akkor  $\mu$  pontosan akkor mediánja  $\xi$ -nek, ha  $\mu$ -tól jobbra és balra a sűrűségfüggvény alatti terület megegyezik.

## 5. Feladat.

**5. Feladat.** *A  $\xi$  folytonos valószínűségi változó eloszlásfüggvénye*

5. Feladat. A  $\xi$  folytonos valószínűségi változó eloszlásfüggvénye

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0; \\ A(3.4x^2 + 6.2x), & \text{ha } 0 < x \leq 6; \\ 1, & \text{ha } 6 < x. \end{cases}$$

5. Feladat. A  $\xi$  folytonos valószínűségi változó eloszlásfüggvénye

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0; \\ A(3.4x^2 + 6.2x), & \text{ha } 0 < x \leq 6; \\ 1, & \text{ha } 6 < x. \end{cases}$$

Határozza meg  $E(29\xi - 486)$  értékét!

## 5. Megoldás.

**5. Megoldás.** Mivel a  $\xi$  valószínűségi változó folytonos, így  $\mathbb{F}_\xi$  folytonos. Az  $\mathbb{F}_\xi$  szakaszonként folytonos, így csak azt kell biztosítani, hogy az  $\mathbb{F}_\xi$  ívei folytonosan csatlakozzanak. Ehhez elegendő, hogy

$$\mathbb{F}(6) = A(3.4 \cdot 6^2 + 6.2 \cdot 6) = 1,$$

ahonnan kapjuk, hogy  $A = \frac{1}{159.6}$ .

**5. Megoldás.** Mivel a  $\xi$  valószínűségi változó folytonos, így  $\mathbb{F}_\xi$  folytonos. Az  $\mathbb{F}_\xi$  szakaszonként folytonos, így csak azt kell biztosítani, hogy az  $\mathbb{F}_\xi$  ívei folytonosan csatlakozzanak. Ehhez elegendő, hogy

$$\mathbb{F}(6) = A(3.4 \cdot 6^2 + 6.2 \cdot 6) = 1,$$

ahonnan kapjuk, hogy  $A = \frac{1}{159.6}$ .

A  $\xi$  sűrűségfüggvénye:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{159,6}(6.8x + 6, 2), & \text{ha } x \in ]0, 6] \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

A  $\xi$  várható értéke:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\xi) &= \int_0^6 x \frac{1}{159.6} (6.8x + 6.2) dx = \frac{1}{159.6} \int_0^6 (6.8x^2 + 6.2x) dx = \\ &= \frac{1}{159.6} \left[ \frac{6.8x^3}{3} + \frac{6.2x^2}{2} \right]_{x=0}^{x=6} = \frac{1}{159.6} \left( \frac{6.8 \cdot 6^3}{3} + \frac{6.2 \cdot 6^2}{2} \right) = \frac{501}{133}.\end{aligned}$$

A  $\xi$  várható értéke:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\xi) &= \int_0^6 x \frac{1}{159.6} (6.8x + 6.2) dx = \frac{1}{159.6} \int_0^6 (6.8x^2 + 6.2x) dx = \\ &= \frac{1}{159.6} \left[ \frac{6.8x^3}{3} + \frac{6.2x^2}{2} \right]_{x=0}^{x=6} = \frac{1}{159.6} \left( \frac{6.8 \cdot 6^3}{3} + \frac{6.2 \cdot 6^2}{2} \right) = \frac{501}{133}.\end{aligned}$$

Így

$$\mathbb{E}(29\xi - 486) = 29\mathbb{E}(\xi) - 486 = 29 \cdot \frac{501}{133} - 486 = -376.4594.$$

## 6. Feladat.

**6. Feladat.** *A  $\xi$  valószínűségi változó sűrűségfüggvénye*

6. Feladat. A  $\xi$  valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} 1.4x^3, & \text{ha } 0 < x \leq B; \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

**6. Feladat.** A  $\xi$  valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} 1.4x^3, & \text{ha } 0 < x \leq B; \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Határozza meg  $P(\xi > E(\xi))$  valószínűségét!

## 7. Megoldás.

## 7. Megoldás.

*Először meghatározzuk a  $B$  értékét.*

## 7. Megoldás.

Először meghatározzuk a  $B$  értékét.

Mivel  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$  így kapjuk, hogy

$$1 = \int_0^B 1.4x^3 dx = 1.4 \int_0^B x^3 dx = 1.4 \left[ \frac{x^4}{4} \right]_{x=0}^{x=B} = 1.4 \frac{B^4}{4}.$$

$$\text{Így } B = \sqrt[4]{\frac{4}{1.4}}.$$

## 7. Megoldás.

Először meghatározzuk a  $B$  értékét.

Mivel  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$  így kapjuk, hogy

$$1 = \int_0^B 1.4x^3 dx = 1.4 \int_0^B x^3 dx = 1.4 \left[ \frac{x^4}{4} \right]_{x=0}^{x=B} = 1.4 \frac{B^4}{4}.$$

$$\text{Így } B = \sqrt[4]{\frac{4}{1.4}}.$$

A  $\xi$  várható értéke:

## 7. Megoldás.

Először meghatározzuk a  $B$  értékét.

