Valószínűségszámítás és Matematikai Statisztika

I.-III. óra

Miskolc, 2025.

I. óra

Kombinatorika,
Kolmogorov-féle valószínűségi mező

1. Kombinatorika

Matematikai eszközök

Matematikai eszközök

1. **Faktoriális függvény:**

$$n! \doteq \begin{cases} 1, & \text{ha } n = 0; \\ 1 \cdot 2 \cdots n, & \text{ha } n \in \mathbb{Z}_+. \end{cases}$$

Matematikai eszközök

1. **Faktoriális függvény:**

$$n! \doteq \begin{cases} 1, & \text{ha } n = 0; \\ 1 \cdot 2 \cdots n, & \text{ha } n \in \mathbb{Z}_+. \end{cases}$$

2. **Binomiális együttható:**

$$\binom{n}{k} \doteq \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdots k} = \frac{(n)_k}{k!}$$

ahol $0 \leqslant k \leqslant n$.

Matematikai eszközök

1. **Faktoriális függvény:**

$$n! \doteq \begin{cases} 1, & \text{ha } n = 0; \\ 1 \cdot 2 \cdots n, & \text{ha } n \in \mathbb{Z}_+. \end{cases}$$

2. **Binomiális együttható:**

$$\binom{n}{k} \doteq \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdots k} = \frac{(n)_k}{k!}$$

ahol $0 \leqslant k \leqslant n$.

3. **Polinomiális együttható:**

$$\binom{n}{k_1 k_2 \ldots k_r} \doteq \frac{n!}{k_1! k_2! \cdots k_r!},$$

ahol $n \in \mathbb{Z}_+$; $k_1, k_2, \ldots, k_r \in \mathbb{Z}_+$ úgy, hogy $k_1 + \cdots + k_r = n$.

Az elemi kombinatorika alapfeladatai

Az elemi kombinatorika alapfeladatai

1. **Sorbarendezés (permutáció):**
   Adott n elem, ezeknek keressük az összes lehetséges sorrendjét.

Az elemi kombinatorika alapfeladatai

1. **Sorbarendezés (permutáció):**
   Adott n elem, ezeknek keressük az összes lehetséges sorrendjét.
2. **Kiválasztás:**
   Adott n elem, melyek közül kiválasztunk k darabot.

A permutáció

A permutáció

A permutációnak két fajtája van.

A permutáció

A permutációnak két fajtája van.

1. **Ismétlés nélküli permutáció:**

A permutáció

A permutációnak két fajtája van.

1. **Ismétlés nélküli permutáció:**
   Az n darab elem páronként különböző.

A permutáció

A permutációnak két fajtája van.

1. **Ismétlés nélküli permutáció:**
   Az n darab elem páronként különböző.
   Az n elem ismétlés nélküli permutációinak számát P_n módon jelöljük.

A permutáció

A permutációnak két fajtája van.

1. **Ismétlés nélküli permutáció:**
   Az n darab elem páronként különböző.
   Az n elem ismétlés nélküli permutációinak számát P_n módon jelöljük.
   $$P_n = n! \qquad (n \in \mathbb{Z}_+).$$

A permutáció

A permutációnak két fajtája van.

1. **Ismétlés nélküli permutáció:**
   Az n darab elem páronként különböző.
   Az n elem ismétlés nélküli permutációinak számát P_n módon jelöljük.
   $$P_n = n! \qquad (n \in \mathbb{Z}_+).$$

2. **Ismétléses permutáció:**

A permutáció

A permutációnak két fajtája van.

1. **Ismétlés nélküli permutáció:**
   Az n darab elem páronként különböző.
   Az n elem ismétlés nélküli permutációinak számát P_n módon jelöljük.
   $$P_n = n! \qquad (n \in \mathbb{Z}_+).$$

2. **Ismétléses permutáció:**
   Az n darab elem között $k_1, k_2, \ldots, k_r$ azonos tulajdonságú elem szerepel. Az azonos tulajdonságú elemek egymás közötti sorrendjét nem vesszük figyelembe.

A permutáció

A permutációnak két fajtája van.

1. **Ismétlés nélküli permutáció:**
   Az n darab elem páronként különböző.
   Az n elem ismétlés nélküli permutációinak számát P_n módon jelöljük.
   $$P_n = n! \qquad (n \in \mathbb{Z}_+).$$

2. **Ismétléses permutáció:**
   Az n darab elem között k_1, k_2, $\ldots$, k_r azonos tulajdonságú elem szerepel. Az azonos tulajdonságú elemek egymás közötti sorrendjét nem vesszük figyelembe.
   A lehetséges sorrendek számát ebben az esetben $P_n^{k_1,\ldots,k_r(i)}$ módon jelöljük.

A permutáció

A permutációnak két fajtája van.

1. **Ismétlés nélküli permutáció:**
   Az n darab elem páronként különböző.
   Az n elem ismétlés nélküli permutációinak számát P_n módon jelöljük.
   $$P_n = n! \qquad (n \in \mathbb{Z}_+).$$

2. **Ismétléses permutáció:**
   Az n darab elem között $k_1,\ k_2,\ \ldots,\ k_r$ azonos tulajdonságú elem szerepel. Az azonos tulajdonságú elemek egymás közötti sorrendjét nem vesszük figyelembe.
   A lehetséges sorrendek számát ebben az esetben $P_n^{k_1,\ldots,k_r(i)}$ módon jelöljük.
   $$P_n^{k_1,k_2,\ldots,k_r(i)} = \binom{n}{k_1\,k_2\ldots k_r} \doteq \frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_r!},$$
   ahol $n \in \mathbb{Z}_+;\ k_1,\ k_2,\ \ldots,\ k_r \in \mathbb{Z}_+\ ,\ k_1 + \cdots + k_r = n.$

Kiválasztásos feladatok:

Kiválasztásos feladatok:

A kiválasztási feladatokat 2 szempont alapján csoportosítjuk.

Kiválasztásos feladatok:

A kiválasztási feladatokat 2 szempont alapján csoportosítjuk.

1. A kiválasztási feladatot **variáció**-nak nevezzük, ha számít a kiválasztott elemek sorrendje sorrendje,

Kiválasztásos feladatok:

A kiválasztási feladatokat 2 szempont alapján csoportosítjuk.

1. A kiválasztási feladatot **variáció**-nak nevezzük, ha számít a kiválasztott elemek sorrendje sorrendje,
   illetve **kombináció**-nak, ha nem számít a sorrend.

Kiválasztásos feladatok:

A kiválasztási feladatokat 2 szempont alapján csoportosítjuk.

1. A kiválasztási feladatot **variáció**-nak nevezzük, ha számít a kiválasztott elemek sorrendje sorrendje,
   illetve **kombináció**-nak, ha nem számít a sorrend.
2. A kiválasztási feladatot **ismétlés nélküli**nek nevezzük, ha egy elem legfeljebb egyszer választható,

Kiválasztásos feladatok:

A kiválasztási feladatokat 2 szempont alapján csoportosítjuk.

1. A kiválasztási feladatot **variáció**-nak nevezzük, ha számít a kiválasztott elemek sorrendje sorrendje,
   illetve **kombináció**-nak, ha nem számít a sorrend.
2. A kiválasztási feladatot **ismétlés nélküli**nek nevezzük, ha egy elem legfeljebb egyszer választható,
   illetve **ismétléses**nek, ha többször is választható.

Kiválasztásos feladatok:

A kiválasztási feladatokat 2 szempont alapján csoportosítjuk.

1. A kiválasztási feladatot **variáció**-nak nevezzük, ha számít a kiválasztott elemek sorrendje sorrendje,
   illetve **kombináció**-nak, ha nem számít a sorrend.
2. A kiválasztási feladatot **ismétlés nélküli**nek nevezzük, ha egy elem legfeljebb egyszer választható,
   illetve **ismétléses**nek, ha többször is választható.

A fentiek alapján látható,hogy 4 kiválasztási alapfeladat van.

Variációk:

Variációk:

1. Az n **elem** k **tagú ismétlés nélküli variáció**inak a számát V_n^k módon jelöljük.

Variációk:

1. Az n **elem** k **tagú ismétlés nélküli variáció**inak a számát V_n^k módon jelöljük.

$$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)\cdots(n-k+1) = (n)_k.$$

Variációk:

1. Az n **elem** k **tagú ismétlés nélküli variáció**inak a számát V_n^k módon jelöljük.

$$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)\cdots(n-k+1) = (n)_k.$$

2. Az n **elem** k **tagú ismétléses variáció**inak a számát $V_n^{k(i)}$ módon jelöljük.

Variációk:

1. Az n **elem** k **tagú ismétlés nélküli variáció**inak a számát V_n^k módon jelöljük.

$$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)\cdots(n-k+1) = (n)_k.$$

2. Az n **elem** k **tagú ismétléses variáció**inak a számát $V_n^{k(i)}$ módon jelöljük.

$$V_n^{k(i)} = n^k.$$

Kombinációk:

Kombinációk:

1. Az n **elem** k **tagú kombinációinak**inak a számát C_n^k módon jelöljük.

Kombinációk:

1. Az n **elem** k **tagú kombinációinak**inak a számát C_n^k módon jelöljük.

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{(n)_k}{k!}.$$

Kombinációk:

1. Az n **elem** k **tagú kombinációinak**inak a számát C_n^k módon jelöljük.
$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{(n)_k}{k!}.$$

2. Az n **elem** k **tagú ismétléses kombinációinak**inak a számát $C_n^{k(i)}$ módon jelöljük.

Kombinációk:

1. Az n **elem** k **tagú kombinációinak**inak a számát C_n^k módon jelöljük.

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{(n)_k}{k!}.$$

2. Az n **elem** k **tagú ismétléses kombinációinak**inak a számát $C_n^{k(i)}$ módon jelöljük.

$$C_n^{k(i)} = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)_k}{k!}.$$

Kombinációk:

1. Az n **elem** k **tagú kombinációinak**inak a számát C_n^k módon jelöljük.

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{(n)_k}{k!}.$$

2. Az n **elem** k **tagú ismétléses kombinációinak**inak a számát $C_n^{k(i)}$ módon jelöljük.

$$C_n^{k(i)} = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)_k}{k!}.$$

Érdemes megjegyezni, hogy az n **elem** k **tagú ismétlés nélküli kombinációinak**inak a száma - más szavakkal megfogalmazva - az n elemű halmaz k elemű részhalmazainak a száma.

A képletek rendszerezése:

A képletek rendszerezése:

A kiválasztásos feladatok típusait az alábbi táblázatban foglaljuk össze:

A képletek rendszerezése:

A kiválasztásos feladatok típusait az alábbi táblázatban foglaljuk össze:

	Variáció	Kombináció
Ism. nélküli	$V_n^k = (n)_k$	$C_n^k = \binom{n}{k}$
Ismétléses	$V_n^{k(i)} = n^k$	$C_n^{k(i)} = \binom{n+k-1}{k}$

Feladatok:

Feladatok:

1. Feladat. *Hányféle sorrendje van az*

- **a.** *A, B, C betűknek?*
- **b.** *A, A, B, B, B betűknek?*
- **c.** *A, A, B, B, B, C, C betűknek?*

Feladatok:

1. Feladat. *Hányféle sorrendje van az*

- **a.** *A, B, C betűknek?*
- **b.** *A, A, B, B, B betűknek?*
- **c.** *A, A, B, B, B, C, C betűknek?*

1. Megoldás.

Feladatok:

1. **Feladat.** *Hányféle sorrendje van az*
   - **a.** *A, B, C betűknek?*
   - **b.** *A, A, B, B, B betűknek?*
   - **c.** *A, A, B, B, B, C, C betűknek?*

1. **Megoldás.**
   - **a.** $P_3 = 3! = 6.$

Feladatok:

1. Feladat. *Hányféle sorrendje van az*

- **a.** *A, B, C betűknek?*
- **b.** *A, A, B, B, B betűknek?*
- **c.** *A, A, B, B, B, C, C betűknek?*

1. Megoldás.

- **a.** $P_3 = 3! = 6.$
- **b.** $P_5^{2,3(i)} = \frac{5!}{2!3!} = 10.$

Feladatok:

1. Feladat. *Hányféle sorrendje van az*

- **a.** *A, B, C betűknek?*
- **b.** *A, A, B, B, B betűknek?*
- **c.** *A, A, B, B, B, C, C betűknek?*

1. Megoldás.

- **a.** $P_3 = 3! = 6.$
- **b.** $P_5^{2,3(i)} = \frac{5!}{2!3!} = 10.$
- **c.** $P_7^{2,3,2(i)} = \frac{7!}{2!3!2!} = 210.$

