

1. Egy üzem kis illetve közepes szivattyúkat gyárt. Minden kis szivattyún 3 pénzegység a nyereség, míg a közepeseken 4 pénzegység. A szivattyúkat három különböző részlegben készítik. Egy kis szivattyú elkészítéséhez az egyes részlegekben rendre 2, 2, 1 óra szükséges. Ugyanezek az értékek a közepes szivattyú esetében rendre 1, 2, 2 óra. Az első két részleg kapacitása legfeljebb napi 84-84 óra, míg a harmadik részleg kapacitása legfeljebb napi 64 óra. Milyen napi termelés maximalizálja az üzem nyereségét?

A feladat matematikai modellje:

$$\begin{aligned} (R_1) \quad & 2x_1 + 1x_2 \leq 84 \\ (R_2) \quad & 2x_1 + 2x_2 \leq 84 \\ (R_3) \quad & 1x_1 + 2x_2 \leq 64 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ & 3x_1 + 4x_2 \rightarrow \max \end{aligned}$$

2. Adott az alábbi konvex poliéder.

$$\begin{aligned} x_1 - 6x_2 &\leq 12 \\ 3x_1 - 3x_2 &\geq -9 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

- Határozza meg a konvex poliéder összes extrémális pontját!
- Határozza meg a konvex poliéder összes extrémális irányát!
- Írja fel a konvex poliédert az extrémális pontjai és extrémális irányai segítségével!

3. Egy vállalat két termékének (T1, T2) gyártásával kapcsolatban az alábbiak ismertek. A termékek megmunkálása két gépen történik. A T1 termék egy darabjának megmunkálási ideje a gépeken rendre 3, 4 óra, a T2 terméké pedig rendre 4, 6 óra. A gépek rendre 260, 400 óra kapacitással rendelkeznek. A termékek szerelési ideje rendre 1, 2 óra. A szerelde kapacitása 120 óra. A termékek eladási egységára rendre 4, 5 pénzegység. Milyen termékösszetételben érdemes gyártani, ha maximális árbevételre törekszünk úgy, hogy a gépek kapacitását nem lépjük túl és a szerelde teljes kapacitással dolgozik?

- Írja fel a feladat duálisát és adja meg ennek optimális megoldását!
- Végezzen érzékenységvizsgálatot a szerelde kapacitására!
- A szerelde kapacitásának milyen megváltoztatása esetén lehet 5 %-os árbevétel növekedést elérni?

A feladat matematikai modellje:

$$\begin{aligned} (G_1) \quad & 3x_1 + 4x_2 \leq 260 \\ (G_2) \quad & 4x_1 + 6x_2 \leq 400 \\ (SZ) \quad & 1x_1 + 2x_2 = 120 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ & 4x_1 + 5x_2 \rightarrow \max \end{aligned}$$

Optimális táblája:

	u_1	b	u_3^*
x_1	1	20	-2
u_2	-1	20	-1
x_2	-1/2	50	3/2
-z	-3/2	-330	1/2

4. Egy vállalat három termékének (T1, T2, T3) gyártásával kapcsolatban az alábbiak ismertek. A termékek megmunkálása két gépen történik. A T1 termék egy darabjának megmunkálási ideje a gépeken rendre 3, 2 óra, a T2 terméké rendre 4, 6 óra, a T3 terméké pedig rendre 6, 1 óra. A gépek rendre 320, 160 óra kapacitással rendelkeznek. A termékek eladási egységára rendre 5, 3, 8 pénzegység. Írja fel azt a matematikai modellt, amelynél a következő kérdésre keressük a választ: Milyen termékösszetételben érdemes gyártani, ha maximális árbevételre törekszünk úgy, hogy az első gép kapacitását nem lépjük túl, a második gép pedig teljes kapacitással dolgozik?