Mivel  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$  így kapjuk, hogy

$$1 = \int_0^B 1.4x^3 dx = 1.4 \int_0^B x^3 dx = 1.4 \left[ \frac{x^4}{4} \right]_{x=0}^{x=B} = 1.4 \frac{B^4}{4}.$$

$$\text{Így } B = \sqrt[4]{\frac{4}{1.4}}.$$

A  $\xi$  várható értéke:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\xi) &= \int_0^B x \cdot 1.4x^3 dx = 1.4 \int_0^B x^4 dx = 1.4 \left[ \frac{x^5}{5} \right]_{x=0}^{x=\sqrt[4]{\frac{4}{1.4}}} = \\ &= \frac{1.4}{5} \left( \sqrt[4]{\frac{4}{1.4}} \right)^5 = \frac{4}{5} \sqrt[4]{\frac{4}{1.4}}. \end{aligned}$$

A keresett valószínűség:

A keresett valószínűség:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\xi > \mathbb{E}(\xi)) &= 1.4 \int_{\mathbb{E}(\xi)}^B x^3 dx = 1.4 \left[ \frac{x^4}{4} \right]_{x=\frac{4}{5} \sqrt[4]{\frac{4}{1.4}}}^{x=\sqrt[4]{\frac{4}{1.4}}} = \frac{1.4}{4} \left[ x^4 \right]_{x=\frac{4}{5} \sqrt[4]{\frac{4}{1.4}}}^{x=\sqrt[4]{\frac{4}{1.4}}} \\ &= \frac{1.4}{4} \left( \frac{4}{1.4} - \frac{4}{1.4} \left( \frac{4}{5} \right)^4 \right) = 1 - \left( \frac{4}{5} \right)^4 = \frac{369}{625} = 0.5904.\end{aligned}$$

Vége az V. órának

## VI. óra

# Nevezetes folytonos valószínűségi változók

# Nevezetes folytonos valószínűségi változók

Az alábbi nevezetes abszolút folytonos valószínűségi változókkal fogunk megismerkedni:

# Nevezetes folytonos valószínűségi változók

Az alábbi nevezetes abszolút folytonos valószínűségi változókkal fogunk megismerkedni:

- 1 Egyenletes;

# Nevezetes folytonos valószínűségi változók

Az alábbi nevezetes abszolút folytonos valószínűségi változókkal fogunk megismerkedni:

- 1 Egyenletes;
- 2 Exponenciális;

# Nevezetes folytonos valószínűségi változók

Az alábbi nevezetes abszolút folytonos valószínűségi változókkal fogunk megismerkedni:

- 1 Egyenletes;
- 2 Exponenciális;
- 3 Normális.

# 1. Az egyenletes eloszlás

# Az egyenletes eloszlás

## Az egyenletes eloszlás

Azt mondjuk, hogy a  $\xi$  valószínűségi változó **egyenletes eloszlású** az  $[a, b]$  intervallumon, ha a részintervallumba esés valószínűsége arányos a részintervallum hosszával.

## Az egyenletes eloszlás

Azt mondjuk, hogy a  $\xi$  valószínűségi változó **egyenletes eloszlású** az  $[a, b]$  intervallumon, ha a részintervallumba esés valószínűsége arányos a részintervallum hosszával.

Jele:  $\xi \sim U(a, b)$ .

## Az egyenletes eloszlás

Azt mondjuk, hogy a  $\xi$  valószínűségi változó **egyenletes eloszlású** az  $[a, b]$  intervallumon, ha a részintervallumba esés valószínűsége arányos a részintervallum hosszával.

Jele:  $\xi \sim U(a, b)$ .

A  $\xi$  valószínűségi változó **eloszlás**, illetve **sűrűségfüggvénye**:

$$\mathbb{F}_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq a; \\ \frac{x - a}{b - a}, & \text{ha } x \in [a, b]; \\ 1, & \text{ha } x \geq b \end{cases}$$

$$f_{\xi}(x) = \begin{cases} \frac{1}{b - a}, & \text{ha } x \in [a, b]; \\ 0, & \text{ha } x \notin [a, b]. \end{cases}$$

A  $\xi$  valószínűségi változó **várható értéke** és **szórásnégyzete**:

$$\mathbb{E}(\xi) = \frac{a+b}{2}, \quad \mathbb{D}^2(\xi) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

## 2. Az exponenciális eloszlás

# Az exponenciális eloszlás

# Az exponenciális eloszlás

Legyen  $\lambda > 0$ .

# Az exponenciális eloszlás

Legyen  $\lambda > 0$ .

Azt mondjuk, hogy a  $\xi$  valószínűségi változó  $\lambda$  **paraméterű exponenciális eloszlású** valószínűségi változó, ha **eloszlás**, illetve **sűrűségfüggvénye**:

$$\mathbb{F}_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0; \\ 1 - e^{-\lambda x}, & \text{ha } x > 0; \end{cases}$$

$$f_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0; \\ \lambda e^{-\lambda x}, & \text{ha } x > 0. \end{cases}$$

# Az exponenciális eloszlás

Legyen  $\lambda > 0$ .

Azt mondjuk, hogy a  $\xi$  valószínűségi változó  $\lambda$  **paraméterű exponenciális eloszlású** valószínűségi változó, ha **eloszlás**, illetve **sűrűségfüggvénye**:

$$F_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0; \\ 1 - e^{-\lambda x}, & \text{ha } x > 0; \end{cases}$$

$$f_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0; \\ \lambda e^{-\lambda x}, & \text{ha } x > 0. \end{cases}$$

Jele:  $\xi \sim \text{Exp}(\lambda)$ .