2. Feladat. *Hányféleképpen lehet kitölteni egy LOTTÓ-szelvényt? (90 szám közül 5-t kell megjelölni.)*

2. Feladat. *Hányféleképpen lehet kitölteni egy LOTTÓ-szelvényt? (90 szám közül 5-t kell megjelölni.)*

2. Megoldás.

$$C_{90}^{5} = \binom{90}{5} = \frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 43949268 \approx 44M.$$

3. Feladat. *Hányféleképpen lehet kitölteni egy TOTÓ-szelvényt? (13+1 mező van, minden egyes mezőbe a 0, 1, X jelek valamelyikét kell beírni.)*

3. Feladat. *Hányféleképpen lehet kitölteni egy TOTÓ-szelvényt? (13+1 mező van, minden egyes mezőbe a 0, 1, X jelek valamelyikét kell beírni.)*

3. Megoldás.

$$V_3^{14} = 3^{14} = 4782969 \approx 5M.$$

4. Feladat. *Hányféleképpen lehet 4 db* **egyforma** *levelet 10 beszámozott rekeszbe helyezni, ha*

- **a.** *egy rekeszbe legfeljebb egy levél kerülhet?*
- **b.** *egy rekeszbe több levél is kerülhet?*

4. Feladat. *Hányféleképpen lehet 4 db* **egyforma** *levelet 10 beszámozott rekeszbe helyezni, ha*

a. *egy rekeszbe legfeljebb egy levél kerülhet?*

b. *egy rekeszbe több levél is kerülhet?*

4. Megoldás.

4. Feladat. *Hányféleképpen lehet 4 db* **egyforma** *levelet 10 beszámozott rekeszbe helyezni, ha*

- **a.** *egy rekeszbe legfeljebb egy levél kerülhet?*
- **b.** *egy rekeszbe több levél is kerülhet?*

4. Megoldás.

- **a.** $C_{10}^{4} = \binom{10}{4} = 210.$

4. Feladat. *Hányféleképpen lehet 4 db* **egyforma** *levelet 10 beszámozott rekeszbe helyezni, ha*

- **a.** *egy rekeszbe legfeljebb egy levél kerülhet?*
- **b.** *egy rekeszbe több levél is kerülhet?*

4. Megoldás.

- **a.** $C_{10}^{4} = \binom{10}{4} = 210.$
- **b.** $C_{10}^{4(i)} = \binom{10+4-1}{4} = \binom{13}{4} = 715.$

5. Feladat. *Hányféleképpen lehet 4 db* ***beszámozott*** *levelet 10 beszámozott rekeszbe helyezni, ha*

- c. *egy rekeszbe legfeljebb egy levél kerülhet?*
- d. *egy rekeszbe több levél is kerülhet?*

5. Feladat. *Hányféleképpen lehet 4 db* ***beszámozott*** *levelet 10 beszámozott rekeszbe helyezni, ha*

- **c.** *egy rekeszbe legfeljebb egy levél kerülhet?*
- **d.** *egy rekeszbe több levél is kerülhet?*

5. Megoldás.

5. Feladat. *Hányféleképpen lehet 4 db* ***beszámozott*** *levelet 10 beszámozott rekeszbe helyezni, ha*

- **c.** *egy rekeszbe legfeljebb egy levél kerülhet?*
- **d.** *egy rekeszbe több levél is kerülhet?*

5. Megoldás.

- **c.** $V_{10}^{4} = (10)_4 = 5040.$

5. Feladat. *Hányféleképpen lehet 4 db **beszámozott** levelet 10 beszámozott rekeszbe helyezni, ha*

- **c.** *egy rekeszbe legfeljebb egy levél kerülhet?*
- **d.** *egy rekeszbe több levél is kerülhet?*

5. Megoldás.

- **c.** $V_{10}^{4} = (10)_4 = 5040.$
- **d.** $V_{10}^{4(i)} = 10^4 = 10000.$

6. Feladat. *Egy cukorkacsomagoló üzemben egy gép 10-féle cukorkát tölt zsákocskákba. Minden zsákba 4 db cukorkát rak véletlenszerűen. Tartalmuk szerint hányféle zsák keletkezhet a töltés során?*

6. Feladat. *Egy cukorkacsomagoló üzemben egy gép 10-féle cukorkát tölt zsákocskákba. Minden zsákba 4 db cukorkát rak véletlenszerűen. Tartalmuk szerint hányféle zsák keletkezhet a töltés során?*

7. Feladat. *Van 10 doboz (beszámozva, rögzített sorrendben) és 4 db egyforma golyó. Hányféleképpen lehet a 4 golyót a 10 dobozba elhelyezni, ha egy dobozba több golyó is kerülhet?*

6. Feladat. *Egy cukorkacsomagoló üzemben egy gép 10-féle cukorkát tölt zsákocskákba. Minden zsákba 4 db cukorkát rak véletlenszerűen. Tartalmuk szerint hányféle zsák keletkezhet a töltés során?*

7. Feladat. *Van 10 doboz (beszámozva, rögzített sorrendben) és 4 db egyforma golyó. Hányféleképpen lehet a 4 golyót a 10 dobozba elhelyezni, ha egy dobozba több golyó is kerülhet?*

6. Megoldás. *Mindkét kérdésre a válasz:*

$$C_{10}^{4(i)} = \binom{10+4-1}{4} = \binom{13}{4} = 715.$$

2. Kolmogorov-féle valószínűségi mező

A σ-algebra fogalma:

A σ-algebra fogalma:
Legyen X egy tetszőleges halmaz. Azt mondjuk, hogy egy $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ halmazcsalád egy σ-algebra X-en, ha

A σ-algebra fogalma:
Legyen X egy tetszőleges halmaz. Azt mondjuk, hogy egy $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ halmazcsalád egy σ-algebra X-en, ha

1. $\emptyset \in \mathcal{A}$;

A σ-algebra fogalma:

Legyen X egy tetszőleges halmaz. Azt mondjuk, hogy egy $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ halmazcsalád egy σ-algebra X-en, ha

1. $\emptyset \in \mathcal{A}$;
2. *Ha $A \in \mathcal{A}$, akkor $\overline{A} \doteq X \setminus A \in \mathcal{A}$;*

A σ-algebra fogalma:

Legyen X egy tetszőleges halmaz. Azt mondjuk, hogy egy $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ halmazcsalád egy σ-algebra X-en, ha

1. $\emptyset \in \mathcal{A}$;
2. *Ha $A \in \mathcal{A}$, akkor $\overline{A} \doteq X \setminus A \in \mathcal{A}$;*
3. *Ha az (A_n) egy $\mathcal{A}$-beli halmazokból álló sorozat, akkor $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.*

A σ-algebra fogalma:
Legyen X egy tetszőleges halmaz. Azt mondjuk, hogy egy $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ halmazcsalád egy σ-algebra X-en, ha

1. $\emptyset \in \mathcal{A}$;
2. *Ha $A \in \mathcal{A}$, akkor $\overline{A} \doteq X \setminus A \in \mathcal{A}$;*
3. *Ha az (A_n) egy $\mathcal{A}$-beli halmazokból álló sorozat, akkor $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.*

Tehát $\mathcal{A}$ az X bizonyos részhalmazaiból álló halmazcsalád, amelyre teljesül, hogy tartalmazza az üreshalmazt, minden elemével együtt annak komplementerét, továbbá zárt a megszámlálhatóan végtelen unióra nézve.

A σ-algebra tulajdonságai:

A σ-algebra tulajdonságai:

Ha $\mathcal{A}$ egy σ-algebra az X halmazon, akkor az $\mathcal{A}$ halmazcsalád zárt a véges halmazműveletekre nézve, azaz valahányszor A, $B \in \mathcal{A}$, mindannyiszor

A σ-algebra tulajdonságai:

Ha $\mathcal{A}$ egy σ-algebra az X halmazon, akkor az $\mathcal{A}$ halmazcsalád zárt a véges halmazműveletekre nézve, azaz valahányszor A, $B \in \mathcal{A}$, mindannyiszor

- $A \cup B \in \mathcal{A}$,

A σ-algebra tulajdonságai:

Ha $\mathcal{A}$ egy σ-algebra az X halmazon, akkor az $\mathcal{A}$ halmazcsalád zárt a véges halmazműveletekre nézve, azaz valahányszor A, $B \in \mathcal{A}$, mindannyiszor

- $A \cup B \in \mathcal{A}$,
- $A \cap B \in \mathcal{A}$,

A σ-algebra tulajdonságai:

Ha $\mathcal{A}$ egy σ-algebra az X halmazon, akkor az $\mathcal{A}$ halmazcsalád zárt a véges halmazműveletekre nézve, azaz valahányszor $A, B \in \mathcal{A}$, mindannyiszor

- $A \cup B \in \mathcal{A}$,
- $A \cap B \in \mathcal{A}$,
- $A \setminus B \in \mathcal{A}$.

Kolmogorov-féle valószínűségi mező

Kolmogorov-féle valószínűségi mező

Az $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ hármast **Kolmogorov-féle valószínűségi mező**nek nevezzük, ha

Kolmogorov-féle valószínűségi mező

Az $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ hármast **Kolmogorov-féle valószínűségi mező**nek nevezzük, ha

1. Ω egy nemüres halmaz. Az Ω-t **eseménytér**nek nevezzük. Az Ω elemei az **elemi esemény**ek. Az elemi események nem események. Az Ω egyelemű részhalmazai sem feltétlenül események.

Kolmogorov-féle valószínűségi mező

Az $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ hármast **Kolmogorov-féle valószínűségi mező**nek nevezzük, ha

1. Ω egy nemüres halmaz. Az Ω-t **eseménytér**nek nevezzük. Az Ω elemei az **elemi esemény**ek. Az elemi események nem események. Az Ω egyelemű részhalmazai sem feltétlenül események.
2. $\mathcal{F}$ egy σ-algebra Ω-n. Az $\mathcal{F}$ elemeit **esemény**eknek nevezzük.

Kolmogorov-féle valószínűségi mező

Az $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ hármast **Kolmogorov-féle valószínűségi mező**nek nevezzük, ha

1. Ω egy nemüres halmaz. Az Ω-t **eseménytér**nek nevezzük. Az Ω elemei az **elemi esemény**ek. Az elemi események nem események. Az Ω egyelemű részhalmazai sem feltétlenül események.
2. $\mathcal{F}$ egy σ-algebra Ω-n. Az $\mathcal{F}$ elemeit **esemény**eknek nevezzük.
3. $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ egy olyan függvény, amely rendelkezik az úgynevezett **Kolmogorov-féle axiómák**kal:

Kolmogorov-féle axiómák

Kolmogorov-féle axiómák

A $\mathbb{P}$ függvény rendelkezik a következő tulajdonságokkal:

Kolmogorov-féle axiómák

A $\mathbb{P}$ függvény rendelkezik a következő tulajdonságokkal:

I. **Nemnegatív**, azaz $\mathbb{P}(A) \geqslant 0$ minden $A \in \mathcal{F}$ esetén;

Kolmogorov-féle axiómák

A $\mathbb{P}$ függvény rendelkezik a következő tulajdonságokkal:

I. **Nemnegatív**, azaz $\mathbb{P}(A) \geqslant 0$ minden $A \in \mathcal{F}$ esetén;

II. **1-re normált**, azaz $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;

Kolmogorov-féle axiómák

A $\mathbb{P}$ függvény rendelkezik a következő tulajdonságokkal:

I. **Nemnegatív**, azaz $\mathbb{P}(A) \geqslant 0$ minden $A \in \mathcal{F}$ esetén;

II. **1-re normált**, azaz $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;

III. **σ-additív**, azaz

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

valahányszor az (A_n) események páronként diszjunkt tagokból álló sorozata.

Kolmogorov-féle axiómák

A $\mathbb{P}$ függvény rendelkezik a következő tulajdonságokkal:

I. **Nemnegatív**, azaz $\mathbb{P}(A) \geqslant 0$ minden $A \in \mathcal{F}$ esetén;

II. **1-re normált**, azaz $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;

III. σ-**additív**, azaz

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

valahányszor az (A_n) események páronként diszjunkt tagokból álló sorozata.

A $\mathbb{P}(A)$ számot az A esemény valószínűségének nevezzük.

Kolmogorov-féle axiómák

A $\mathbb{P}$ függvény rendelkezik a következő tulajdonságokkal:

I. **Nemnegatív**, azaz $\mathbb{P}(A) \geqslant 0$ minden $A \in \mathcal{F}$ esetén;

II. **1-re normált**, azaz $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;

III. σ-**additív**, azaz

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

valahányszor az (A_n) események páronként diszjunkt tagokból álló sorozata.

A $\mathbb{P}(A)$ számot az A esemény valószínűségének nevezzük.
Az **I.**, **II.**, **III.** axiómákat **Kolmogorov-féle axiómák**nak nevezzük.

