

Numerikus Módszerek

9. Gyakorlat

Numerikus integrálás

Beosztás

Beosztás

Legyen $[a, b]$ egy intervallum. A

$$B = \{x_1, x_2, \dots, x_{n+1}\}$$

halmazt az $[a, b]$ intervallum egy **beosztásának** nevezzük, ha

$$a = x_1 < x_2 < \dots < x_{n+1} = b.$$

Beosztás

Legyen $[a, b]$ egy intervallum. A

$$B = \{x_1, x_2, \dots, x_{n+1}\}$$

halmazt az $[a, b]$ intervallum egy **beosztásának** nevezzük, ha

$$a = x_1 < x_2 < \dots < x_{n+1} = b.$$

Az $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ számokat **osztópontoknak** nevezzük. Az osztópontok az $[a, b]$ intervallumot

$$I_1 = [x_1, x_2], \quad I_2 = [x_2, x_3], \quad \dots, \quad I_n = [x_n, x_{n+1}]$$

részintervallumokra bontják.

Beosztás

Legyen $[a, b]$ egy intervallum. A

$$B = \{x_1, x_2, \dots, x_{n+1}\}$$

halmazt az $[a, b]$ intervallum egy **beosztásának** nevezzük, ha

$$a = x_1 < x_2 < \dots < x_{n+1} = b.$$

Az $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ számokat **osztópontoknak** nevezzük. Az osztópontok az $[a, b]$ intervallumot

$$I_1 = [x_1, x_2], \quad I_2 = [x_2, x_3], \quad \dots, \quad I_n = [x_n, x_{n+1}]$$

részintervallumokra bontják.

Tehát az osztópontok száma egyel több, mint a részintervallumok száma. (Szokás az osztópontokat 0-tól kezdve indexelni, ebben az esetben az utolsó osztópont x_n és n számú részintervallumunk van. A Matlab azonban a vektorok indexeléséz 1-gyel kezdi, így mi is ehhez igazodunk.)

Ekvidisztáns beosztás

Ekvidisztáns beosztás

Az $[a, b]$ intervallum egy B beosztását **ekvidisztáns beosztásnak** nevezzük, ha az osztópontok által meghatározott részintervallumok azonos hosszúságúak.

Ekvidisztáns beosztás tulajdonságai

Ekvidisztáns beosztás tulajdonságai

Ha B az $[a, b]$ intervallum egy ekvidisztáns beosztása $n + 1$ osztóponttal, akkor

Ekvidisztáns beosztás tulajdonságai

Ha B az $[a, b]$ intervallum egy ekvidisztáns beosztása $n + 1$ osztóponttal, akkor

- $h = \frac{b-a}{n}$ a lépésköz,

Ekvidisztáns beosztás tulajdonságai

Ha B az $[a, b]$ intervallum egy ekvidisztáns beosztása $n + 1$ osztóponttal, akkor

- $h = \frac{b-a}{n}$ a lépésköz,
- $x_k = x_{k-1} + h \quad (k = 2, 3, \dots, n + 1)$

Ekvidisztáns beosztás tulajdonságai

Ha B az $[a, b]$ intervallum egy ekvidisztáns beosztása $n + 1$ osztóponttal, akkor

- $h = \frac{b-a}{n}$ a lépésköz,
- $x_k = x_{k-1} + h \quad (k = 2, 3, \dots, n + 1)$
- $x_k = a + (k - 1)h \quad (k = 2, 3, \dots, n + 1)$

Ekvidisztáns beosztás tulajdonságai

Ha B az $[a, b]$ intervallum egy ekvidisztáns beosztása $n + 1$ osztóponttal, akkor

- $h = \frac{b-a}{n}$ a lépésköz,
- $x_k = x_{k-1} + h \quad (k = 2, 3, \dots, n + 1)$
- $x_k = a + (k - 1)h \quad (k = 2, 3, \dots, n + 1)$
- Így $x_1 = a$ és $x_{n+1} = b$.