5. Adott az alábbi táblázattal egy hálózat. Határozza meg a 4 pontot a 2 ponttól elválasztó minimális kapacitású vágást! Adja meg a vágásbeli éleket, a vágás kapacitását, valamint írja fel a feladat párjának optimális megoldását is!

honnan	1	3	4	4	5	5	6
hova	5	2	1	6	2	3	5
kapacitás	3	5	2	5	3	5	4

① Feasible

	x_1	x_2	
u_1	②	1	84
u_2	2	2	84
u_3	1	2	64
	3	4	0

	x_1	x_2	
x_1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	42
u_2	-1	①	0
u_3	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	22
	$-\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	-126

	u_1	u_2	
x_1	1	$-\frac{1}{2}$	42
x_2	-1	1	0
u_3	①	$-\frac{3}{2}$	22
	1	$-\frac{5}{2}$	-126

	u_3	u_2	
x_1	-1	1	20
x_2	1	$-\frac{1}{2}$	22
u_1	1	$-\frac{3}{2}$	22
	-1	-1	-148

Obj. Gelfingpunkt: $-3x_1, -4x_2 \rightarrow \min$ ①

$$\min \left\{ \frac{84}{2}, \frac{84}{2}, \frac{64}{1} \right\} = 42$$

$$2 - \frac{2 \cdot 1}{2} = 1, \quad 84 - \frac{2 \cdot 84}{2} = 0$$

$$2 - \frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{3}{2}, \quad 64 - \frac{1 \cdot 84}{2} = 22$$

$$4 - \frac{3 \cdot 1}{2} = \frac{5}{2}, \quad 0 - \frac{3 \cdot 84}{2} = -126$$

$$\min \left\{ \frac{42}{\frac{1}{2}}, \frac{0}{1}, \frac{22}{\frac{3}{2}} \right\} = 0$$

$$\frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2}(+1)}{1} = 1, \quad -\frac{1}{2} + \frac{\frac{3}{2}(+1)}{1} = 1$$

$$-\frac{3}{2} + \frac{\frac{5}{2}(+1)}{1} = 1$$

$$-\frac{1}{2} + \frac{1 \cdot (+\frac{3}{2})}{1} = 1, \quad 42 - \frac{1 \cdot 22}{1} = 20$$

$$1 + \frac{(+1)(-\frac{3}{2})}{1} = -\frac{1}{2}, \quad 0 + \frac{(+1) \cdot 22}{1} = 22$$

$$-\frac{5}{2} + \frac{1 \cdot (+\frac{3}{2})}{1} = -1, \quad -126 - \frac{1 \cdot 22}{1} = -148$$