A valószínűség tulajdonságai

A valószínűség tulajdonságai

1. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.

A valószínűség tulajdonságai

1. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.
2. $\mathbb{P}$ **végesen additív**, azaz $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ minden $A, B \in \mathcal{F}$, $A \cap B = \emptyset$ esetén.

A valószínűség tulajdonságai

1. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.
2. $\mathbb{P}$ **végesen additív**, azaz $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ minden $A, B \in \mathcal{F}$, $A \cap B = \emptyset$ esetén.
3. **Komplementer esemény valószínűsége:** $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(\overline{A})$ minden $A \in \mathcal{F}$ esetén.

A valószínűség tulajdonságai

1. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.
2. $\mathbb{P}$ **végesen additív**, azaz $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ minden $A, B \in \mathcal{F}$, $A \cap B = \emptyset$ esetén.
3. **Komplementer esemény valószínűsége:** $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(\overline{A})$ minden $A \in \mathcal{F}$ esetén.
4. **A valószínűség monotonitása:** Ha $A, B \in \mathcal{F}$ úgy, hogy $A \subseteq B$, akkor $\mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$.

A valószínűség tulajdonságai

1. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.
2. $\mathbb{P}$ **végesen additív**, azaz $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ minden $A, B \in \mathcal{F}$, $A \cap B = \emptyset$ esetén.
3. **Komplementer esemény valószínűsége:** $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(\overline{A})$ minden $A \in \mathcal{F}$ esetén.
4. **A valószínűség monotonitása:** Ha $A, B \in \mathcal{F}$ úgy, hogy $A \subseteq B$, akkor $\mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$.
5. $0 \leqslant \mathbb{P}(A) \leqslant 1$ minden $A \in \mathcal{F}$ esetén, azaz egy esemény valószínűsége mindig egy $[0, 1]$ intervallumba eső valós szám.

A valószínűség tulajdonságai

1. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.
2. $\mathbb{P}$ **végesen additív**, azaz $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ minden $A, B \in \mathcal{F}$, $A \cap B = \emptyset$ esetén.
3. **Komplementer esemény valószínűsége:** $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(\overline{A})$ minden $A \in \mathcal{F}$ esetén.
4. **A valószínűség monotonitása:** Ha $A, B \in \mathcal{F}$ úgy, hogy $A \subseteq B$, akkor $\mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$.
5. $0 \leqslant \mathbb{P}(A) \leqslant 1$ minden $A \in \mathcal{F}$ esetén, azaz egy esemény valószínűsége mindig egy $[0, 1]$ intervallumba eső valós szám.
6. Ha $A, B \in \mathcal{F}$ úgy, hogy $A \subseteq B$, akkor $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$.

A valószínűség tulajdonságai

1. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.
2. $\mathbb{P}$ **végesen additív**, azaz $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ minden $A, B \in \mathcal{F}$, $A \cap B = \emptyset$ esetén.
3. **Komplementer esemény valószínűsége:** $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(\overline{A})$ minden $A \in \mathcal{F}$ esetén.
4. **A valószínűség monotonitása:** Ha $A, B \in \mathcal{F}$ úgy, hogy $A \subseteq B$, akkor $\mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$.
5. $0 \leqslant \mathbb{P}(A) \leqslant 1$ minden $A \in \mathcal{F}$ esetén, azaz egy esemény valószínűsége mindig egy $[0, 1]$ intervallumba eső valós szám.
6. Ha $A, B \in \mathcal{F}$ úgy, hogy $A \subseteq B$, akkor $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$.
7. **Szita formula 2 eseményre:** Ha A és B tetszőleges események, akkor $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

A valószínűség tulajdonságai

1. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.
2. $\mathbb{P}$ **végesen additív**, azaz $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ minden $A, B \in \mathcal{F}$, $A \cap B = \emptyset$ esetén.
3. **Komplementer esemény valószínűsége:** $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(\overline{A})$ minden $A \in \mathcal{F}$ esetén.
4. **A valószínűség monotonitása:** Ha $A, B \in \mathcal{F}$ úgy, hogy $A \subseteq B$, akkor $\mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$.
5. $0 \leqslant \mathbb{P}(A) \leqslant 1$ minden $A \in \mathcal{F}$ esetén, azaz egy esemény valószínűsége mindig egy $[0, 1]$ intervallumba eső valós szám.
6. Ha $A, B \in \mathcal{F}$ úgy, hogy $A \subseteq B$, akkor $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$.
7. **Szita formula 2 eseményre:** Ha A és B tetszőleges események, akkor $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.
8. **Szita formula 3 eseményre:** Ha A B és C tetszőleges események, akkor $\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - (\mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap C) + \mathbb{P}(B \cap C)) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$.

Vége az I. órának

II. óra

Klasszikus valószínűségi mező,
Műveletek eseményekkel,
Golyóhúzás urnából,
A valószínűség geometriai kiszámítási módja

1. A Klasszikus valószínűségi mező

A klasszikus valószínűségi mező

A klasszikus valószínűségi mező

Egy $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ Kolmogorov-féle valószínűségi mezőt **klaszszikus valószínűségi mező**nek nevezünk, ha

A klasszikus valószínűségi mező

Egy $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ Kolmogorov-féle valószínűségi mezőt **klaszszikus valószínűségi mező**nek nevezünk, ha

1. Ω véges halmaz;

A klasszikus valószínűségi mező

Egy $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ Kolmogorov-féle valószínűségi mezőt **klaszszikus valószínűségi mező**nek nevezünk, ha

1. Ω véges halmaz;
2. Az Ω minden 1 elemű részhalmaza esemény;

A klasszikus valószínűségi mező

Egy $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ Kolmogorov-féle valószínűségi mezőt **klaszszikus valószínűségi mező**nek nevezünk, ha

1. Ω véges halmaz;
2. Az Ω minden 1 elemű részhalmaza esemény;
3. Az Ω bármely két egyelemű részhalmaza - mint esemény - egyforma valószínűséggel következik be, azaz

$$\mathbb{P}(\{\omega_1\}) = \mathbb{P}(\{\omega_2\}) \qquad (\omega_1, \omega_2 \in \Omega).$$

A klasszikus valószínűségi mező tulajdonságai

A klasszikus valószínűségi mező tulajdonságai

Ha $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ egy klasszikus valószínűségi mező, akkor

A klasszikus valószínűségi mező tulajdonságai

Ha $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ egy klasszikus valószínűségi mező, akkor

1. $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, azaz az Ω minden részhalmaza esemény;

A klasszikus valószínűségi mező tulajdonságai

Ha $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ egy klasszikus valószínűségi mező, akkor

1. $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, azaz az Ω minden részhalmaza esemény;
2. Minden $A \in \mathcal{F}$ esetén

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{kedvező}}{\text{összes}}.$$

Példa.

Példa. *Magyar kártyából visszatevés nélkül húzunk 3 lapot. Jelölje A azt az eseményt, hogy az első kihúzott lap piros, B azt az eseményt, hogy a harmadik kihúzott lap piros. Határozzuk meg az A és a B események valószínűségét.*

Példa. *Magyar kártyából visszatevés nélkül húzunk 3 lapot. Jelölje A azt az eseményt, hogy az első kihúzott lap piros, B azt az eseményt, hogy a harmadik kihúzott lap piros. Határozzuk meg az A és a B események valószínűségét.*

Megoldás.

Példa. *Magyar kártyából visszatevés nélkül húzunk 3 lapot. Jelölje A azt az eseményt, hogy az első kihúzott lap piros, B azt az eseményt, hogy a harmadik kihúzott lap piros. Határozzuk meg az A és a B események valószínűségét.*

Megoldás.
A magyar kártyában van 4 szín (piros, zöld, makk, tök) és 8 szám (7, 8, 9, 10, alsó, felső, király, ász (=disznó)). Így a magyar kártya lapjainak száma 32.

Példa. *Magyar kártyából visszatevés nélkül húzunk 3 lapot. Jelölje A azt az eseményt, hogy az első kihúzott lap piros, B azt az eseményt, hogy a harmadik kihúzott lap piros. Határozzuk meg az A és a B események valószínűségét.*

Megoldás.
A magyar kártyában van 4 szín (piros, zöld, makk, tök) és 8 szám (7, 8, 9, 10, alsó, felső, király, ász (=disznó)). Így a magyar kártya lapjainak száma 32.

- *Jelölje Ω a kísérlet lehetséges kimeneteleinek a halmazát. Az Ω a magyar kártya lapjaiból alkotott rendezett hármasok halmaza, melyek páronként különböző lapokból állnak.*

Példa. *Magyar kártyából visszatevés nélkül húzunk 3 lapot. Jelölje A azt az eseményt, hogy az első kihúzott lap piros, B azt az eseményt, hogy a harmadik kihúzott lap piros. Határozzuk meg az A és a B események valószínűségét.*

Megoldás.
A magyar kártyában van 4 szín (piros, zöld, makk, tök) és 8 szám (7, 8, 9, 10, alsó, felső, király, ász (=disznó)). Így a magyar kártya lapjainak száma 32.

- *Jelölje Ω a kísérlet lehetséges kimeneteleinek a halmazát. Az Ω a magyar kártya lapjaiból alkotott rendezett hármasok halmaza, melyek páronként különböző lapokból állnak.*
- *Az $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ klasszikus valószínűségi mező, így alkalmazható a kedvező/összes képlet.*

Példa. *Magyar kártyából visszatevés nélkül húzunk 3 lapot. Jelölje A azt az eseményt, hogy az első kihúzott lap piros, B azt az eseményt, hogy a harmadik kihúzott lap piros. Határozzuk meg az A és a B események valószínűségét.*

Megoldás.
A magyar kártyában van 4 szín (piros, zöld, makk, tök) és 8 szám (7, 8, 9, 10, alsó, felső, király, ász (=disznó)). Így a magyar kártya lapjainak száma 32.

- *Jelölje Ω a kísérlet lehetséges kimeneteleinek a halmazát. Az Ω a magyar kártya lapjaiból alkotott rendezett hármasok halmaza, melyek páronként különböző lapokból állnak.*
- *Az $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ klasszikus valószínűségi mező, így alkalmazható a kedvező/összes képlet.*
- *Könnyű látni, hogy*

  $$|\Omega| = 32 \cdot 31 \cdot 30, \qquad |A| = 8 \cdot 31 \cdot 30, \qquad |B| = 31 \cdot 30 \cdot 8,$$

  amiből kapjuk, hogy $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \frac{1}{4}$.

Példa.

Példa. *Dobókockával dobunk. Jelölje A azt az eseményt, hogy kettővel, vagy hárommal osztható számot kapunk. Határozzuk meg az A esemény valószínűségét!*

Példa. *Dobókockával dobunk. Jelölje A azt az eseményt, hogy kettővel, vagy hárommal osztható számot kapunk. Határozzuk meg az A esemény valószínűségét!*

Megoldás.

Példa. *Dobókockával dobunk. Jelölje A azt az eseményt, hogy kettővel, vagy hárommal osztható számot kapunk. Határozzuk meg az A esemény valószínűségét!*

Megoldás.
A dobókocka szabályosságát feltételezve klasszikus valószínűségi mezőt kapunk.

Példa. *Dobókockával dobunk. Jelölje A azt az eseményt, hogy kettővel, vagy hárommal osztható számot kapunk. Határozzuk meg az A esemény valószínűségét!*

Megoldás.
A dobókocka szabályosságát feltételezve klasszikus valószínűségi mezőt kapunk.

$$\Omega \doteq \{1,2,3,4,5,6\}; \qquad A = \{2,3,4,6\}.$$

Így a kedvező/összes képlet felhasználásával kapjuk, hogy $\mathbb{P}(A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

Példa.

Példa. *Két dobókockával dobunk, egy pirossal és egy kékkel.*

Példa. *Két dobókockával dobunk, egy pirossal és egy kékkel. Jelölje A azt az eseményt, hogy a dobott számok összege 6.*

Példa. *Két dobókockával dobunk, egy pirossal és egy kékkel. Jelölje A azt az eseményt, hogy a dobott számok összege 6. Határozzuk meg az A esemény valószínűségét!*

Példa. *Két dobókockával dobunk, egy pirossal és egy kékkel. Jelölje A azt az eseményt, hogy a dobott számok összege 6. Határozzuk meg az A esemény valószínűségét!*

Megoldás.

Példa. *Két dobókockával dobunk, egy pirossal és egy kékkel. Jelölje A azt az eseményt, hogy a dobott számok összege 6. Határozzuk meg az A esemény valószínűségét!*

Megoldás.
A dobókockák szabályosságát feltételezve klasszikus valószínűségi mezőt kapunk.