Ismétlés

Ismétlés

A beosztást végző **Matlab** függvény:

$$z = \text{ linspace}(a, b, n).$$

Az $[a, b]$ intervallum egy ekvidisztáns beosztását adja úgy, hogy az osztópontok száma n , így a kapott részintervallumok száma $n - 1$.
Hatása azonos a

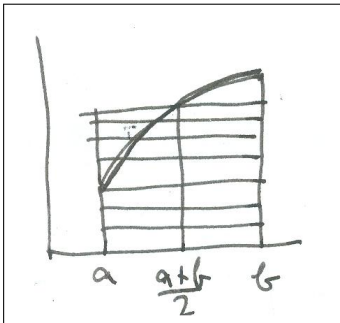
$$z = a : (b - a)/(n - 1) : b$$

parancs hatásával. A $z=\text{linspace}(a,b)$ esetén n értéke automatikusan 100.

A téglalap módszer

A téglalap módszer

Egyszerű téglalap módszer:



$$\int_a^b f(x) dx \approx (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

Összetett téglalap módszer

Összetett téglalap módszer

Az ekvidisztáns beosztás minden részintervallumára alkalmazzuk az egyszerű téglalap módszert.

Az összetett téglalap formula matematikai képlete:

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \sum_{k=2}^{n+1} f\left(\frac{x_{k-1} + x_k}{2}\right).$$

Az összetett téglalap formulát megvalósító Matlab függvény:

Összetett téglalap módszer

Az ekvidisztáns beosztás minden részintervallumára alkalmazzuk az egyszerű téglalap módszert.

Az összetett téglalap formula matematikai képlete:

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \sum_{k=2}^{n+1} f\left(\frac{x_{k-1} + x_k}{2}\right).$$

Az összetett téglalap formulát megvalósító Matlab függvény:

```
1 function I=OsszTeglalapInt(h,y)
2   I=h*sum(y);
3 end
```

Input: h = lépésköz,

$$y = \left[f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right), \dots, f\left(\frac{x_n + x_{n+1}}{2}\right) \right],$$

Output: Az integrálközelítő érték.

Feladat

Feladat

Határozzuk meg az

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx$$

integrálközelítő értékét összetett téglalap formulával.

Motiváció

Motiváció

Az $x \rightarrow e^{-x^2}$ függvény primitív függvénye nem elemi függvény, úgyhogy ha kíváncsiak vagyunk az integrálközelítő értékére, nincs más választásunk, mint az, hogy numerikusan integráljunk.

Megoldás

Megoldás

Hívás: 10 részintervallum esetén ($n=10$)

```
h=0.1  
u=0.05:0.1:1  
y=exp(-u.^2)  
l=OsszTeglalapInt(h,y)
```

Megoldás

Hívás: 10 részintervallum esetén ($n=10$)

```
h=0.1  
u=0.05:0.1:1  
y=exp(-u.^2)  
l=OsszTeglalapInt(h,y)
```

Eredmény: $n = 10$ esetén 0.7471,
 $n = 100$ esetén 0.7468, ami már elég pontos.

A Newton-Cotes kvadratúrák

A Newton-Cotes kvadratúrák

Isac Newton (1642-1727)

Roger Cotes (1682-1716)

Egyszerű formula és összetett formula:

Egyszerű formula és összetett formula:

Egyszerű formula:

$n + 1$ alapontra Lagrange-féle interpolációs polinomot illesztünk, majd az eredeti integrandus helyett az interpolációs polinomot integráljuk.

Egyszerű formula és összetett formula:

Egyszerű formula:

$n + 1$ alappontra Lagrange-féle interpolációs polinomot illesztünk, majd az eredeti integrandus helyett az interpolációs polinomot integráljuk.

Összetett formula:

Ekvidisztáns beosztást alkalmazunk, a kapott beosztás megfelelő részintervallumaira alkalmazzuk az egyszerű formulát, majd összegezzük.

A trapéz és a Simpson formula

A trapéz és a Simpson formula

Trapéz formula:

2 alappontot alkalmazunk, a két alappontra egyenest illesztünk, így kapjuk az egyszerű trapéz formulát. Az egyszerű trapéz formulából könnyen származtatható az összetett trapéz formula.