A  $\xi$  valószínűségi változó **várható értéke** és **szórásnégyzete**:

$$\mathbb{E}(\xi) = \frac{1}{\lambda}, \quad \mathbb{D}^2(\xi) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

# Tulajdonságok

# Tulajdonságok

Az exponenciális eloszlás rendelkezik a következő tulajdonságokkal:

# Tulajdonságok

Az exponenciális eloszlás rendelkezik a következő tulajdonságokkal:

- 1 **Örökifjú tulajdonság:** Ha  $\xi$  exponenciális eloszlású valószínűségi változó, akkor

$$\mathbb{P}(\xi < s + t | \xi > s) = \mathbb{P}(\xi < t) \quad (s, t > 0).$$

# Tulajdonságok

Az exponenciális eloszlás rendelkezik a következő tulajdonságokkal:

- 1 **Örökifjú tulajdonság:** Ha  $\xi$  exponenciális eloszlású valószínűségi változó, akkor

$$\mathbb{P}(\xi < s + t | \xi > s) = \mathbb{P}(\xi < t) \quad (s, t > 0).$$

- 2 **Poisson folyamat:** Ha időegység alatt bekövetkező események száma Poisson eloszlású valószínűségi változó, akkor két egymást követő bekövetkezés között eltelt idő exponenciális eloszlású ugyanazzal a  $\lambda$  paraméterrel.

### 3. A normális eloszlás

# Standard normális eloszlás

# Standard normális eloszlás

Azt mondjuk, hogy az  $\eta$  valószínűségi változó **standard normális** (jele:  $\eta \sim \mathcal{N}(0, 1)$ ), ha **eloszlás**, illetve **sűrűségfüggvénye**:

# Standard normális eloszlás

Azt mondjuk, hogy az  $\eta$  valószínűségi változó **standard normális** (jele:  $\eta \sim \mathcal{N}(0, 1)$ ), ha **eloszlás**, illetve **sűrűségfüggvénye**:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

tetszőleges  $x \in \mathbb{R}$  esetén.

# Standard normális eloszlás

Azt mondjuk, hogy az  $\eta$  valószínűségi változó **standard normális** (jele:  $\eta \sim \mathcal{N}(0, 1)$ ), ha **eloszlás**, illetve **sűrűségfüggvénye**:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

tetszőleges  $x \in \mathbb{R}$  esetén.

A  $\eta$  standard normális valószínűségi változó **várható értéke** és **szórásnégyzete**:

$$\mathbb{E}(\xi) = 0, \quad \mathbb{D}^2(\xi) = 1.$$

# Normális eloszlás

# Normális eloszlás

Azt mondjuk, hogy a  $\xi$  valószínűségi változó normális eloszlású  $m$  és  $\sigma^2$  paraméterekkel (jele:  $\xi \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ ), ha az **eloszlás**, illetve **sűrűségfüggvénye**:

# Normális eloszlás

Azt mondjuk, hogy a  $\xi$  valószínűségi változó normális eloszlású  $m$  és  $\sigma^2$  paraméterekkel (jele:  $\xi \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ ), ha az **eloszlás**, illetve **sűrűségfüggvénye**:

$$\mathbb{F}_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt \quad f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

tetszőleges  $x \in$  esetén.

# Normális eloszlás

Azt mondjuk, hogy a  $\xi$  valószínűségi változó normális eloszlású  $m$  és  $\sigma^2$  paraméterekkel (jele:  $\xi \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ ), ha az **eloszlás**, illetve **sűrűségfüggvénye**:

$$\mathbb{F}_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt \quad f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

tetszőleges  $x \in$  esetén.

Ekkor a  $\xi$  **várható értéke** és a **szórásnégyzete**:

$$\mathbb{E}(\xi) = m, \quad \mathbb{D}^2(\xi) = \sigma^2.$$

# Tulajdonságok

# Tulajdonságok

Két fontos tulajdonságot használunk a számolás során:

# Tulajdonságok

Két fontos tulajdonságot használunk a számolás során:

- 1 **Standardizálás:** Ha  $\xi \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ , akkor  
$$\eta \doteq \frac{\xi - m}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

# Tulajdonságok

Két fontos tulajdonságot használunk a számolás során:

- 1 **Standardizálás:** Ha  $\xi \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ , akkor  $\eta \doteq \frac{\xi - m}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$ .
- 2  $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$  minden  $x \in \mathbb{R}$  esetén.

# 1. Feladat.

**1. Feladat.** *Egy kör sugara egyenletes eloszlású a  $(0, 1.4)$  intervallumban. Számítsa ki a kör területének, mint valószínűségi változónak a mediánját!*

# 1. Megoldás.

**1. Megoldás.** Jelölje  $\xi$  a kör sugarát,  $\eta$  a kör területét. Ekkor  $\eta = \xi^2\pi$ , továbbá tudjuk, hogy  $\xi \sim U(0, 1.4)$ , így  $\mathbb{F}_\xi(x) = \frac{x}{1.4}$ , ha  $x \in (0, 1.4)$ .