Példa. *Két dobókockával dobunk, egy pirossal és egy kékkel. Jelölje A azt az eseményt, hogy a dobott számok összege 6. Határozzuk meg az A esemény valószínűségét!*

Megoldás.
A dobókockák szabályosságát feltételezve klasszikus valószínűségi mezőt kapunk.

$$\Omega \doteq \{1,2,3,4,5,6\} \times \{1,2,3,4,5,6\} = \{(i,j) | i,j = 1,2,\dots 6\},$$

Példa. *Két dobókockával dobunk, egy pirossal és egy kékkel. Jelölje A azt az eseményt, hogy a dobott számok összege 6. Határozzuk meg az A esemény valószínűségét!*

Megoldás.
A dobókockák szabályosságát feltételezve klasszikus valószínűségi mezőt kapunk.

$$\Omega \doteq \{1,2,3,4,5,6\} \times \{1,2,3,4,5,6\} = \{(i,j) | i,j = 1,2,\ldots 6\},$$
$$|\Omega| = 36;$$

Példa. *Két dobókockával dobunk, egy pirossal és egy kékkel. Jelölje A azt az eseményt, hogy a dobott számok összege 6. Határozzuk meg az A esemény valószínűségét!*

Megoldás.
A dobókockák szabályosságát feltételezve klasszikus valószínűségi mezőt kapunk.

$$\Omega \doteq \{1,2,3,4,5,6\} \times \{1,2,3,4,5,6\} = \{(i,j) | i,j = 1,2,\ldots 6\},$$
$$|\Omega| = 36;$$
$$A = \{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\},$$

Példa. *Két dobókockával dobunk, egy pirossal és egy kékkel. Jelölje A azt az eseményt, hogy a dobott számok összege 6. Határozzuk meg az A esemény valószínűségét!*

Megoldás.
A dobókockák szabályosságát feltételezve klasszikus valószínűségi mezőt kapunk.

$$\Omega \doteq \{1,2,3,4,5,6\} \times \{1,2,3,4,5,6\} = \{(i,j) | i,j = 1,2,\dots 6\},$$
$$|\Omega| = 36;$$
$$A = \{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\},$$
$$|A| = 5.$$

Példa. *Két dobókockával dobunk, egy pirossal és egy kékkel. Jelölje A azt az eseményt, hogy a dobott számok összege 6. Határozzuk meg az A esemény valószínűségét!*

Megoldás.
A dobókockák szabályosságát feltételezve klasszikus valószínűségi mezőt kapunk.

$$\begin{aligned} \Omega &\doteq \{1,2,3,4,5,6\} \times \{1,2,3,4,5,6\} = \{(i,j) | i,j = 1,2,\dots 6\}, \\ |\Omega| &= 36; \\ A &= \{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\}, \\ |A| &= 5. \end{aligned}$$

Így a kedvező/összes képlet felhasználásával kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(A) = \frac{5}{36} = 0.1389.$$

2. Műveletek eseményekkel

Műveletek eseményekkel

Műveletek eseményekkel

Mivel az események halmazok, így az eseményekkel végzett műveletek közönséges halmazműveletek.

Műveletek eseményekkel

Mivel az események halmazok, így az eseményekkel végzett műveletek közönséges halmazműveletek.
Különféle szakirodalomban találkozhatunk eltérő jelölléssekkel:

Műveletek eseményekkel

Mivel az események halmazok, így az eseményekkel végzett műveletek közönséges halmazműveletek.
Különféle szakirodalomban találkozhatunk eltérő jelölésekkel:

- $A \cup B$ helyett szokás $A + B$-t írni;

Műveletek eseményekkel

Mivel az események halmazok, így az eseményekkel végzett műveletek közönséges halmazműveletek.
Különféle szakirodalomban találkozhatunk eltérő jelölléssekkel:

- $A \cup B$ helyett szokás $A + B$-t írni;
- $A \cap B$ helyett szokás AB-t írni;

Műveletek eseményekkel

Mivel az események halmazok, így az eseményekkel végzett műveletek közönséges halmazműveletek.
Különféle szakirodalomban találkozhatunk eltérő jelöléssekkel:

- $A \cup B$ helyett szokás $A + B$-t írni;
- $A \cap B$ helyett szokás AB-t írni;
- $A \setminus B$ helyett szokás $A - B$-t írni.

Példa.

Példa.

Legyen A, B, C három esemény. Fejezzük ki az A, B, C és halmazműveletek segítségével az alábbi eseményeket:

$D \doteq$ az A, B, C események közül egy sem teljesül,

$D \doteq$ az A, B, C események közül egy sem teljesül,

$E \doteq$ az A, B, C események közül pontosan egy teljesül,

$D \doteq$ az A, B, C események közül egy sem teljesül,

$E \doteq$ az A, B, C események közül pontosan egy teljesül,

$F \doteq$ az A, B, C események közül legfeljebb egy teljesül,

$$D \doteq \text{ az } A,\ B,\ C \text{ események közül egy sem teljesül,}$$
$$E \doteq \text{ az } A,\ B,\ C \text{ események közül pontosan egy teljesül,}$$
$$F \doteq \text{ az } A,\ B,\ C \text{ események közül legfeljebb egy teljesül,}$$
$$G \doteq \text{ az } A,\ B,\ C \text{ események közül legalább egy teljesül.}$$

$$
\begin{aligned}
D &\doteq \text{ az } A,\ B,\ C \text{ események közül egy sem teljesül,}\\
E &\doteq \text{ az } A,\ B,\ C \text{ események közül pontosan egy teljesül,}\\
F &\doteq \text{ az } A,\ B,\ C \text{ események közül legfeljebb egy teljesül,}\\
G &\doteq \text{ az } A,\ B,\ C \text{ események közül legalább egy teljesül.}
\end{aligned}
$$

Megoldás.

$$D \doteq \text{ az } A,\ B,\ C \text{ események közül egy sem teljesül,}$$
$$E \doteq \text{ az } A,\ B,\ C \text{ események közül pontosan egy teljesül,}$$
$$F \doteq \text{ az } A,\ B,\ C \text{ események közül legfeljebb egy teljesül,}$$
$$G \doteq \text{ az } A,\ B,\ C \text{ események közül legalább egy teljesül.}$$

Megoldás.

$$D = \overline{A \cup B \cup C} = \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C},$$

$$D \doteq \text{ az } A,\ B,\ C \text{ események közül egy sem teljesül,}$$
$$E \doteq \text{ az } A,\ B,\ C \text{ események közül pontosan egy teljesül,}$$
$$F \doteq \text{ az } A,\ B,\ C \text{ események közül legfeljebb egy teljesül,}$$
$$G \doteq \text{ az } A,\ B,\ C \text{ események közül legalább egy teljesül.}$$

Megoldás.

$$D = \overline{A \cup B \cup C} = \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C},$$
$$E = (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C),$$

$D \doteq$ az A, B, C események közül egy sem teljesül,

$E \doteq$ az A, B, C események közül pontosan egy teljesül,

$F \doteq$ az A, B, C események közül legfeljebb egy teljesül,

$G \doteq$ az A, B, C események közül legalább egy teljesül.

Megoldás.

$$D = \overline{A \cup B \cup C} = \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C},$$

$$E = (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C),$$

$$F = (\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C),$$

$D \doteq$ az A, B, C események közül egy sem teljesül,
$E \doteq$ az A, B, C események közül pontosan egy teljesül,
$F \doteq$ az A, B, C események közül legfeljebb egy teljesül,
$G \doteq$ az A, B, C események közül legalább egy teljesül.

Megoldás.

$$D = \overline{A \cup B \cup C} = \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C},$$
$$E = (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C),$$
$$F = (\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C),$$
$$G = A \cup B \cup C.$$

$H \doteq$ az A, B, C események közül pontosan kettő teljesül,

$$
\begin{aligned}
H &\doteq \text{ az } A,\ B,\ C \text{ események közül pontosan kettő teljesül,}\\
I &\doteq \text{ az } A,\ B,\ C \text{ események közül legfeljebb kettő teljesül,}
\end{aligned}
$$

$$H \doteq \text{ az } A,\ B,\ C \text{ események közül pontosan kettő teljesül,}$$
$$I \doteq \text{ az } A,\ B,\ C \text{ események közül legfeljebb kettő teljesül,}$$
$$J \doteq \text{ az } A,\ B,\ C \text{ események közül legalább kettő teljesül,}$$

$$
\begin{aligned}
H &\doteq \text{ az } A,\ B,\ C \text{ események közül pontosan kettő teljesül,}\\
I &\doteq \text{ az } A,\ B,\ C \text{ események közül legfeljebb kettő teljesül,}\\
J &\doteq \text{ az } A,\ B,\ C \text{ események közül legalább kettő teljesül,}\\
K &\doteq \text{ az } A,\ B,\ C \text{ események közül mindhárom teljesül.}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
H &\doteq \text{ az } A,\ B,\ C \text{ események közül pontosan kettő teljesül,}\\
I &\doteq \text{ az } A,\ B,\ C \text{ események közül legfeljebb kettő teljesül,}\\
J &\doteq \text{ az } A,\ B,\ C \text{ események közül legalább kettő teljesül,}\\
K &\doteq \text{ az } A,\ B,\ C \text{ események közül mindhárom teljesül.}
\end{aligned}
$$

Megoldás.

$$H \doteq \text{ az } A,\ B,\ C \text{ események közül pontosan kettő teljesül,}$$
$$I \doteq \text{ az } A,\ B,\ C \text{ események közül legfeljebb kettő teljesül,}$$
$$J \doteq \text{ az } A,\ B,\ C \text{ események közül legalább kettő teljesül,}$$
$$K \doteq \text{ az } A,\ B,\ C \text{ események közül mindhárom teljesül.}$$

Megoldás.

$$H = (A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap \overline{B} \cap C) \cup (\overline{A} \cap B \cap C),$$

$$H \doteq \text{ az } A,\ B,\ C \text{ események közül pontosan kettő teljesül,}$$
$$I \doteq \text{ az } A,\ B,\ C \text{ események közül legfeljebb kettő teljesül,}$$
$$J \doteq \text{ az } A,\ B,\ C \text{ események közül legalább kettő teljesül,}$$
$$K \doteq \text{ az } A,\ B,\ C \text{ események közül mindhárom teljesül.}$$

Megoldás.

$$H = (A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap \overline{B} \cap C) \cup (\overline{A} \cap B \cap C),$$
$$I = \overline{A \cap B \cap C} = \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C},$$

$$
\begin{aligned}
H &\doteq \text{ az } A,\ B,\ C \text{ események közül pontosan kettő teljesül,}\\
I &\doteq \text{ az } A,\ B,\ C \text{ események közül legfeljebb kettő teljesül,}\\
J &\doteq \text{ az } A,\ B,\ C \text{ események közül legalább kettő teljesül,}\\
K &\doteq \text{ az } A,\ B,\ C \text{ események közül mindhárom teljesül.}
\end{aligned}
$$

Megoldás.

$$
\begin{aligned}
H &= (A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap \overline{B} \cap C) \cup (\overline{A} \cap B \cap C),\\
I &= \overline{A \cap B \cap C} = \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C},\\
J &= (A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C),
\end{aligned}
$$

$$H \doteq \text{ az } A,\ B,\ C \text{ események közül pontosan kettő teljesül,}$$
$$I \doteq \text{ az } A,\ B,\ C \text{ események közül legfeljebb kettő teljesül,}$$
$$J \doteq \text{ az } A,\ B,\ C \text{ események közül legalább kettő teljesül,}$$
$$K \doteq \text{ az } A,\ B,\ C \text{ események közül mindhárom teljesül.}$$

Megoldás.

$$\begin{aligned}
H &= (A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap \overline{B} \cap C) \cup (\overline{A} \cap B \cap C),\\
I &= \overline{A \cap B \cap C} = \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C},\\
J &= (A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C),\\
K &= A \cap B \cap C.
\end{aligned}$$

3. Golyóhúzás urnából

Jelölések

Jelölések

Ebben a részben tárgyaljuk a visszatevéses és a visszatevés nélküli golyóhúzást urnából. Mindkét esetben az alábbi jelöléseket alkalmazzuk:

Jelölések

Ebben a részben tárgyaljuk a visszatevéses és a visszatevés nélküli golyóhúzást urnából. Mindkét esetében az alábbi jelöléseket alkalmazzuk:

> N: jelöli az urnában lévő golyók számát;

Jelölések

Ebben a részben tárgyaljuk a visszatevéses és a visszatevés nélküli golyóhúzást urnából. Mindkét eseteben az alábbi jelöléseket alkalmazzuk:

N: jelöli az urnában lévő golyók számát;

s: az urnában lépő piros golyók száma $(0 \leqslant s \leqslant N)$;

Jelölések

Ebben a részben tárgyaljuk a visszatevéses és a visszatevés nélküli golyóhúzást urnából. Mindkét eseteben az alábbi jelöléseket alkalmazzuk:

N: jelöli az urnában lévő golyók számát;

s: az urnában lépő piros golyók száma $(0 \leqslant s \leqslant N)$;

$N - s$: az urnában lépő fehér golyók száma;

Jelölések

Ebben a részben tárgyaljuk a visszatevéses és a visszatevés nélküli golyóhúzást urnából. Mindkét esetében az alábbi jelöléseket alkalmazzuk:

N: jelöli az urnában lévő golyók számát;

s: az urnában lépő piros golyók száma ($0 \leqslant s \leqslant N$);

$N - s$: az urnában lépő fehér golyók száma;

n: golyót húzunk ki az urnából;

Jelölések

Ebben a részben tárgyaljuk a visszatevéses és a visszatevés nélküli golyóhúzást urnából. Mindkét eseteben az alábbi jelöléseket alkalmazzuk:

N: jelöli az urnában lévő golyók számát;

s: az urnában lépő piros golyók száma $(0 \leqslant s \leqslant N)$;

$N - s$: az urnában lépő fehér golyók száma;

n: golyót húzunk ki az urnából;

k: a kihúzott golyók közül a piros golyók száma.