A trapéz és a Simpson formula

Trapéz formula:

2 alappontot alkalmazunk, a két alappontra egyenest illesztünk, így kapjuk az egyszerű trapéz formulát. Az egyszerű trapéz formulából könnyen származtatható az összetett trapéz formula.

Simpson formula:

Ha 3 alappontra parabolát illesztünk, akkor az egyszerű Simpson formulát kapjuk. Az egyszerű Simpson formulából származtatjuk az összetett Simpson formulát. Tehát az összetett Simpson formula esetén a részintervallumok száma páros.

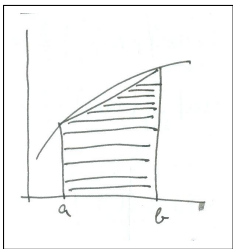
Az egyszerű trapéz formula

Az egyszerű trapéz formula

Mivel ismerjük a trapéz területképletét,

$$T = \frac{m}{2}(a + c)$$

így integrálnunk sem kell. Az egyszerű trapéz formulát:

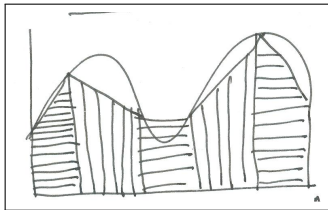


$$T(f, a, b) = \frac{b - a}{2} (f(a) + f(b))$$

Összetett trapéz formula

Összetett trapéz formula

A részintervallumok száma: n , az osztópontok száma: $n + 1$.



$$\begin{aligned}
T_n(f, a, b) &= \sum_{k=2}^{n+1} T(f, x_{k-1}, x_k) = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{x_k - x_{k-1}}{2} (f(x_{k-1}) + f(x_k)) = \\
&= \frac{h}{2} \sum_{k=2}^{n+1} (f(x_{k-1}) + f(x_k)) = \\
&= \frac{h}{2} ((f(x_1) + f(x_2)) + (f(x_2) + f(x_3)) + \cdots + (f(x_n) + f(x_{n+1}))) = \\
&= \frac{h}{2} \left(f(x_1) + 2 \sum_{k=2}^n f(x_k) + f(x_{n+1}) \right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T_n(f, a, b) &= \sum_{k=2}^{n+1} T(f, x_{k-1}, x_k) = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{x_k - x_{k-1}}{2} (f(x_{k-1}) + f(x_k)) = \\
 &= \frac{h}{2} \sum_{k=2}^{n+1} (f(x_{k-1}) + f(x_k)) = \\
 &= \frac{h}{2} ((f(x_1) + f(x_2)) + (f(x_2) + f(x_3)) + \cdots + (f(x_n) + f(x_{n+1}))) = \\
 &= \frac{h}{2} \left(f(x_1) + 2 \sum_{k=2}^n f(x_k) + f(x_{n+1}) \right).
 \end{aligned}$$

Így kapjuk, hogy

$$T_n(f, a, b) = \frac{h}{2} \left(f(x_1) + 2 \sum_{k=2}^n f(x_k) + f(x_{n+1}) \right)$$

Matlab függvény az összetett trapéz formulára

Matlab függvény az összetett trapéz formulára

```
1  function I=OsszTrapInt(x,y)
2  -     n=length(x);
3  -     n=n-1;
4  -     h=x(2)-x(1);
5  -     s=0;
6  -     for i=2:1:n
7  -         s=s+y(i);
8  -     end
9  -     I=(h/2)*(y(1)+2*s+y(n+1));
10 - end
```

Matlab függvény az összetett trapéz formulára

```
1  function I=OsszTrapInt(x,y)
2      n=length(x);
3      n=n-1;
4      h=x(2)-x(1);
5      s=0;
6      for i=2:1:n
7          s=s+y(i);
8      end
9      I=(h/2)*(y(1)+2*s+y(n+1));
10 end
```

Input: $x = [x_1, x_2, \dots, x_{n+1}]$, $y = [f(x_1), \dots, f(x_{n+1})]$.

Output: I az integrál közelítő értéke összetett trapéz formulával.

Feladat

Feladat

Összetett trapéz formula alkalmazásával határozzuk meg az

$$\int_a^b e^{-x^2} dx$$

integrál közelítő értékét.