**1. Megoldás.** Jelölje  $\xi$  a kör sugarát,  $\eta$  a kör területét. Ekkor  $\eta = \xi^2\pi$ , továbbá tudjuk, hogy  $\xi \sim U(0, 1.4)$ , így  $\mathbb{F}_\xi(x) = \frac{x}{1.4}$ , ha  $x \in (0, 1.4)$ .

Az  $\eta$  mediánját keressük, amihez szükségünk van az  $\eta$  eloszlásfüggvényére.

**1. Megoldás.** Jelölje  $\xi$  a kör sugarát,  $\eta$  a kör területét. Ekkor  $\eta = \xi^2\pi$ , továbbá tudjuk, hogy  $\xi \sim U(0, 1.4)$ , így  $\mathbb{F}_\xi(x) = \frac{x}{1.4}$ , ha  $x \in (0, 1.4)$ .

Az  $\eta$  mediánját keressük, amihez szükségünk van az  $\eta$  eloszlásfüggvényére.

Az  $\eta$  eloszlásfüggvényének a meghatározásakor egyrészt felhasználjuk, hogy  $\eta = \xi^2\pi \geq 0$ , így  $\mathbb{F}_\eta(x) = 0$ , ha  $x < 0$ .

**1. Megoldás.** Jelölje  $\xi$  a kör sugarát,  $\eta$  a kör területét. Ekkor  $\eta = \xi^2\pi$ , továbbá tudjuk, hogy  $\xi \sim U(0, 1.4)$ , így  $\mathbb{F}_\xi(x) = \frac{x}{1.4}$ , ha  $x \in (0, 1.4)$ .

Az  $\eta$  mediánját keressük, amihez szükségünk van az  $\eta$  eloszlásfüggvényére.

Az  $\eta$  eloszlásfüggvényének a meghatározásakor egyrészt felhasználjuk, hogy  $\eta = \xi^2\pi \geq 0$ , így  $\mathbb{F}_\eta(x) = 0$ , ha  $x < 0$ .

Másrészt,  $\xi \geq 0$ , így  $\sqrt{\xi^2} = |\xi| = \xi$ .

**1. Megoldás.** Jelölje  $\xi$  a kör sugarát,  $\eta$  a kör területét. Ekkor  $\eta = \xi^2\pi$ , továbbá tudjuk, hogy  $\xi \sim U(0, 1.4)$ , így  $\mathbb{F}_\xi(x) = \frac{x}{1.4}$ , ha  $x \in (0, 1.4)$ .

Az  $\eta$  mediánját keressük, amihez szükségünk van az  $\eta$  eloszlásfüggvényére.

Az  $\eta$  eloszlásfüggvényének a meghatározásakor egyrészt felhasználjuk, hogy  $\eta = \xi^2\pi \geq 0$ , így  $\mathbb{F}_\eta(x) = 0$ , ha  $x < 0$ .

Másrészt,  $\xi \geq 0$ , így  $\sqrt{\xi^2} = |\xi| = \xi$ .

Azt is felhasználjuk, hogy

$$\mathbb{F}_\eta(x) = \mathbb{P}(\xi^2\pi < x) = \mathbb{P}\left(\xi < \sqrt{\frac{x}{\pi}}\right) = \mathbb{F}_\xi\left(\sqrt{\frac{x}{\pi}}\right).$$

Így kapjuk, hogy

$$\mathbb{F}_\eta(x) = \mathbb{F}_\xi\left(\sqrt{\frac{x}{\pi}}\right) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x < 0, \\ \frac{\sqrt{x}}{1.4\sqrt{\pi}}, & \text{ha } 0 < \sqrt{\frac{x}{\pi}} < 1.4, \\ & \text{azaz } 0 < x < 1.96\pi, \\ 1 & \text{ha } 1.96\pi < x. \end{cases}$$

A  $\mu$  medián értékének a meghatározásához az

$$\mathbb{F}_\eta(\mu) = \frac{1}{2}$$

egyenletet kell megoldanunk. Így kapjuk, hogy

$$\mathbb{F}_\eta(\mu) = \frac{\sqrt{\mu}}{1.4\sqrt{\pi}} = \frac{1}{2}, \quad \sqrt{\mu} = 0.7\sqrt{\pi}, \quad \mu = 0.49\pi.$$

2 Feladat.

**2 Feladat.** *Egy üzletbe átlag 29 vevő érkezik óránként és számuk Poisson-eloszlású: Mi a valószínűsége, hogy két egymás után érkező vevő érkezése között eltelik legalább 4.5 perc?*

## 2. Megoldás.

**2. Megoldás.** Az időegység 1 óra. Jelölje  $\xi$  az üzletbe óránként érkező vevők számát. Mivel  $\mathbb{E}(\xi) = \lambda = 29$ , így  $\xi \sim \text{Poiiss}(29)$ .

**2. Megoldás.** Az időegység 1 óra. Jelölje  $\xi$  az üzletbe óránként érkező vevők számát. Mivel  $\mathbb{E}(\xi) = \lambda = 29$ , így  $\xi \sim \text{Pois}(29)$ . Jelölje  $\eta$  a két vevő között eltelt időt órában mérve. Ekkor  $\eta \sim \text{Exp}(\lambda = 29)$ .