A golyók halmaza:

$$\{P_1, P_2, \dots, P_s, F_1, F_2, \dots, F_{N-s}\}.$$

A golyók halmaza:

$$\{P_1, P_2, \dots, P_s, F_1, F_2, \dots, F_{N-s}\}.$$

A golyókat mindkét esetben egyenként húzzuk ki az urnából.

A golyók halmaza:

$$\{P_1, P_2, \dots, P_s, F_1, F_2, \dots, F_{N-s}\}.$$

A golyókat mindkét esetben egyenként húzzuk ki az urnából.

- **A visszatevéses esetben**, a kihúzott golyót - miután megnéztük a színét - visszarakjuk az urnába, majd újra húzunk.

A golyók halmaza:

$$\{P_1, P_2, \ldots, P_s, F_1, F_2, \ldots, F_{N-s}\}.$$

A golyókat mindkét esetben egyenként húzzuk ki az urnából.

- **A visszatevéses esetben**, a kihúzott golyót - miután megnéztük a színét - visszarakjuk az urnába, majd újra húzunk.
- **A visszatevés nélküli esetben** a kihúzott golyót nem rakjuk vissza az urnába.

A golyók halmaza:

$$\{P_1, P_2, \ldots, P_s, F_1, F_2, \ldots, F_{N-s}\}.$$

A golyókat mindkét esetben egyenként húzzuk ki az urnából.

- **A visszatevéses esetben**, a kihúzott golyót - miután megnéztük a színét - visszarakjuk az urnába, majd újra húzunk.
- **A visszatevés nélküli esetben** a kihúzott golyót nem rakjuk vissza az urnába.

Jelölje A_k azt az eseményt, hogy a kihúzott golyók között k db piros golyó van. A $p_k = \mathbb{P}(A_k)$ valószínűséget keressük.

Golyóhúzás visszatevéssel

Golyóhúzás visszatevéssel

A keresett valószínűség:

$$p_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \qquad (k = 0, 1, \ldots, n),$$

ahol $p = \frac{s}{N}$ ami a piros golyó húzásának a valószínűsége.

Golyóhúzás visszatevés nélkül

Golyóhúzás visszatevés nélkül

A keresett valószínűség:

$$p_k = \frac{\binom{s}{k}\binom{N-s}{n-k}}{\binom{N}{n}} \qquad (\max(0, n-(N-s)) \leqslant k \leqslant \min(s, n)).$$

1. Feladat.

1. Feladat.

Egy külföldi ösztöndíjra kiírt pályázat elbírálásának utolsó fordulójára 9 egyenlő képességű jelölt maradt, 5 fiú és 4 lány. A bíráló bizottság ezután sorsolással választ ki közülük 4 főt. Mi a valószínűsége, hogy a kiválasztottak között lesz lány?

1. Feladat.
Egy külföldi ösztöndíjra kiírt pályázat elbírálásának utolsó fordulójára 9 egyenlő képességű jelölt maradt, 5 fiú és 4 lány. A bíráló bizottság ezután sorsolással választ ki közülük 4 főt. Mi a valószínűsége, hogy a kiválasztottak között lesz lány?

1. Megoldás.

1. Feladat.

Egy külföldi ösztöndíjra kiírt pályázat elbírálásának utolsó fordulójára 9 egyenlő képességű jelölt maradt, 5 fiú és 4 lány. A bíráló bizottság ezután sorsolással választ ki közülük 4 főt. Mi a valószínűsége, hogy a kiválasztottak között lesz lány?

1. Megoldás.

A golyóhúzás urnából visszatevés nélküli esetére vonatkozó képletet alkalmazzuk.

1. Feladat.

Egy külföldi ösztöndíjra kiírt pályázat elbírálásának utolsó fordulójára 9 egyenlő képességű jelölt maradt, 5 fiú és 4 lány. A bíráló bizottság ezután sorsolással választ ki közülük 4 főt. Mi a valószínűsége, hogy a kiválasztottak között lesz lány?

1. Megoldás.

A golyóhúzás urnából visszatevés nélküli esetére vonatkozó képletet alkalmazzuk.

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\binom{4}{1}\binom{5}{3}}{\binom{9}{4}} + \frac{\binom{4}{2}\binom{5}{2}}{\binom{9}{4}} + \frac{\binom{4}{3}\binom{5}{1}}{\binom{9}{4}} + \frac{\binom{4}{4}\binom{5}{0}}{\binom{9}{4}} =$$

1. Feladat.

Egy külföldi ösztöndíjra kiírt pályázat elbírálásának utolsó fordulójára 9 egyenlő képességű jelölt maradt, 5 fiú és 4 lány. A bíráló bizottság ezután sorsolással választ ki közülük 4 főt. Mi a valószínűsége, hogy a kiválasztottak között lesz lány?

1. Megoldás.

A golyóhúzás urnából visszatevés nélküli esetére vonatkozó képletet alkalmazzuk.

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\binom{4}{1}\binom{5}{3}}{\binom{9}{4}} + \frac{\binom{4}{2}\binom{5}{2}}{\binom{9}{4}} + \frac{\binom{4}{3}\binom{5}{1}}{\binom{9}{4}} + \frac{\binom{4}{4}\binom{5}{0}}{\binom{9}{4}} =$$

$$= \frac{40 + 60 + 20 + 1}{126} = \frac{121}{126} = 0.9603.$$

4. A valószínűség geometriai kiszámítási módja

A valószínűség geometriai kiszámítási módja

A valószínűség geometriai kiszámítási módja

Az A esemény ismeretlen valószínűségének a meghatározására olyan modellt használunk, melyben Ω egy olyan ponthalmaz, amelyet valamilyen módon tudunk mérni (például ívhossz, felszín térfogat) az Ω mértéke pozitív, de véges. Jelöljük ezt a mértéket m-mel. Az $A \subseteq \Omega$ halmaznak szintén létezik az m szerinti mértéke. Ekkor

$$\mathbb{P}(A) \doteq \frac{m(A)}{m(\Omega)}.$$

2. Feladat. *Egy ügyfélszolgálaton az ügyintézés 30 percet vesz igénybe. Az egyik nap két ismerős megy be az ügyfélszolgálatra egymástól függetlenül 8 és 12 óra között véletlenül választva az időpontot. Mi a valószínűsége, hogy lesz olyan időpont, amikor egyszerre vannak bent?*

2. Megoldás.

2. Megoldás.

A feladatot átfogalmazzuk a következő módon:

2. Megoldás.

A feladatot átfogalmazzuk a következő módon:
Ledobunk két pontot x*-et és* y*-t a* $[0, 240]$ *intervallumra véletlenszerűen, egymástól függetlenül.*

2. Megoldás.

A feladatot átfogalmazzuk a következő módon:
Ledobunk két pontot x-et és y-t a $[0, 240]$ *intervallumra véletlenszerűen, egymástól függetlenül.*
Mennyi a valószínűsége, hogy $|x - y| \leqslant 30$*?*

2. Megoldás.

A feladatot átfogalmazzuk a következő módon:
Ledobunk két pontot x-et és y-t a $[0, 240]$ *intervallumra véletlenszerűen, egymástól függetlenül.*
Mennyi a valószínűsége, hogy $|x - y| \leqslant 30$*?*
Bevezetünk néhány jelölést:

2. Megoldás.

A feladatot átfogalmazzuk a következő módon:
Ledobunk két pontot x-et és y-t a $[0, 240]$ *intervallumra véletlenszerűen, egymástól függetlenül.*
Mennyi a valószínűsége, hogy $|x - y| \leqslant 30$*?*
Bevezetünk néhány jelölést:

$$\Omega \doteq [0, 240] \times [0, 240],$$

2. Megoldás.

A feladatot átfogalmazzuk a következő módon:
Ledobunk két pontot x*-et és* y*-t a* $[0, 240]$ *intervallumra véletlenszerűen, egymástól függetlenül.*
Mennyi a valószínűsége, hogy $|x - y| \leqslant 30$*?*
Bevezetünk néhány jelölést:

$$\begin{aligned} \Omega &\doteq [0, 240] \times [0, 240], \\ A &\doteq \{(x, y) \in \Omega \mid |x - y| \leqslant 30\} . \end{aligned}$$

Ekkor:

Ekkor:

$$|x-y| \leqslant 30 \quad \Leftrightarrow \quad -30 \leqslant x-y \leqslant 30 \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad y \leqslant x+30 \quad \text{és} \quad x-30 \leqslant y.$$

Ekkor:

$$|x-y| \leqslant 30 \quad \Leftrightarrow \quad -30 \leqslant x-y \leqslant 30 \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad y \leqslant x+30 \quad \text{és} \quad x-30 \leqslant y.$$

Az $y \leqslant x+30$ egyenlőtlenségnek eleget tevő pontok halmaza a síkban az $y = x+30$ egyenes "alatti" pontok halmaza.

Ekkor:

$$|x - y| \leqslant 30 \quad \Leftrightarrow \quad -30 \leqslant x - y \leqslant 30 \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad y \leqslant x + 30 \quad \text{és} \quad x - 30 \leqslant y.$$

Az $y \leqslant x + 30$ egyenlőtlenségnek eleget tevő pontok halmaza a síkban az $y = x + 30$ egyenes "alatti" pontok halmaza.
Az $x - 30 \leqslant y$ egyenlőtlenségnek eleget tevő pontok halmaza a síkban az $x - 30 = y$ egyenes "feletti" pontok halmaza.

Ekkor:

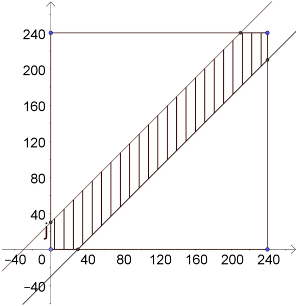
$$|x-y| \leqslant 30 \quad \Leftrightarrow \quad -30 \leqslant x-y \leqslant 30 \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad y \leqslant x+30 \quad \text{és} \quad x-30 \leqslant y.$$

Az $y \leqslant x+30$ egyenlőtlenségnek eleget tevő pontok halmaza a síkban az $y = x+30$ egyenes "alatti" pontok halmaza.
Az $x-30 \leqslant y$ egyenlőtlenségnek eleget tevő pontok halmaza a síkban az $x-30 = y$ egyenes "feletti" pontok halmaza.
A két félsík metszete egy sáv.

Ekkor:

$$|x-y| \leqslant 30 \quad \Leftrightarrow \quad -30 \leqslant x-y \leqslant 30 \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad y \leqslant x+30 \quad \text{és} \quad x-30 \leqslant y.$$

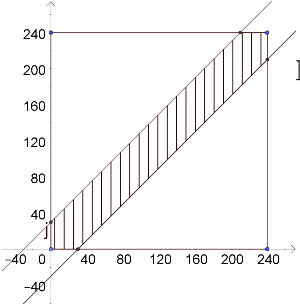
Az $y \leqslant x+30$ egyenlőtlenségnek eleget tevő pontok halmaza a síkban az $y = x+30$ egyenes "alatti" pontok halmaza.
Az $x-30 \leqslant y$ egyenlőtlenségnek eleget tevő pontok halmaza a síkban az $x-30 = y$ egyenes "feletti" pontok halmaza.
A két félsík metszete egy sáv.
Így kapjuk, hogy



Ekkor:

$$|x-y| \leqslant 30 \quad \Leftrightarrow \quad -30 \leqslant x-y \leqslant 30 \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad y \leqslant x+30 \quad \text{és} \quad x-30 \leqslant y.$$

Az $y \leqslant x+30$ egyenlőtlenségnek eleget tevő pontok halmaza a síkban az $y = x+30$ egyenes "alatti" pontok halmaza.
Az $x-30 \leqslant y$ egyenlőtlenségnek eleget tevő pontok halmaza a síkban az $x-30 = y$ egyenes "feletti" pontok halmaza.
A két félsík metszete egy sáv.
Így kapjuk, hogy



$$\mathbb{P}(A) = \frac{T(A)}{T(\Omega)} =$$
$$= \frac{240^2 - 2\frac{(240-30)^2}{2}}{240^2} = \frac{240^2 - 210^2}{240^2} =$$
$$= 1 - \left(\frac{210}{240}\right)^2 = \frac{15}{64} = 0.2344.$$

Vége az II. órának

III. óra

A feltételes valószínűség, Bayes-formula, teljes valószínűség tétele, Bayes Tétel, Események függetlensége

1. A feltételes valószínűség

A feltételes valószínűség

Legyenek A, $B \in \mathcal{F}$ események úgy, hogy $\mathbb{P}(B) \neq 0$. Ekkor

$$\mathbb{P}(A|B) \doteq \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

A $\mathbb{P}(A \mid B)$ az A esemény valószínűsége, feltéve, hogy a B esemény bekövetkezik.