Megoldás

Megoldás

Hívás: 10 részintervallum esetén ($n=10$)

```
x=linspace(0,1,11)
y=exp(-x.^2)
l=OsszTrapInt(x,y)
```

Megoldás

Hívás: 10 részintervallum esetén ($n=10$)

```
x=linspace(0,1,11)
y=exp(-x.^2)
l=OsszTrapInt(x,y)
```

Eredmény: $n = 10$ esetén 0.7462,
 $n = 100$ esetén 0.7468.

Az egyszerű Simpson formula

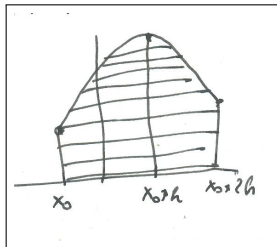
Az egyszerű Simpson formula

Thomas Simpson (1710-1761) angol matematikus, Cotes eredményét publikálta.

Az egyszerű Simpson formula

Thomas Simpson (1710-1761) angol matematikus, Cotes eredményét publikálta.

Az alappontok és függvényértékek:



x_0	$x_0 + h$	$x_0 + 2h$
y_0	y_1	y_2

$$P_3(x) = y_0 l_1(x) + y_1 l_2(x) + y_2 l_3(x)$$

$$\int_{x_0}^{x_0+2h} P_3(x) = \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2).$$

Gyakorlásképpen nem árt felírni az l_1 , l_2 , l_3 polinomokat:

$$\begin{aligned} l_1(x) &= \frac{(x - (x_0 + h))(x - (x_0 + 2h))}{(x_0 - (x_0 + h))(x_0 - (x_0 + 2h))} = \\ &= \frac{1}{2h^2} (x - (x_0 + h))(x - (x_0 + 2h)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l_2(x) &= \frac{(x - x_0)(x - (x_0 + 2h))}{(x_0 + h - x_0)(x_0 + h - (x_0 + 2h))} = \\ &= -\frac{1}{h^2} (x - x_0)(x - (x_0 + 2h)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l_3(x) &= \frac{(x - x_0)(x - (x_0 + h))}{(x_0 + 2h - x_0)(x_0 + 2h - (x_0 + h))} = \\ &= \frac{1}{2h^2} (x - x_0)(x - (x_0 + h)) \end{aligned}$$

Integrálunk...

... hosszas számolás után kapjuk, hogy

... hosszas számolás után kapjuk, hogy

$$S(f, x_0, x_0 + h, x_0 + 2h) = \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2).$$

... hosszas számolás után kapjuk, hogy

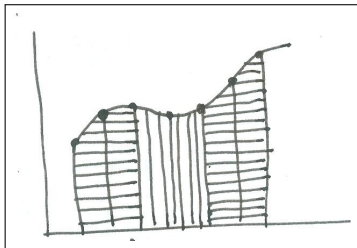
$$S(f, x_0, x_0 + h, x_0 + 2h) = \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2).$$

Amiből már könnyen kijön az összetett Simpson formula.

Az Összetett Simpson formula

Az Összetett Simpson formula

Ekvidisztáns beosztást alkalmazunk páros sok részintervallummal, majd 3 alappontonként parabolát illesztünk.



$$\begin{aligned}
 S_n(f, a, b) &= \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} S(f, x_1 + 2i, x_2 + 2i, x_3 + 2i) = \\
 &= \frac{h}{3} ((y_1 + 4y_2 + y_3) + (y_3 + 4y_4 + y_5) + \cdots + (y_{n-1} + 4y_n + y_{n+1})) = \\
 &= \frac{h}{3} \left(y_1 + 4 \sum_{\substack{k=2 \\ k \text{ Ps}}}^n y_k + 2 \sum_{\substack{k=3 \\ k \text{ Pt}}}^{n-1} y_k + y_{n+1} \right).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_n(f, a, b) &= \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} S(f, x_1 + 2i, x_2 + 2i, x_3 + 2i) = \\
 &= \frac{h}{3} ((y_1 + 4y_2 + y_3) + (y_3 + 4y_4 + y_5) + \cdots + (y_{n-1} + 4y_n + y_{n+1})) = \\
 &= \frac{h}{3} \left(y_1 + 4 \sum_{\substack{k=2 \\ k \text{ Ps}}}^n y_k + 2 \sum_{\substack{k=3 \\ k \text{ Pt}}}^{n-1} y_k + y_{n+1} \right).
 \end{aligned}$$