**2. Megoldás.** Az időegység 1 óra. Jelölje  $\xi$  az üzletbe óránként érkező vevők számát. Mivel  $\mathbb{E}(\xi) = \lambda = 29$ , így  $\xi \sim \text{Poiss}(29)$ .  
Jelölje  $\eta$  a két vevő között eltelt időt órában mérve. Ekkor  $\eta \sim \text{Exp}(\lambda = 29)$ .  
A keresett valószínűség:

**2. Megoldás.** Az időegység 1 óra. Jelölje  $\xi$  az üzletbe óránként érkező vevők számát. Mivel  $\mathbb{E}(\xi) = \lambda = 29$ , így  $\xi \sim \text{Pois}(29)$ . Jelölje  $\eta$  a két vevő között eltelt időt órában mérve. Ekkor  $\eta \sim \text{Exp}(\lambda = 29)$ . A keresett valószínűség:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\eta > \frac{4.5}{60}\right) &= 1 - \mathbb{P}\left(\eta < \frac{4.5}{60}\right) = 1 - \mathbb{F}_\eta\left(\frac{4.5}{60}\right) = \\ &= 1 - \left(1 - e^{-\frac{4.5 \cdot 29}{60}}\right) = e^{-\frac{4.5 \cdot 29}{60}} = 0.1136.\end{aligned}$$

### 3. Feladat.

**3. Feladat.** *A gépjárművezetői vizsgán a vizsga időtartama (percben mérve)*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 0; \\ 0.02e^{-0.02x}, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

*sűrűségfüggvényű valószínűségi változó. Az előttünk lévő már 13 perce vezet. Mi a valószínűsége, hogy 6 percen belül nem fejezi be a vizsgát?*

### 3. Megoldás.

**3. Megoldás.** Jelölje  $\xi$  a vizsga időtartamát percben mérve, ekkor  $\xi \sim \text{Exp}(\lambda = 0.02)$ .

**3. Megoldás.** Jelölje  $\xi$  a vizsga időtartamát percben mérve, ekkor  $\xi \sim \text{Exp}(\lambda = 0.02)$ .  
A számolás során felhasználjuk az **exponenciális eloszlás örökifjú tulajdonságát**, mely szerint:

$$\mathbb{P}(\xi < s + t | \xi > s) = \mathbb{P}(\xi < t) \quad (s, t > 0).$$

**3. Megoldás.** Jelölje  $\xi$  a vizsga időtartamát percben mérve, ekkor  $\xi \sim \text{Exp}(\lambda = 0.02)$ .

A számolás során felhasználjuk az **exponenciális eloszlás örökifjú tulajdonságát**, mely szerint:

$$\mathbb{P}(\xi < s + t | \xi > s) = \mathbb{P}(\xi < t) \quad (s, t > 0).$$

A keresett valószínűség:

**3. Megoldás.** Jelölje  $\xi$  a vizsga időtartamát percben mérve, ekkor  $\xi \sim \text{Exp}(\lambda = 0.02)$ .

A számolás során felhasználjuk az **exponenciális eloszlás örökifjú tulajdonságát**, mely szerint:

$$\mathbb{P}(\xi < s + t | \xi > s) = \mathbb{P}(\xi < t) \quad (s, t > 0).$$

A keresett valószínűség:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\xi > 6 + 13 | \xi > 13) &= 1 - \mathbb{P}(\xi < 6 + 13 | \xi > 13) = \\ &= 1 - \mathbb{P}(\xi < 6) = 1 - F_{\xi}(6) = 1 - (1 - e^{-0.02 \cdot 6}) = e^{-0.02 \cdot 6} = 0.8869. \end{aligned}$$

## 4. Feladat.

**4. Feladat.** *Annak a valószínűsége, hogy egy benzinkútnál 5 percnél többet kell várakozni a tapasztalatok szerint 0.22. A várakozási időt exponenciális eloszlásúnak feltételezve, mi annak a valószínűsége, hogy 6 percnél kevesebbet kell várakozni?*

## 4. Megoldás.

**4. Megoldás.** Jelölje  $\eta$  a várakozási időt percben mérve. Mivel  $\eta \sim \text{Exp}(\lambda)$ , így  $\mathbb{F}_\eta(x) = 1 - e^{-\lambda x}$  ( $x > 0$ ).

**4. Megoldás.** Jelölje  $\eta$  a várakozási időt percben mérve. Mivel  $\eta \sim \text{Exp}(\lambda)$ , így  $\mathbb{F}_\eta(x) = 1 - e^{-\lambda x}$  ( $x > 0$ ).  
A  $\lambda$  paraméter meghatározása:

**4. Megoldás.** Jelölje  $\eta$  a várakozási időt percben mérve. Mivel  $\eta \sim \text{Exp}(\lambda)$ , így  $\mathbb{F}_\eta(x) = 1 - e^{-\lambda x}$  ( $x > 0$ ).  
A  $\lambda$  paraméter meghatározása:

$$0.22 = \mathbb{P}(\eta \geq 5) = 1 - \mathbb{P}(\eta < 5) = 1 - \mathbb{F}_\eta(5) = 1 - (1 - e^{-\lambda \cdot 5}) = e^{-5\lambda},$$

**4. Megoldás.** Jelölje  $\eta$  a várakozási időt percben mérve. Mivel  $\eta \sim \text{Exp}(\lambda)$ , így  $\mathbb{F}_\eta(x) = 1 - e^{-\lambda x}$  ( $x > 0$ ).