A feltételes valószínűség tulajdonságai

A feltételes valószínűség tulajdonságai

1. Véges additivitás feltételes valószínűségre:

$$\mathbb{P}(A \cup B | C) = \mathbb{P}(A|C) + \mathbb{P}(B|C)$$

valahányszor A, B, $C \in \mathcal{F}$ úgy, hogy $\mathbb{P}(C) \neq 0$, $A \cap B = \emptyset$.

A feltételes valószínűség tulajdonságai

1. **Véges additivitás feltételes valószínűségre:**

   $$\mathbb{P}(A \cup B | C) = \mathbb{P}(A|C) + \mathbb{P}(B|C)$$

   valahányszor A, B, $C \in \mathcal{F}$ úgy, hogy $\mathbb{P}(C) \neq 0$, $A \cap B = \emptyset$.
2. **Komplementer esemény feltételes valószínűsége:**

   $$\mathbb{P}\left(\overline{A}|B\right) = 1 - \mathbb{P}(A|B)$$

   valahányszor A, $B \in \mathcal{F}$ úgy, hogy $\mathbb{P}(B) \neq 0$.

1. Feladat.

1. Feladat. *Az alábbi adatokat ismerjük:*

a. $\mathbb{P}(A) = 0.36$, *b.* $\mathbb{P}(A|B) = 0.43$, *c.* $\mathbb{P}(B|A) = 0.93$.

1. Feladat. *Az alábbi adatokat ismerjük:*

a. $\mathbb{P}(A) = 0.36$, *b.* $\mathbb{P}(A|B) = 0.43$, *c.* $\mathbb{P}(B|A) = 0.93$.

Mennyi a valószínűsége, hogy az A és B legalább egyike bekövetkezik?

1. Feladat. *Az alábbi adatokat ismerjük:*

a. $\mathbb{P}(A) = 0.36$, *b.* $\mathbb{P}(A|B) = 0.43$, *c.* $\mathbb{P}(B|A) = 0.93$.

Mennyi a valószínűsége, hogy az A és B legalább egyike bekövetkezik?

1. Megoldás. *A* $\mathbb{P}(A \cup B)$ *valószínűséget keressük.*

1. Feladat. *Az alábbi adatokat ismerjük:*

a. $\mathbb{P}(A) = 0.36$, *b.* $\mathbb{P}(A|B) = 0.43$, *c.* $\mathbb{P}(B|A) = 0.93$.

Mennyi a valószínűsége, hogy az A és B legalább egyike bekövetkezik?

1. Megoldás. *A* $\mathbb{P}(A \cup B)$ *valószínűséget keressük. Az* ***a.****-ból és a* ***c.****-ból kapjuk, hogy*

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B|A) \cdot \mathbb{P}(A) = 0.93 \cdot 0.36 = 0.3348.$$

1. Feladat. *Az alábbi adatokat ismerjük:*

a. $\mathbb{P}(A) = 0.36$, *b.* $\mathbb{P}(A|B) = 0.43$, *c.* $\mathbb{P}(B|A) = 0.93$.

Mennyi a valószínűsége, hogy az A és B legalább egyike bekövetkezik?

1. Megoldás. *A* $\mathbb{P}(A \cup B)$ *valószínűséget keressük. Az* ***a.****-ból és a* ***c.****-ból kapjuk, hogy*

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B|A) \cdot \mathbb{P}(A) = 0.93 \cdot 0.36 = 0.3348.$$

ezt ***b.****-vel összevetve kapjuk, hogy*

$$\mathbb{P}(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A|B)} = \frac{0.3348}{0.43} = 0.7786.$$

1. Feladat. *Az alábbi adatokat ismerjük:*

a. $\mathbb{P}(A) = 0.36$, *b.* $\mathbb{P}(A|B) = 0.43$, *c.* $\mathbb{P}(B|A) = 0.93$.

Mennyi a valószínűsége, hogy az A és B legalább egyike bekövetkezik?

1. Megoldás. *A* $\mathbb{P}(A \cup B)$ *valószínűséget keressük. Az* ***a.****-ból és a* ***c.****-ból kapjuk, hogy*

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B|A) \cdot \mathbb{P}(A) = 0.93 \cdot 0.36 = 0.3348.$$

ezt ***b.****-vel összevetve kapjuk, hogy*

$$\mathbb{P}(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A|B)} = \frac{0.3348}{0.43} = 0.7786.$$

így a szita-formula alapján kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = 0.36 + 0.7786 - 0.3348 = 0.8038.$$

2. A Bayes tétel

A Bayes Formula

A Bayes Formula

Definíció alapján könnyen megkapható, hogyha $A, B \in \mathcal{F}$ úgy, hogy $\mathbb{P}(A) \neq 0$ és $\mathbb{P}(B) \neq 0$, akkor

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B) \cdot \mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)}.$$

Teljes eseményrendszer

Teljes eseményrendszer

Legyenek B_1, $B_2, \dots \in \mathcal{F}$ úgy, hogy $B_j \cap B_k = \emptyset$, ha és $j \neq k$. A (B_n) eseményrendszert **teljes eseményrendszer**nek nevezzük, ha $\bigcup_n B_n = \Omega$.

Teljes eseményrendszer

Legyenek $B_1,\ B_2, \dots \in \mathcal{F}$ úgy, hogy $B_j \cap B_k = \emptyset$, ha és $j \neq k$. A (B_n) eseményrendszert **teljes eseményrendszer**nek nevezzük, ha $\bigcup_n B_n = \Omega$.
Azaz a teljes eseményrendszer események egy véges, vagy végtelen sorozata, amely az Ω páronként diszjunkt tagokból álló lefedését adja.

A teljes valószínűség tétele

A teljes valószínűség tétele

Ha B_1, $B_2, \ldots,$ B_n egy olyan teljes eseményrendszer amelyre $\mathbb{P}(B_i) \neq 0$ minden $i = 1,$ $2\ldots, n$ esetén, $A \in \mathcal{F}$ egy további esemény, akkor

A teljes valószínűség tétele

Ha B_1, $B_2, \ldots$, B_n egy olyan teljes eseményrendszer amelyre $\mathbb{P}(B_i) \neq 0$ minden $i = 1$, $2 \ldots, n$ esetén, $A \in \mathcal{F}$ egy további esemény, akkor

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(A|B_j)\mathbb{P}(B_j).$$

2. Feladat.

2. Feladat. *20 doboz mindegyikében 36 golyó van, amelyek közül rendre 17, 18, 19, ... , 36 fehér. Találomra választunk egy dobozt, majd véletlenül kihúzunk egy golyót. Mi a valószínűsége, hogy fehér golyót húzunk?*

2. Feladat. *20 doboz mindegyikében 36 golyó van, amelyek közül rendre 17, 18, 19, ... , 36 fehér. Találomra választunk egy dobozt, majd véletlenül kihúzunk egy golyót. Mi a valószínűsége, hogy fehér golyót húzunk?*

2. Megoldás.

2. Feladat. *20 doboz mindegyikében 36 golyó van, amelyek közül rendre 17, 18, 19, ... , 36 fehér. Találomra választunk egy dobozt, majd véletlenül kihúzunk egy golyót. Mi a valószínűsége, hogy fehér golyót húzunk?*

2. Megoldás.
Vezessük be a következő jelöléseket.

$$A \doteq \textit{fehér golyót húzunk},$$
$$B_i \doteq \textit{az i-edik dobozt választjuk} \quad (i = 1, 2, \ldots, 20).$$

2. Feladat. *20 doboz mindegyikében 36 golyó van, amelyek közül rendre 17, 18, 19, ... , 36 fehér. Találomra választunk egy dobozt, majd véletlenül kihúzunk egy golyót. Mi a valószínűsége, hogy fehér golyót húzunk?*

2. Megoldás.
Vezessük be a következő jelöléseket.

$$A \doteq \textit{fehér golyót húzunk},$$
$$B_i \doteq \textit{az i-edik dobozt választjuk} \quad (i = 1, 2, \ldots, 20).$$

Az $\mathbb{P}(A)$ *valószínűséget keressük.*

2. Feladat. *20 doboz mindegyikében 36 golyó van, amelyek közül rendre 17, 18, 19, ... , 36 fehér. Találomra választunk egy dobozt, majd véletlenül kihúzunk egy golyót. Mi a valószínűsége, hogy fehér golyót húzunk?*

2. Megoldás.
Vezessük be a következő jelöléseket.

$$A \doteq \textit{fehér golyót húzunk},$$
$$B_i \doteq \textit{az i-edik dobozt választjuk} \quad (i = 1, 2, \ldots, 20).$$

Az $\mathbb{P}(A)$ *valószínűséget keressük.*
Mivel a B_1, B_2, ..., B_{20} *események teljes eseményrendszert alkotnak és* $\mathbb{P}(B_j) = \mathbb{P}(B_k)$ *valahányszor* $j, k = 1, 2, \ldots 20$, *így* $\mathbb{P}(B_i) = \frac{1}{20}$ *minden* $i = 1, 2, \ldots 20$ *esetén. Tudjuk továbbá, hogy*

$$\mathbb{P}(A|B_i) = \frac{17 + i - 1}{36} \qquad (i = 1, 2, \ldots 20).$$

Így a teljes valószínűség tétele alapján kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{20} \mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i) =$$

Így a teljes valószínűség tétele alapján kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \sum_{i=1}^{20} \mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i) = \\ &= \frac{17}{36}\cdot\frac{1}{20} + \frac{18}{36}\cdot\frac{1}{20} + \cdots + \frac{36}{36}\cdot\frac{1}{20} =\end{aligned}$$

Így a teljes valószínűség tétele alapján kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \sum_{i=1}^{20} \mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i) = \\ &= \frac{17}{36} \cdot \frac{1}{20} + \frac{18}{36} \cdot \frac{1}{20} + \cdots + \frac{36}{36} \cdot \frac{1}{20} = \\ &= \frac{1}{36} \cdot \frac{1}{20} \cdot (17 + 18 + \cdots + 36) =\end{aligned}$$

Így a teljes valószínűség tétele alapján kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{20} \mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i) = \\
&= \frac{17}{36} \cdot \frac{1}{20} + \frac{18}{36} \cdot \frac{1}{20} + \cdots + \frac{36}{36} \cdot \frac{1}{20} = \\
&= \frac{1}{36} \cdot \frac{1}{20} \cdot (17 + 18 + \cdots + 36) = \\
&= \frac{1}{36} \cdot \frac{1}{20} \cdot \frac{17 + 36}{2} \cdot 20 =
\end{aligned}$$

Így a teljes valószínűség tétele alapján kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A) &= \sum_{i=1}^{20} \mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i) = \\
&= \frac{17}{36} \cdot \frac{1}{20} + \frac{18}{36} \cdot \frac{1}{20} + \cdots + \frac{36}{36} \cdot \frac{1}{20} = \\
&= \frac{1}{36} \cdot \frac{1}{20} \cdot (17 + 18 + \cdots + 36) = \\
&= \frac{1}{36} \cdot \frac{1}{20} \cdot \frac{17+36}{2} \cdot 20 = \\
&= \frac{17+36}{2 \cdot 36} = 0.7361.
\end{aligned}$$

Bayes Tétel

Bayes Tétel

Ha B_1, $B_2, \ldots,$ B_n egy olyan teljes eseményrendszer amelyre $\mathbb{P}(B_i) \neq 0$ minden $i = 1,\ 2\ldots, n$ esetén, $A \in \mathcal{F}$ egy további esemény úgy, hogy $\mathbb{P}(A) \neq 0$, akkor