A $k \text{ Ps}$ illetve a $k \text{ Pt}$ azt jelenti, hogy az összegzés páros illetve páratlan indexekre vonatkozik. Tehát

$$S_n(f, a, b) = \frac{h}{3} \left(y_1 + 4 \sum_{\substack{k=2 \\ k \text{ Ps}}}^n y_k + 2 \sum_{\substack{k=3 \\ k \text{ Pt}}}^{n-1} y_k + y_{n+1} \right).$$

Az Összetett Simpson Szabályt alkalmazó Matlab függvény

Az Összetett Simpson Szabályt alkalmazó Matlab függvény

```
1  function I=OsszSimpInt(x,y)
2  -    n=length(x);
3  -    n=n-1;
4  -    h=x(2)-x(1);
5  -    s=0;
6  -    for i=2:2:n
7  -        s=s+y(i);
8  -    end
9  -    t=0;
10 -    for i=3:2:n-1
11 -        t=t+y(i);
12 -    end
13 -    I=(h/3)*(y(1)+4*s+2*t+y(n+1));
14 -    end
```

Feladat

Feladat

Számoljuk ki az

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx$$

integrál értékét $n = 100$ részintervallum esetén (osztópontok száma:101).

Megoldás

Megoldás

Hívás: 100 részintervallum esetén ($n=100$)

```
x=linspace(0,1,101)
y=exp(-x.^2)
l=OsszSimplnt(x,y)
```

Eredmény: $n = 10$ esetén 0.7468
 $n = 100$ esetén 0.7468.

Feladat

Feladat

Számoljuk ki az

$$\int_0^{\pi} \sin(x) dx$$

integrál értékét.

Feladat

Számoljuk ki az

$$\int_0^{\pi} \sin(x) dx$$

integrál értékét.

$$\int_0^{\pi} \sin(x) dx = \left[-\cos(x) \right]_{x=0}^{x=\pi} = (-\cos(\pi) + \cos(0)) = 1 + 1 = 2.$$

Ez az integrál remek alkalmat ad arra, hogy a tanult két módszert összehasonlítsuk.

Írjunk Matlab függvényt, amely $n = 2, 4, 8, 10, 20, 100$ értékek esetén kiszámolja a

$$\int_0^{\pi} \sin(x) dx$$

integrál értékét összetett trapéz formulával és összetett Simpson formulával, majd n értékét, illetve a kapott értékeket elhelyezi egy mátrixban.

```
1  function A=CompTrapSimp()  
2  -    A=zeros(6,3);  
3  -    A(:,1)=[2;4;8;10;20;100];  
4  -    for i=1:1:6  
5  -        x= linspace(0,pi,A(i,1)+1);  
6  -        y=sin(x);  
7  -        A(i,2)=OsszTrapInt(x,y);  
8  -        A(i,3)=OsszSimpInt(x,y);  
9  -    end  
10 - end
```

```
>> A=CompTrapSimp()
```

```
A =
```

2.0000	1.5708	2.0944
4.0000	1.8961	2.0046
8.0000	1.9742	2.0003
10.0000	1.9835	2.0001
20.0000	1.9959	2.0000
100.0000	1.9998	2.0000

Hibaképletek összetett trapéz és összetett Simpson formula esetén

A priori hibabecslés:

$$\left| \int_a^b f(x) dx - T_n(f, a, b) \right| \leq \frac{M_2(b-a)^3}{12n^2},$$

ahol $M_2 = \sup \left\{ \left| f''(x) \right| \mid x \in [a, b] \right\}$.