A  $\lambda$  paraméter meghatározása:

$$0.22 = \mathbb{P}(\eta \geq 5) = 1 - \mathbb{P}(\eta < 5) = 1 - \mathbb{F}_\eta(5) = 1 - (1 - e^{-\lambda \cdot 5}) = e^{-5\lambda},$$

amiből kapjuk, hogy  $-5\lambda = \ln(0.22)$ , azaz  $\lambda = \frac{\ln(0.22)}{-5}$ .

**4. Megoldás.** Jelölje  $\eta$  a várakozási időt percben mérve. Mivel  $\eta \sim \text{Exp}(\lambda)$ , így  $\mathbb{F}_\eta(x) = 1 - e^{-\lambda x}$  ( $x > 0$ ).

A  $\lambda$  paraméter meghatározása:

$$0.22 = \mathbb{P}(\eta \geq 5) = 1 - \mathbb{P}(\eta < 5) = 1 - \mathbb{F}_\eta(5) = 1 - (1 - e^{-\lambda \cdot 5}) = e^{-5\lambda},$$

amiből kapjuk, hogy  $-5\lambda = \ln(0.22)$ , azaz  $\lambda = \frac{\ln(0.22)}{-5}$ .

A keresett valószínűség:

**4. Megoldás.** Jelölje  $\eta$  a várakozási időt percben mérve. Mivel  $\eta \sim \text{Exp}(\lambda)$ , így  $\mathbb{F}_\eta(x) = 1 - e^{-\lambda x}$  ( $x > 0$ ).

A  $\lambda$  paraméter meghatározása:

$$0.22 = \mathbb{P}(\eta \geq 5) = 1 - \mathbb{P}(\eta < 5) = 1 - \mathbb{F}_\eta(5) = 1 - (1 - e^{-\lambda \cdot 5}) = e^{-5\lambda},$$

amiből kapjuk, hogy  $-5\lambda = \ln(0.22)$ , azaz  $\lambda = \frac{\ln(0.22)}{-5}$ .

A keresett valószínűség:

$$\mathbb{P}(\eta < 6) = \mathbb{F}_\eta(6) = 1 - e^{-\lambda \cdot 6} = 1 - e^{\frac{6 \cdot \ln(0.22)}{5}} = 0.8375.$$

## 5. Feladat.

**5. Feladat.** *Egy csiga életének hossza exponenciális eloszlású valószínűségi változó 1.48 év várható értékkel. Mi a valószínűsége, hogy kedvenc csigánk életének harmadik évében pusztul el?*

## 5. Megoldás.

**5. Megoldás.** Jelölje  $\xi$  a csiga élettartalmát években mérve. Mivel  $\mathbb{E}(\xi) = 1.48 = \frac{1}{\lambda}$ , így  $\lambda = \frac{1}{1.48}$  és  $\xi \sim \text{Exp}(\lambda = \frac{1}{1.48})$ .

**5. Megoldás.** Jelölje  $\xi$  a csiga élettartalmát években mérve. Mivel  $\mathbb{E}(\xi) = 1.48 = \frac{1}{\lambda}$ , így  $\lambda = \frac{1}{1.48}$  és  $\xi \sim \text{Exp}(\lambda = \frac{1}{1.48})$ .  
A keresett valószínűség:

**5. Megoldás.** Jelölje  $\xi$  a csiga élettartalmát években mérve. Mivel  $\mathbb{E}(\xi) = 1.48 = \frac{1}{\lambda}$ , így  $\lambda = \frac{1}{1.48}$  és  $\xi \sim \text{Exp}(\lambda = \frac{1}{1.48})$ .  
A keresett valószínűség:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(2 < \xi < 3) &= \mathbb{P}(\xi < 3) - \mathbb{P}(\xi < 2) = \mathbb{F}_{\xi}(3) - \mathbb{F}_{\xi}(2) = \\ &= (1 - e^{-\frac{3}{1.48}}) - (1 - e^{-\frac{2}{1.48}}) = e^{-\frac{2}{1.48}} - e^{-\frac{3}{1.48}} = 0.1272.\end{aligned}$$

**5. Megoldás.** Jelölje  $\xi$  a csiga élettartalmát években mérve. Mivel  $\mathbb{E}(\xi) = 1.48 = \frac{1}{\lambda}$ , így  $\lambda = \frac{1}{1.48}$  és  $\xi \sim \text{Exp}(\lambda = \frac{1}{1.48})$ .  
A keresett valószínűség:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(2 < \xi < 3) &= \mathbb{P}(\xi < 3) - \mathbb{P}(\xi < 2) = \mathbb{F}_{\xi}(3) - \mathbb{F}_{\xi}(2) = \\ &= (1 - e^{-\frac{3}{1.48}}) - (1 - e^{-\frac{2}{1.48}}) = e^{-\frac{2}{1.48}} - e^{-\frac{3}{1.48}} = 0.1272.\end{aligned}$$

## 6. Feladat.

**6. Feladat.** *Egy csomagológép 1 kilogrammos zacskókat tölt. A zacskóba töltött cukor mennyisége normális eloszlású valószínűségi változó 1 kg várható értékkel és 0.031 kg szórással. A zacskó súlyra nézve első osztályú, ha a súlya 0.95 kg és 1.05 kg közé esik. Mi a valószínűsége, hogy két véletlenül kiválasztott zacskó közül*