Bayes Tétel

Ha B_1, $B_2, \ldots$, B_n egy olyan teljes eseményrendszer amelyre $\mathbb{P}(B_i) \neq 0$ minden $i = 1$, $2 \ldots, n$ esetén, $A \in \mathcal{F}$ egy további esemény úgy, hogy $\mathbb{P}(A) \neq 0$, akkor

$$\mathbb{P}(B_i|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i)}{\sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(A|B_j)\mathbb{P}(B_j)}.$$

3. Feladat.

3. Feladat. *Egy terméket három üzemben készítenek. A három üzemben a selejtszázalék rendre 0.05, 0.2 és 0.1, míg a három üzemben az össztermének rendre 60, 30 és 10 százalékát állítják elő. Az össztermékből kivesznek egy darabot, és az hibás. Mi a valószínűsége, hogy az első üzemben gyártották?*

3. Megoldás.

3. Megoldás.

Vezessük be a következő jelöléseket:

$B_i \doteq$ *a kiválasztot terméket az i-edik üzemben gyártották* $\qquad (i = 1, 2, 3)$

$A \doteq$ *a kiválasztot termék hibás.*

3. Megoldás.

Vezessük be a következő jelöléseket:

$B_i \doteq$ *a kiválasztot terméket az i-edik üzemben gyártották* $\quad (i = 1, 2, 3)$

$A \doteq$ *a kiválasztot termék hibás.*

Felhasználva a fenti jelöléseket, az alábbi adatokat ismerjük:

	I. gép	*II. gép*	*III. gép*
termelés	$\mathbb{P}(B_1) = 0.6$	$\mathbb{P}(B_2) = 0.3$	$\mathbb{P}(B_3) = 0.1$
selejtszázalék	$\mathbb{P}(A \mid B_1) = 0.05$	$\mathbb{P}(A \mid B_2) = 0.2$	$\mathbb{P}(A \mid B_3) = 0.10$

3. Megoldás.

Vezessük be a következő jelöléseket:

$B_i \doteq$ *a kiválasztot terméket az i-edik üzemben gyártották* $\qquad (i = 1, 2, 3)$

$A \doteq$ *a kiválasztot termék hibás.*

Felhasználva a fenti jelöléseket, az alábbi adatokat ismerjük:

	I. gép	*II. gép*	*III. gép*
termelés	$\mathbb{P}(B_1) = 0.6$	$\mathbb{P}(B_2) = 0.3$	$\mathbb{P}(B_3) = 0.1$
selejtszázalék	$\mathbb{P}(A\|B_1) = 0.05$	$\mathbb{P}(A\|B_2) = 0.2$	$\mathbb{P}(A\|B_3) = 0.10$

A táblázat második sorából a 10^{-2} *szorzótényezőket kihagytuk, de - mint ahogy azt látni fogjuk - nincsenek hatással a végeredményre, csak a feltételes valószínűségek aránya fontos. A* $\mathbb{P}(B_1|A)$ *feltételes valószínűséget keressük.*

Mivel a B_1, B_2, B_3 események nemzérus valószínűségű eseményekből álló teljes eseményrendszert alkotnak, így alkalmazható a Bayes Tétel.

$$\mathbb{P}(B_1|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B_1)\mathbb{P}(B_1)}{\mathbb{P}(A|B_1)\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(A|B_2)\mathbb{P}(B_2) + \mathbb{P}(A|B_3)\mathbb{P}(B_3)} =$$

Mivel a B_1, B_2, B_3 események nemzérus valószínűségű eseményekből álló teljes eseményrendszert alkotnak, így alkalmazható a Bayes Tétel.

$$\mathbb{P}(B_1|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B_1)\mathbb{P}(B_1)}{\mathbb{P}(A|B_1)\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(A|B_2)\mathbb{P}(B_2) + \mathbb{P}(A|B_3)\mathbb{P}(B_3)} =$$

$$= \frac{0.09 \cdot 0.23 \cdot 10^{-2}}{(0.09 \cdot 0.23 + 0.17 \cdot 0.42 + 0.41 \cdot 0.35) \cdot 10^{-2}} = 0.0879.$$

4. Feladat.

4. Feladat. *Egy adott betegségben szenvedő betegek 33%-át egy olyan új kezelésnek vetik alá, amely a korábbi 25%-ról, 53%-ra javítja a gyógyulási arányt. Egy gyógyult beteget kiválasztva mi a valószínűsége, hogy ő az új kezelésben részesült?*

4. Feladat. *Egy adott betegségben szenvedő betegek 33%-át egy olyan új kezelésnek vetik alá, amely a korábbi 25%-ról, 53%-ra javítja a gyógyulási arányt. Egy gyógyult beteget kiválasztva mi a valószínűsége, hogy ő az új kezelésben részesült?*

4. Megoldás.

4. Feladat. *Egy adott betegségben szenvedő betegek 33%-át egy olyan új kezelésnek vetik alá, amely a korábbi 25%-ról, 53%-ra javítja a gyógyulási arányt. Egy gyógyult beteget kiválasztva mi a valószínűsége, hogy ő az új kezelésben részesült?*

4. Megoldás. *Vezessük be a következő jelöléseket*

4. Feladat. *Egy adott betegségben szenvedő betegek 33%-át egy olyan új kezelésnek vetik alá, amely a korábbi 25%-ról, 53%-ra javítja a gyógyulási arányt. Egy gyógyult beteget kiválasztva mi a valószínűsége, hogy ő az új kezelésben részesült?*

4. Megoldás. *Vezessük be a következő jelöléseket*

$$U \doteq \text{ a kiválasztott beteg új kezelésben részesült},$$

4. Feladat. *Egy adott betegségben szenvedő betegek 33%-át egy olyan új kezelésnek vetik alá, amely a korábbi 25%-ról, 53%-ra javítja a gyógyulási arányt. Egy gyógyult beteget kiválasztva mi a valószínűsége, hogy ő az új kezelésben részesült?*

4. Megoldás. *Vezessük be a következő jelöléseket*

$$\begin{aligned} U &\doteq \text{ a kiválasztott beteg új kezelésben részesült}, \\ Gy &\doteq \text{ a kiválasztott beteg gyógyult}. \end{aligned}$$

4. Feladat. *Egy adott betegségben szenvedő betegek 33%-át egy olyan új kezelésnek vetik alá, amely a korábbi 25%-ról, 53%-ra javítja a gyógyulási arányt. Egy gyógyult beteget kiválasztva mi a valószínűsége, hogy ő az új kezelésben részesült?*

4. Megoldás. *Vezessük be a következő jelöléseket*

$$U \doteq \text{ a kiválasztott beteg új kezelésben részesült},$$
$$Gy \doteq \text{ a kiválasztott beteg gyógyult}.$$

A feladat szövege alapján tudjuk, hogy

$$\mathbb{P}(U) = 0.33, \quad \mathbb{P}(Gy|\overline{U}) = 0.25, \quad \mathbb{P}(Gy|U) = 0.53.$$

4. Feladat. *Egy adott betegségben szenvedő betegek 33%-át egy olyan új kezelésnek vetik alá, amely a korábbi 25%-ról, 53%-ra javítja a gyógyulási arányt. Egy gyógyult beteget kiválasztva mi a valószínűsége, hogy ő az új kezelésben részesült?*

4. Megoldás. *Vezessük be a következő jelöléseket*

$$\begin{aligned} U &\doteq \text{ a kiválasztott beteg új kezelésben részesült}, \\ Gy &\doteq \text{ a kiválasztott beteg gyógyult}. \end{aligned}$$

A feladat szövege alapján tudjuk, hogy

$$\mathbb{P}(U) = 0.33, \quad \mathbb{P}(Gy|\overline{U}) = 0.25, \quad \mathbb{P}(Gy|U) = 0.53.$$

A $\mathbb{P}(U|Gy)$ *feltételes valószínűséget keressük.*

A komplementer esemény valószínűsége alapján kapjuk, hogy $\mathbb{P}(\overline{U}) = 0.67$.

A komplementer esemény valószínűsége alapján kapjuk, hogy $\mathbb{P}(\overline{U}) = 0.67$.
Mivel az U és $\overline{U}$ események nemzérus valószínűségű eseményekből álló teljes eseményrendszert alkotnak, így alkalmazható a Bayes Tétel.

A komplementer esemény valószínűsége alapján kapjuk, hogy $\mathbb{P}(\overline{U}) = 0.67$.
Mivel az U és $\overline{U}$ események nemzérus valószínűségű eseményekből álló teljes eseményrendszert alkotnak, így alkalmazható a Bayes Tétel.

$$\mathbb{P}(U|G) = \frac{\mathbb{P}(Gy|U)\mathbb{P}(U)}{\mathbb{P}(Gy|U)\mathbb{P}(U) + \mathbb{P}(Gy|\overline{U})\mathbb{P}(\overline{U})} =$$

A komplementer esemény valószínűsége alapján kapjuk, hogy $\mathbb{P}(\overline{U}) = 0.67$.
Mivel az U és $\overline{U}$ események nemzérus valószínűségű eseményekből álló teljes eseményrendszert alkotnak, így alkalmazható a Bayes Tétel.

$$\mathbb{P}(U|G) = \frac{\mathbb{P}(Gy|U)\mathbb{P}(U)}{\mathbb{P}(Gy|U)\mathbb{P}(U) + \mathbb{P}(Gy|\overline{U})\mathbb{P}(\overline{U})} =$$
$$= \frac{0.53 \cdot 0.33}{0.53 \cdot 0.33 + 0.25 \cdot 0.67} = 0.5108.$$

3. Események függetlensége

Két esemény függetlensége

Két esemény függetlensége

Két esemény függetlensége a feltételes valószínűség fogalmából származik.

Két esemény függetlensége

Két esemény függetlensége a feltételes valószínűség fogalmából származik. Az A és B **események függetlenek**, ha

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B).$$

Példa.

Példa. *A harminckét lapos magyar kártyából kihúzunk három lapot (visszatevés nélkül). Jelölje* A *azt az eseményt, hogy az első;* B*, hogy a harmadik kihúzott lap piros. Függetlenek-e az* A *és* B *események?*

Példa. *A harminckét lapos magyar kártyából kihúzunk három lapot (visszatevés nélkül). Jelölje A azt az eseményt, hogy az első; B, hogy a harmadik kihúzott lap piros. Függetlenek-e az A és B események?*

***Mo.**: Mint ahogy azt korábban már láttuk*

Példa. *A harminckét lapos magyar kártyából kihúzunk három lapot (visszatevés nélkül). Jelölje A azt az eseményt, hogy az első; B, hogy a harmadik kihúzott lap piros. Függetlenek-e az A és B események?*

Mo.: *Mint ahogy azt korábban már láttuk*

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{4},$$

Példa. *A harminckét lapos magyar kártyából kihúzunk három lapot (visszatevés nélkül). Jelölje A azt az eseményt, hogy az első; B, hogy a harmadik kihúzott lap piros. Függetlenek-e az A és B események?*

***Mo.**: Mint ahogy azt korábban már láttuk*

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{4},$$
$$\mathbb{P}(B) = \frac{1}{4},$$

Példa. *A harminckét lapos magyar kártyából kihúzunk három lapot (visszatevés nélkül). Jelölje A azt az eseményt, hogy az első; B, hogy a harmadik kihúzott lap piros. Függetlenek-e az A és B események?*

***Mo.**: Mint ahogy azt korábban már láttuk*

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{4},$$
$$\mathbb{P}(B) = \frac{1}{4},$$
$$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{18 \cdot 30 \cdot 7}{32 \cdot 31 \cdot 30} = \frac{7}{124},$$

Példa. *A harminckét lapos magyar kártyából kihúzunk három lapot (visszatevés nélkül). Jelölje A azt az eseményt, hogy az első; B, hogy a harmadik kihúzott lap piros. Függetlenek-e az A és B események?*

Mo.: *Mint ahogy azt korábban már láttuk*

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{4},$$
$$\mathbb{P}(B) = \frac{1}{4},$$
$$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{18 \cdot 30 \cdot 7}{32 \cdot 31 \cdot 30} = \frac{7}{124},$$

Így könnyen látható, hogy $\mathbb{P}(A \cap B) \neq \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$, *tehát az A és B események nem függetlenek.*

Eseményrendszer páronkénti függetlensége

Eseményrendszer páronkénti függetlensége

Azt mondjuk, hogy egy $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}$ **eseményrendszer páronként független**, ha bármely két tagja független.