Hibaképletek összetett trapéz és összetett Simpson formula esetén

A priori hibabecslés:

$$\left| \int_a^b f(x) dx - T_n(f, a, b) \right| \leq \frac{M_2(b-a)^3}{12n^2},$$

ahol $M_2 = \sup \left\{ \left| f''(x) \right| \mid x \in [a, b] \right\}$.

$$\left| \int_a^b f(x) dx - S_n(f) \right| \leq \frac{M_4(b-a)^5}{180n^4},$$

ahol $M_4 = \sup \left\{ \left| f^{(4)}(x) \right| \mid x \in [a, b] \right\}$.

A posteriori hibabecslés

A posteriori hibabecslés

$$\left| \int_a^b -T_{2n} \right| \leq |T_{2n} - T_n|$$

A posteriori hibabecslés

$$\left| \int_a^b -T_{2n} \right| \leq |T_{2n} - T_n|$$

$$\left| \int_a^b -S_{2n} \right| \leq |S_{2n} - S_n|$$

Feladat

Feladat

$$\int_1^2 \ln(x) dx = \left[x \ln(x) - x \right]_{x=1}^{x=2} = 2 \ln(2) - 1 = 0.3863.$$

Feladat

$$\int_1^2 \ln(x) dx = \left[x \ln(x) - x \right]_{x=1}^{x=2} = 2 \ln(2) - 1 = 0.3863.$$

Ez az integrál remek alkalmat teremt az a priori és az a posteriori hibabecslés elvégzésére. (Önálló feladat és egyben remek Zh feladat.)

Feladat

Feladat

π értékét közelítjük az alábbi integrál segítségével:

$$\int_0^1 \frac{4}{1+x^2} dx = 4 \left[\arctan(x) \right]_{x=0}^{x=1} = \pi.$$

A megoldást adó Matlab függvény

A megoldást adó Matlab függvény

```
1  function I=Pikozelites(n)
2  -    x=linspace(0,1,n+1);
3  -    y=(1+x.^2).^(-1)*4;
4  -    I=OsszSimpInt(x,y);
5  -    end
```

Hívás és eredmények

Hívás és eredmények

Hívás: n részintervallum esetén

```
format long  
l=Pikozlelites(10)  
pi
```

Hívás és eredmények

Hívás: n részintervallum esetén

```
format long  
l=Pikozlelites(10)  
pi
```

Eredmény: A π értéke: 3.141 592 653 589 793...

$n = 10$ esetén 3.141 592 6|13 939 215 azaz 7 jegyre pontos.

$n = 20$ esetén 3.141 592 65|2 969 785 azaz 8 jegyre pontos.

$n = 100$ esetén 3.141 592 653 589 7|53 azaz 13 jegyre pontos.

Feladat

Feladat

A statisztikában a 68-95-99.7 szabály mondja meg, hogyha az adatok m várható értékű és σ^2 szórásnégyzetű normális eloszlásból származnak, akkor az adatok 68%-a 95%-a, illetve 99.7%-a esik az m várható érték 1σ , 2σ , 3σ sugarú környezetébe. Ezeket az értékeket most numerikusan kiszámoljuk.

Feladat

A statisztikában a 68-95-99.7 szabály mondja meg, hogyha az adatok m várható értékű és σ^2 szórásnégyzetű normális eloszlásból származnak, akkor az adatok 68%-a 95%-a, illetve 99.7%-a esik az m várható érték 1σ , 2σ , 3σ sugarú környezetébe. Ezeket az értékeket most numerikusan kiszámoljuk.

Tehát $\xi \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ és a

$$P_k = \mathbb{P}(m - k\sigma < \xi < m + k\sigma) \quad (k = 1, 2, 3)$$

értékét keressük.

Standardizálással kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(m - k\sigma < \xi < m + k\sigma) = \mathbb{P}\left(-k < \frac{\xi - m}{\sigma} < k\right),$$

ahol $\eta \doteq \frac{\xi - m}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$ (standard normális eloszlású valószínűségi változó), továbbá

$$\mathbb{P}(-k < \eta < k) = \Phi(k) - \Phi(-k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-k}^k e^{\frac{-x^2}{2}} dx \quad (k = 1, 2, 3).$$

Ez utóbbi integrál numerikus közelítése a feladat.