*a. legalább az egyik első osztályú?*

*b. legfeljebb az egyik első osztályú?*

*legalább az egyik első osztályú?*

**6. Megoldás.** Jelölje  $\xi$  a zacskóba töltött cukorka mennyiségét. Tudjuk, hogy  $\xi \sim \mathcal{N}(m = 1\sigma^2 = 0.031^2)$ . Ekkor standardizálással kapjuk, hogy

**6. Megoldás.** Jelölje  $\xi$  a zacskóba töltött cukorka mennyiségét. Tudjuk, hogy  $\xi \sim \mathcal{N}(m = 1, \sigma^2 = 0.031^2)$ . Ekkor standardizálással kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} p &= \mathbb{P}(0.95 \leq \xi < 1.05) = \mathbb{P}\left(\frac{0.95 - 1}{0.031} \leq \eta < \frac{1.05 - 1}{0.031}\right) = \\ &= \Phi(1.6129) - \Phi(-1.6129) = 2\Phi(1.6129) - 1 = 2 \cdot 0.9463 - 1 = 0.8926. \end{aligned}$$

A feladat befejezéséhez két megoldást is adunk. Az első megoldás esetén bevezetünk két eseményt. Legyen  $A$  az az esemény, hogy az első zsákocskas első osztályú,  $B$  az, hogy a második zsákocskas első osztályú. ezekkel a jelölésekkel kapjuk, hogy

A feladat befejezéséhez két megoldást is adunk. Az első megoldás esetén bevezetünk két eseményt. Legyen  $A$  az az esemény, hogy az első zsákocská első osztályú,  $B$  az, hogy a második zsákocská első osztályú. ezekkel a jelölésekkel kapjuk, hogy

a. (a szita formula) alkalmazásával kapjuk, hogy

A feladat befejezéséhez két megoldást is adunk. Az első megoldás esetén bevezetünk két eseményt. Legyen  $A$  az az esemény, hogy az első zsákocská első osztályú,  $B$  az, hogy a második zsákocská első osztályú. ezekkel a jelölésekkel kapjuk, hogy

a. (a szita formula) alkalmazásával kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\text{ legalább az egyik első osztályú } ) &= \\ &= \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = \\ &= 2\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A)^2 = 2p - p^2 = 0.9885.\end{aligned}$$

A feladat befejezéséhez két megoldást is adunk. Az első megoldás esetén bevezetünk két eseményt. Legyen  $A$  az az esemény, hogy az első zsákocska első osztályú,  $B$  az, hogy a második zsákocska első osztályú. ezekkel a jelölésekkel kapjuk, hogy

a. (a szita formula) alkalmazásával kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\text{ legalább az egyik első osztályú } ) &= \\ &= \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = \\ &= 2\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A)^2 = 2p - p^2 = 0.9885.\end{aligned}$$

b. (a komplementer esemény valószínűségére vonatkozó összefüggés) alapján kapjuk, hogy

A feladat befejezéséhez két megoldást is adunk. Az első megoldás esetén bevezetünk két eseményt. Legyen  $A$  az az esemény, hogy az első zsákocská első osztályú,  $B$  az, hogy a második zsákocská első osztályú. ezekkel a jelölésekkel kapjuk, hogy

a. (a szita formula) alkalmazásával kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\text{ legalább az egyik első osztályú } ) &= \\ &= \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = \\ &= 2\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A)^2 = 2p - p^2 = 0.9885.\end{aligned}$$

b. (a komplementer esemény valószínűségére vonatkozó összefüggés) alapján kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\text{ legfeljebb az egyik első osztályú } ) &= \\ &= 1 - \mathbb{P}(A \cap B) = 1 - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = 1 - \mathbb{P}(A)^2 = \\ &= 1 - p^2 = 0.2033\end{aligned}$$

Mo.II.:

Mo.II.:

Mint azt látni fogjuk, ez a megoldás is az elsővel egyező megoldást ad. Az első megoldás során sikeresen kiszámoltuk a  $p$  valószínűséget, amely annak az eseménynek a valószínűsége, hogy egy zsákocska első osztályú. Most bevezetjük a  $\xi$  valószínűségi változót, amely ezúttal azt figyeli, hogy a kiválasztott két zsákocska közül hány zsákocska első osztályú. Ha sok zsákocska közül választunk, akkor teljesülnek azok a feltételek, amelyeket az első megoldás során hallgatólagosan feltételeztünk, nevezetesen, hogy  $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B)$ ; és az  $A$  és  $B$  események függetlenek. Ekkor  $\xi \sim B(n = 2, p = 0.8926)$ . Ezekkel a jelölésekkel

a. Annak a valószínűsége, hogy legalább az egyik zsákocská első osztályú

a. Annak a valószínűsége, hogy legalább az egyik zsákocska első osztályú

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\xi \geq 1) &= 1 - p_0 = 1 - \left( \binom{2}{0} p^0 (1-p)^2 \right) = \\ &= 1 - (1-p)^2 = 2p - p^2 = 0.9885.\end{aligned}$$

a. Annak a valószínűsége, hogy legalább az egyik zsákocska első osztályú

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\xi \geq 1) &= 1 - p_0 = 1 - \left( \binom{2}{0} p^0 (1-p)^2 \right) = \\ &= 1 - (1-p)^2 = 2p - p^2 = 0.9885.\end{aligned}$$