Véges sok esemény teljes függetlensége

Véges sok esemény teljes függetlensége

Azt mondjuk, hogy az A_1, A_2, $\ldots$ A_n **események teljesen függetlenek**, ha tetszőleges $1 \leqslant k \leqslant n$ és $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n$ indexek esetén

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = \mathbb{P}(A_{i_1}) \cdot \mathbb{P}(A_{i_2}) \ldots \mathbb{P}(A_{i_k}).$$

Véges sok esemény teljes függetlensége

Azt mondjuk, hogy az A_1, A_2, ... A_n **események teljesen függetlenek**, ha tetszőleges $1 \leqslant k \leqslant n$ és $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n$ indexek esetén

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = \mathbb{P}(A_{i_1}) \cdot \mathbb{P}(A_{i_2}) \ldots \mathbb{P}(A_{i_k}).$$

azaz a véges sok tagból álló metszet valószínűsége egyenlő a valószínűségek szorzatával.

Független események tulajdonságai

Független események tulajdonságai

1. Ha A, B olyan események, melyekre $\mathbb{P}(A) = 0$ vagy $\mathbb{P}(A) = 1$, akkor A és B függetlenek.

Független események tulajdonságai

1. Ha A, B olyan események, melyekre $\mathbb{P}(A) = 0$ vagy $\mathbb{P}(A) = 1$, akkor A és B függetlenek.
2. Ha A, B független események, akkor az $\overline{A}$, B; az A, $\overline{B}$; az $\overline{A}$, $\overline{B}$ események is függetlenek.

Független események tulajdonságai

1. Ha A, B olyan események, melyekre $\mathbb{P}(A) = 0$ vagy $\mathbb{P}(A) = 1$, akkor A és B függetlenek.
2. Ha A, B független események, akkor az $\overline{A}$, B; az A, $\overline{B}$; az $\overline{A}$, $\overline{B}$ események is függetlenek.
3. Ha az $\mathcal{A}$ eseményrendszer teljesen független és az $\mathcal{A}$ eseményei közül tetszőlegesen sokat a komplementerére cserélünk ki, akkor a teljes függetlenség megőrződik.

5. Feladat.

5. Feladat. *Az A, B és C független események, amelyre*

$$\mathbb{P}(A) = 0.360, \quad \mathbb{P}(B) = 0.080 \quad \mathbb{P}(C) = 0.340.$$

Határozza meg annak a valószínűségét, hogy

5. Feladat. *Az A, B és C független események, amelyre*

$$\mathbb{P}(A) = 0.360, \quad \mathbb{P}(B) = 0.080 \quad \mathbb{P}(C) = 0.340.$$

Határozza meg annak a valószínűségét, hogy

a. *egynél több (azaz legalább kettő) következik be közülük!*

5. Feladat. *Az A, B és C független események, amelyre*

$$\mathbb{P}(A) = 0.360, \quad \mathbb{P}(B) = 0.080 \quad \mathbb{P}(C) = 0.340.$$

Határozza meg annak a valószínűségét, hogy

- **a.** *egynél több (azaz legalább kettő) következik be közülük!*
- **b.** *pontosan kettő következik be közülük!*

5. Megoldás.a.

5. Megoldás.a. *A megoldás során a szita formulát és a teljes függetlenséget is felhasználjuk. A keresett valószínűség:*

5. Megoldás.a. *A megoldás során a szita formulát és a teljes függetlenséget is felhasználjuk. A keresett valószínűség:*

$$\mathbb{P}(\textit{legalább 2 bekövetkezik}) = \mathbb{P}((A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)) =$$

5. Megoldás.a. *A megoldás során a szita formulát és a teljes függetlenséget is felhasználjuk. A keresett valószínűség:*

$$\mathbb{P}(\textit{legalább 2 bekövetkezik}) = \mathbb{P}((A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)) =$$
$$= \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap C) + \mathbb{P}(B \cap C)$$
$$- 3\mathbb{P}(A \cap B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C) =$$

5. Megoldás.a. *A megoldás során a szita formulát és a teljes függetlenséget is felhasználjuk. A keresett valószínűség:*

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(\textit{legalább 2 bekövetkezik}) &= \mathbb{P}((A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)) = \\
&= \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap C) + \mathbb{P}(B \cap C) \\
&\qquad - 3\mathbb{P}(A \cap B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \\
&= \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) - 2\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) =
\end{aligned}
$$

5. Megoldás.a. *A megoldás során a szita formulát és a teljes függetlenséget is felhasználjuk. A keresett valószínűség:*

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\textit{legalább 2 bekövetkezik}) = \mathbb{P}((A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)) = \\
&\quad = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap C) + \mathbb{P}(B \cap C) \\
&\qquad\qquad - 3\mathbb{P}(A \cap B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \\
&\quad = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) - 2\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) = \\
&\quad = \mathbb{P}(A)[\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - 2\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)] + \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) =
\end{aligned}
$$

5. Megoldás.a. *A megoldás során a szita formulát és a teljes függetlenséget is felhasználjuk. A keresett valószínűség:*

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\textit{legalább 2 bekövetkezik}) = \mathbb{P}((A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)) = \\
&= \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap C) + \mathbb{P}(B \cap C) \\
&\qquad\qquad - 3\mathbb{P}(A \cap B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \\
&= \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) - 2\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) = \\
&= \mathbb{P}(A)[\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - 2\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)] + \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) = \\
&= 0.360[0.080 + 0.340 - 2 \cdot 0.080 \cdot 0.340] + 0.080 \cdot 0.340 =
\end{aligned}
$$

5. Megoldás.a. *A megoldás során a szita formulát és a teljes függetlenséget is felhasználjuk. A keresett valószínűség:*

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\textit{legalább 2 bekövetkezik}) = \mathbb{P}((A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)) = \\
&= \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap C) + \mathbb{P}(B \cap C) \\
&\qquad\qquad - 3\mathbb{P}(A \cap B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \\
&= \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) - 2\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) = \\
&= \mathbb{P}(A)[\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - 2\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)] + \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) = \\
&= 0.360[0.080 + 0.340 - 2 \cdot 0.080 \cdot 0.340] + 0.080 \cdot 0.340 = \\
&= 0.1588.
\end{aligned}
$$

5. Megoldás.b.

5. Megoldás.b. *A megoldás során a véges additivitást és a teljes függetlenséget is felhasználjuk. A keresett valószínűség:*

$$\mathbb{P}(\textit{pontosan 2 bekövetkezik}) =$$

5. Megoldás.b. *A megoldás során a véges additivitást és a teljes függetlenséget is felhasználjuk. A keresett valószínűség:*

$$\mathbb{P}(\textit{pontosan 2 bekövetkezik}) =$$
$$= \mathbb{P}\left((\overline{A} \cap B \cap C) \cup (A \cap \overline{B} \cap C) \cup (A \cap B \cap \overline{C})\right) =$$

5. Megoldás.b. *A megoldás során a véges additivitást és a teljes függetlenséget is felhasználjuk. A keresett valószínűség:*

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\textit{pontosan 2 bekövetkezik}) = \\
&\quad = \mathbb{P}\left((\overline{A} \cap B \cap C) \cup (A \cap \overline{B} \cap C) \cup (A \cap B \cap \overline{C})\right) = \\
&\quad = \mathbb{P}\left(\overline{A} \cap B \cap C\right) + \mathbb{P}\left(A \cap \overline{B} \cap C\right) + \mathbb{P}\left(A \cap B \cap \overline{C}\right) =
\end{aligned}
$$

5. Megoldás.b. *A megoldás során a véges additivitást és a teljes függetlenséget is felhasználjuk. A keresett valószínűség:*

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\textit{pontosan 2 bekövetkezik}) = \\
&\quad = \mathbb{P}\left((\overline{A} \cap B \cap C) \cup (A \cap \overline{B} \cap C) \cup (A \cap B \cap \overline{C})\right) = \\
&\quad = \mathbb{P}\left(\overline{A} \cap B \cap C\right) + \mathbb{P}\left(A \cap \overline{B} \cap C\right) + \mathbb{P}\left(A \cap B \cap \overline{C}\right) = \\
&\quad = (1 - 0.36) \cdot 0.08 \cdot 0.34 + 0.36 \cdot (0 - 0.08) \cdot 0.34 + \\
&\qquad\qquad + 0.36 \cdot 0.08 \cdot (1 - 0.34) =
\end{aligned}
$$

5. Megoldás.b. *A megoldás során a véges additivitást és a teljes függetlenséget is felhasználjuk. A keresett valószínűség:*

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\textit{pontosan 2 bekövetkezik}) = \\
&\quad = \mathbb{P}\left((\overline{A} \cap B \cap C) \cup (A \cap \overline{B} \cap C) \cup (A \cap B \cap \overline{C})\right) = \\
&\quad = \mathbb{P}\left(\overline{A} \cap B \cap C\right) + \mathbb{P}\left(A \cap \overline{B} \cap C\right) + \mathbb{P}\left(A \cap B \cap \overline{C}\right) = \\
&\quad = (1 - 0.36) \cdot 0.08 \cdot 0.34 + 0.36 \cdot (0 - 0.08) \cdot 0.34 + \\
&\qquad\qquad + 0.36 \cdot 0.08 \cdot (1 - 0.34) = \\
&\quad = 0.1490.
\end{aligned}
$$

6. Feladat. *Egy kisegér 3 folyosó bármelyikén eljuthat egy sajtdarabhoz. Akármelyik folyosón 3 ajtón kell áthaladni. Mi a valószínűsége, hogy a kisegér el tud jutni a sajthoz, ha az ajtók egymástól függetlenül 0.53 valószínűséggel nyílnak ki, és kinyitásuk után nyitva is maradnak (ha van nyitott folyosó, akkor a kisegér megtalálja a sajtot)?*

6. Megoldás. *Események:*

6. Megoldás. *Események:*

$$A \doteq \textit{ az első folyosó átjárható},$$

6. Megoldás. *Események:*

$$A \doteq \text{ az első folyosó átjárható},$$
$$B \doteq \text{ a második folyosó átjárható},$$

6. Megoldás. *Események:*

$$
\begin{aligned}
A &\doteq \textit{ az első folyosó átjárható},\\
B &\doteq \textit{ a második folyosó átjárható},\\
C &\doteq \textit{ a harmadik folyosó átjárható}.
\end{aligned}
$$

A szita formula és a függetlenség felhasználásával kapjuk, hogy

A szita formula és a függetlenség felhasználásával kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) =$$

A szita formula és a függetlenség felhasználásával kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cup B \cup C) &= \\ &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - (\mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap C) + \mathbb{P}(B \cap C)) \\ &\qquad + \mathbb{P}(A \cap B \cap C) =\end{aligned}$$

A szita formula és a függetlenség felhasználásával kapjuk, hogy

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \\
&\quad = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - (\mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap C) + \mathbb{P}(B \cap C)) \\
&\qquad\qquad + \mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \\
&\quad = 3\mathbb{P}(A) - 3\mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C) =
\end{aligned}
$$

A szita formula és a függetlenség felhasználásával kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \\
&\quad = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - (\mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap C) + \mathbb{P}(B \cap C)) \\
&\qquad\qquad + \mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \\
&\quad = 3\mathbb{P}(A) - 3\mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \\
&\quad = 3\mathbb{P}(A) - 3\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) =
\end{aligned}$$

A szita formula és a függetlenség felhasználásával kapjuk, hogy

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \\
&\quad = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - (\mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap C) + \mathbb{P}(B \cap C)) \\
&\qquad\qquad + \mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \\
&\quad = 3\mathbb{P}(A) - 3\mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \\
&\quad = 3\mathbb{P}(A) - 3\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) = \\
&\quad = 3\mathbb{P}(A) - 3\mathbb{P}(A)^2 + \mathbb{P}(A)^3 =
\end{aligned}
$$

A szita formula és a függetlenség felhasználásával kapjuk, hogy

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \\
&\quad = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - (\mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap C) + \mathbb{P}(B \cap C)) \\
&\qquad\qquad + \mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \\
&\quad = 3\mathbb{P}(A) - 3\mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \\
&\quad = 3\mathbb{P}(A) - 3\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) = \\
&\quad = 3\mathbb{P}(A) - 3\mathbb{P}(A)^2 + \mathbb{P}(A)^3 = \\
&\quad = 3 \cdot 0.53^3 - 3 \cdot 0.53^6 + 0.53^9 =
\end{aligned}
$$

A szita formula és a függetlenség felhasználásával kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \\
&\quad = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - (\mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap C) + \mathbb{P}(B \cap C)) \\
&\qquad\qquad + \mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \\
&\quad = 3\mathbb{P}(A) - 3\mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \\
&\quad = 3\mathbb{P}(A) - 3\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) = \\
&\quad = 3\mathbb{P}(A) - 3\mathbb{P}(A)^2 + \mathbb{P}(A)^3 = \\
&\quad = 3 \cdot 0.53^3 - 3 \cdot 0.53^6 + 0.53^9 = \\
&\quad = 0.3834.
\end{aligned}$$

Vége az III. órának

Köszönöm a figyelmet!