A maximum erhalte 148

$$\underline{x_1 = 20}, \quad \underline{x_2 = 22}$$

$$\frac{3 \cdot 20}{60} + \frac{4 \cdot 22}{88} = \underline{148} \checkmark$$

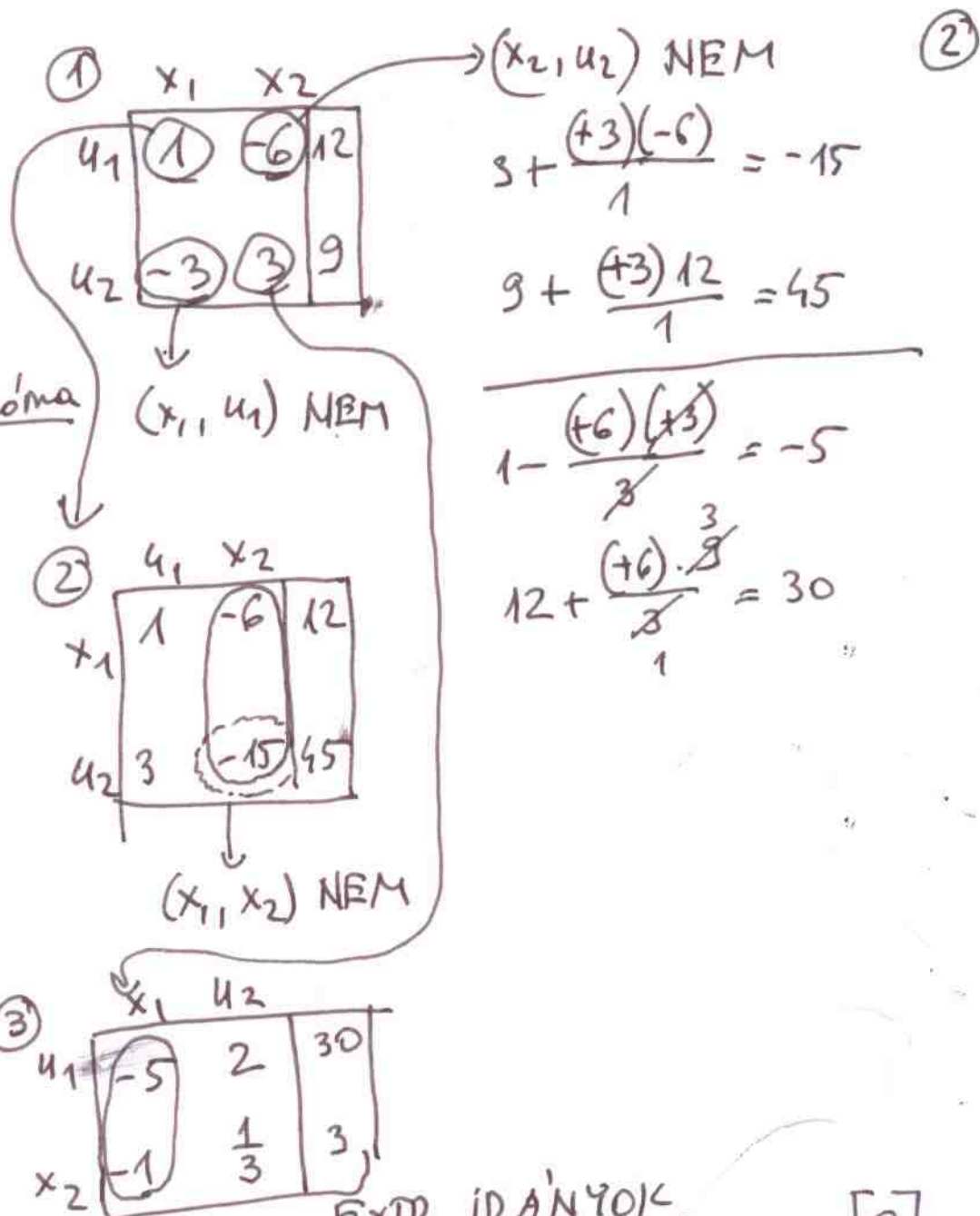
feladat

$$\begin{aligned} x_1 - 6x_2 &\leq 12 \\ -3x_1 + 3x_2 &\leq 9 \\ x_1 &\geq 0 \quad x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

lehetőséges optimális értékek

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6$$

(x_1, x_2)	NEM
(x_1, u_1)	NEM
(x_1, u_2)	②
(x_2, u_1)	③
(x_2, u_2)	NEM
(u_1, u_2)	①



EXTR. PONTOK

$$\textcircled{1} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 12 \\ 9 \end{bmatrix} \Rightarrow p_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\textcircled{2} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 0 \\ 0 \\ 45 \end{bmatrix} \Rightarrow p_2 = \begin{bmatrix} 12 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\textcircled{3} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 30 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow p_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

EXTR. IRÁNYTÖK

$$\textcircled{2} \Rightarrow d_1 = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \\ 15 \end{bmatrix} \leadsto d_1 = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\textcircled{3} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} \leadsto d_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ALG. MO

$$\underline{x} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 12 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} + \mu_1 \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix} + \mu_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 &\geq 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= 1 \\ \mu_1, \mu_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

feladat	PRIMA'L	DUA'L	MAX
	előjelhá't	felt.	megő'nődik
	feltétel	előjelhő't	megfordul.

② A duális feladat:

$$\begin{aligned}
 3y_1 + 4y_2 + 1y_3 &\geq 4 \\
 4y_1 + 6y_2 + 2y_3 &\geq 5 \\
 y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 &\text{ előjelhatetlen} \\
 260y_1 + 400y_2 + 120y_3 &\rightarrow \min.
 \end{aligned}$$

OPTIMÁLIS MŰ:

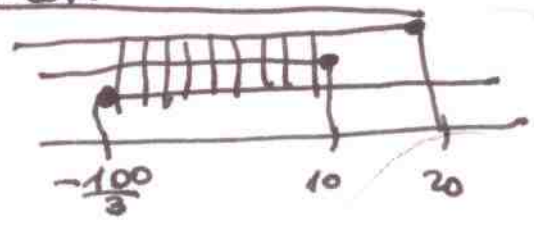
$$y_1 = \frac{3}{2}, y_2 = 0, y_3 = \frac{1}{2}$$

a minimum értéke 330

$$\begin{aligned}
 F: & \underbrace{260 \cdot \frac{3}{2}}_{390} + \underbrace{400 \cdot 0}_0 + \underbrace{120 \cdot \frac{1}{2}}_{60} \\
 & = 330 \text{ (ft)}
 \end{aligned}$$

⑥ FREKVENSGVIZSGÁLAT A SZERELŐK KAPACITÁSIÁRA

$$\begin{aligned}
 20 - 2\lambda &\geq 0 & \lambda &\leq 10 \\
 20 - \lambda &\geq 0 & \lambda &\leq 20 \\
 50 + \frac{3}{2}\lambda &\geq 0 & \frac{50 \cdot 2}{3} &\geq -\lambda
 \end{aligned}$$



$$-\frac{100}{3} \leq \lambda \leq 10$$

③ a szerelő kapacitások értéke: $-\frac{1}{2}$, ugyanis eredetileg A szerelő max feladatul volt, így rá kell vonatni $(-1) \cdot g_2$.

$$330 - \frac{1}{2}\lambda = 1.05 \cdot 330$$

$$-\frac{1}{2}\lambda = 0.05 \cdot 330$$

$$\lambda = 33 - 33$$

A szerelő kapacitását ^{33-sal} ~~33~~ értékkel csökkenteni.

4
feladat

	T_1	T_2	T_3	K
G_1	3	4	6	320
G_2	2	6	1	160
	5	3	8	

$$x_1 \rightarrow T_1\text{-höl}$$

$$x_2 \rightarrow T_2\text{-höl}$$

$$x_3 \rightarrow T_3\text{-höl}$$

4

felt:

$$3x_1 + 4x_2 + 6x_3 \leq 320$$

$$2x_1 + 6x_2 + 1x_3 = 160$$

Célfüggvény:

$$5x_1 + 3x_2 + 8x_3 \rightarrow \max.$$

előfeltétel: $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$

3) feladat

5

1.	+4	-5		+1	+1	-4
	1	2	3	4	5	6
1	\			○	3	
2		\			○	
3		5	\			
4	2			\		5
5	○	3	5		\	
6					4	\

$$\delta_1 = \min\{2, 3, 3\} = 2$$

2.		-5		+1	+6	+4
	1	2	3	4	5	6
1	\			2	1	
2		\			2	
3		5	\			
4	0			\		5
5	2	1	5		\	○
6				○	4	\

$$\delta_2 = \min\{1, 4, 5\} = 1$$

3.	+5	-3	+5	+1	+6	+4
	1	2	3	4	5	6
1	\			2	1	
2		\	○		3	
3		5	\		○	
4	0			\		4
5	2	○	5		\	1
6				1	3	\

$$\delta_3 = \min\{5, 4, 5, 3\} = 3$$

Alapfeladat

4	1	2	3	4	5	6
1	\			2	1	
2		\	3		3	
3			\		3	
4	0			\		1
5	2	0	2		\	4
6				4	0	\

UAGAS: $S = \{4, 6\}$ (6)

$T = \{1, 2, 3, 5\}$

A csőges elinek megkeresi-
te lefedéssel az
1. táblázatban

UTOLSÓ
TÁBLÁZAT

1.	1	2	3	4	5	6
1	\				3	
2		\				
3		5	\			
4	2			\		
5		3	5		\	
6				4		\

A csőges elik:

$(4, 1), (6, 5)$

A csőges értéke:

$$2 + 4 = 6$$

DUALIS FELADAT

	1	2	3	4	5	6
1	\			-2	2	
2		\	-3		-3	
3		3	\		-3	
4	2			\		4
5	-2	3	3		\	-4
6				-4	4	\

A maximális folyamat
az első és utolsó táblázat
különbsége adja.

$s = 4$ vagy $t = 2$ orlopa

A folyam értéke:

$$2 + 4 = 3 + 3 = 6$$

(vagy: $s_1 + s_2 + s_3 =$

$$= 2 + 1 + 3 = 6)$$