b. Annak a valószínűsége, hogy legfeljebb az egyik zsákocska első osztályú

a. Annak a valószínűsége, hogy legalább az egyik zsákocska első osztályú

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\xi \geq 1) &= 1 - p_0 = 1 - \left( \binom{2}{0} p^0 (1-p)^2 \right) = \\ &= 1 - (1-p)^2 = 2p - p^2 = 0.9885.\end{aligned}$$

b. Annak a valószínűsége, hogy legfeljebb az egyik zsákocska első osztályú

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\xi \leq 1) &= 1 - p_2 = 1 - \left( \binom{2}{2} p^2 (1-p)^0 \right) = \\ &= 1 - p^2 = 0.2033.\end{aligned}$$

a. Annak a valószínűsége, hogy legalább az egyik zsákocska első osztályú

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\xi \geq 1) &= 1 - p_0 = 1 - \left( \binom{2}{0} p^0 (1-p)^2 \right) = \\ &= 1 - (1-p)^2 = 2p - p^2 = 0.9885.\end{aligned}$$

b. Annak a valószínűsége, hogy legfeljebb az egyik zsákocska első osztályú

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\xi \leq 1) &= 1 - p_2 = 1 - \left( \binom{2}{2} p^2 (1-p)^0 \right) = \\ &= 1 - p^2 = 0.2033.\end{aligned}$$

Megnyugtató módon a második megoldás az elsővel egyező eredményt ad.

## 7. Feladat.

**7. Feladat.** *Hengeres alkatrészeket gyártunk. Az átmérő 16 mm várható értékű és 0.007 mm szórású normális eloszlású valószínűségi változó, míg a hossz 75 mm várható értékű és 0.05 mm szórású normális eloszlású valószínűségi változó. Egy alkatrész átmérőre jó, ha az átmérő a (15.986, 16.021) intervallumba esik. Egy alkatrész hosszra jó, ha a hossz a (74.95, 75.1) intervallumba esik. Egy alkatrész jó, ha átmérőre is és hosszra is jó. Átlagosan az alkatrészek hány százaléka lesz selejtes, ha egy alkatrész átmérője és hossza független egymástól?*

## 7. Megoldás.

**7. Megoldás.** *Jelölje  $\xi_1$  az alkatrész átmérőjét,  $\xi_2$  az alkatrész hosszát.*

**7. Megoldás.** Jelölje  $\xi_1$  az alkatrész átmérőjét,  $\xi_2$  az alkatrész hosszát.

Tudjuk, hogy  $\xi_1 \sim \mathcal{N}(m = 16, \sigma^2 = 0.007^2)$ ,

$\xi_2 \sim \mathcal{N}(m = 75, \sigma^2 = 0.05^2)$ , továbbá a  $\xi_1$  és a  $\xi_2$  valószínűségi változók függetlenek.

**7. Megoldás.** Jelölje  $\xi_1$  az alkatrész átmérőjét,  $\xi_2$  az alkatrész hosszát.

Tudjuk, hogy  $\xi_1 \sim \mathcal{N}(m = 16, \sigma^2 = 0.007^2)$ ,

$\xi_2 \sim \mathcal{N}(m = 75, \sigma^2 = 0.05^2)$ , továbbá a  $\xi_1$  és a  $\xi_2$  valószínűségi változók függetlenek.

Jelölje  $A$  azt az eseményt, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott alkatrész jó. A feladat a  $\mathbb{P}(\bar{A})$  valószínűség meghatározása.

**7. Megoldás.** Jelölje  $\xi_1$  az alkatrész átmérőjét,  $\xi_2$  az alkatrész hosszát.

Tudjuk, hogy  $\xi_1 \sim \mathcal{N}(m = 16, \sigma^2 = 0.007^2)$ ,

$\xi_2 \sim \mathcal{N}(m = 75, \sigma^2 = 0.05^2)$ , továbbá a  $\xi_1$  és a  $\xi_2$  valószínűségi változók függetlenek.

Jelölje  $A$  azt az eseményt, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott alkatrész jó. A feladat a  $\mathbb{P}(\bar{A})$  valószínűség meghatározása.

$$\begin{aligned} p &\doteq \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(15.986 < \xi_1 < 16.021, 74.95 < \xi_2 < 75.1) = \\ &= \mathbb{P}(15.986 < \xi_1 < 16.021) \mathbb{P}(74.95 < \xi_2 < 75.1) = \\ &= \mathbb{P}\left(\frac{15.986 - 16}{0.007} < \eta_1 < \frac{16.021 - 16}{0.007}\right) \\ &\quad \mathbb{P}\left(\frac{74.95 - 75}{0.05} < \eta_2 < \frac{75.1 - 75}{0.05}\right) = \\ &= (\Phi(3) - \Phi(-2))(\Phi(2) - \Phi(-1)) = (\Phi(3) + \Phi(2) - 1)(\Phi(2) + \Phi(1) - 1) = \\ &= (0.9987 + 0.9772 - 1)(0.9972 + 0.8413 - 1) = 0.9759 \cdot 0.8185 = 0.7988. \end{aligned}$$

Így a keresett valószínűség:  $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - p = 0.2012$ , tehát az alkatrészek 20.12% lesz selejtes, ami elég sok.

Vége az VI. órának

Köszönöm a figyelmet!