Megoldás

Megoldás

Először rajzoltassuk ki a képernyőre a

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (x \in \mathbb{R})$$

függvényt, ami a standard normális eloszlás sűrűségfüggvénye amit Gauss-féle haranggörbének szokás nevezni.

Megoldás

Először rajzoltassuk ki a képernyőre a

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (x \in \mathbb{R})$$

függvényt, ami a standard normális eloszlás sűrűségfüggvénye amit Gauss-féle haranggörbének szokás nevezni.

```
1 function phi=GaussHarang()  
2 -   x=linspace(-3,3);  
3 -   y=(1/sqrt(2*pi))*exp((-1/2)*x.^2);  
4 -   phi=plot(x,y);  
5 -   end
```

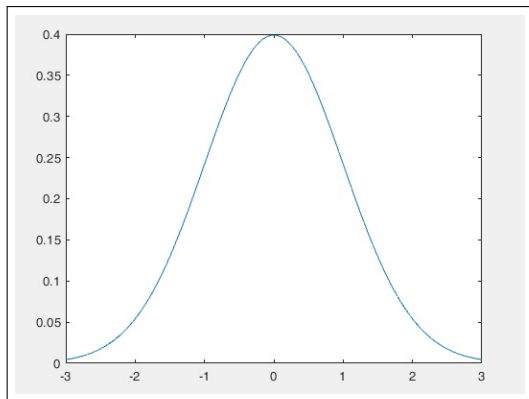
Hívás:

```
format short  
phi=GaussHarang()
```

Hívás:

```
format short  
phi=GaussHarang()
```

Eredmény:



Matlab függvény

```
1  function p=SigmaSzabaly(n)
2  -   p=zeros(3,1);
3  -   x1=linspace(0,1,n+1);
4  -   x2=linspace(1,2,n+1);
5  -   x3=linspace(2,3,n+1);
6  -   phi=@(x) (1/sqrt(2*pi))*exp((-1/2)*x.^2);
7  -   y1=phi(x1);
8  -   y2=phi(x2);
9  -   y3=phi(x3);
10 -   a=OsszSimpInt(x1,y1);
11 -   b=OsszSimpInt(x2,y2);
12 -   c=OsszSimpInt(x3,y3);
13 -   p(1)=2*a;
14 -   p(2)=p(1)+2*b;
15 -   p(3)=p(2)+2*c;
16 - end
```

Hívás és eredmények

Hívás és eredmények

Hívás:

```
format long
```

```
P=SigmaSzabaly(20)
```

Hívás és eredmények

Hívás:

```
format long  
P=SigmaSzabaly(20)
```

Eredmény: Először ismertetjük a Wikipedia-n található eredményt:

0.682 689 492 190 859

0.954 499 736 091 643

0.997 300 203 927 876

Hívás és eredmények

Hívás:

```
format long  
P=SigmaSzabaly(20)
```

Eredmény: Először ismertetjük a Wikipedia-n található eredményt:

0.682 689 492 190 859

0.954 499 736 091 643

0.997 300 203 927 876

Az általunk számolt eredmény $n = 20$ esetén:

0.682 889 525 ...

0.954 499 728 ...

0.997 300 198 ...

Hívás és eredmények

Hívás:

```
format long  
P=SigmaSzabaly(20)
```

Eredmény: Először ismertetjük a Wikipedia-n található eredményt:

0.682 689 492 190 859

0.954 499 736 091 643

0.997 300 203 927 876

Az általunk számolt eredmény $n = 20$ esetén:

0.682 889 525 ...

0.954 499 728 ...

0.997 300 198 ...

$n = 100$ esetén:

0.682 689 492 ...

0.954 499 736 ...

0.997 300 203

Léteznek még más kvadratura családok, például a Gauss kvadratúrák.

Léteznek még más kvadratura családok, például a Gauss kvadratúrák.

A numerikus integrálás nagyon ötletes módszere a Monte-Carlo módszer, amely több dimenzióban is alkalmazható, könnyen programozható. Véletlen számokat alkalmaz az integrál közelítésére.

Érdemes utánanézni a beépített Matlab függvényeknek.

KÖSZÖNÖM A FIGYELMET!