

# Adatstruktúrák és Algoritmusok

## 9. gyakorlat

# Rendezések II

### 3. Leszámláló rendezés

## A leszámpláló rendezés

A leszámpláló rendezés egy lineáris idejű stabil rendezés. Kis felső korláttal rendelkező pozitív egészek rendezésére alkalmas. A pszeudokódot a "bicaj, decaj" mondóka segítségével könnyű memorizálni.

### 3. Leszámláló rendezés pszeudokódja

LESZREND( $A, B$ )

INPUT:  $A[1..n]$  a rendezendő tömb,

$k = \max \{A[i] \mid i = 1, 2, \dots, n\}$ .

OUTPUT:  $B[1..n]$ , ami az  $A$  elemeit tartalmazza rendezve. Az algoritmus használ egy  $C[1..k]$  segédtömböt

	LESZREND( $A, B$ )
1.	FOR $i \leftarrow 1$ , TO $k$ DO
2.	$C[i] \leftarrow 0$
3.	FOR $j \leftarrow 1$ TO $n$ DO
4.	INC ( $C[A[j]]$ )
5.	FOR $i \leftarrow 2$ TO $k$ DO
6.	$C[i] \leftarrow C[i - 1] + C[i]$
7.	FOR $j \leftarrow n$ DOWNTO 1 DO
8.	$B[C[A[j]]] \leftarrow A[j]$
9.	DEC ( $C[A[j]]$ )
10.	RETURN( $B$ )

# Példa

Rendezzük leszámláló rendezéssel az alábbi tömböt

$$A = [4, 2, 4, 1, 4, 6, 1, 4].$$

Az algoritmus használja az alábbi tömböket:

$$B = [., ., ., ., ., ., ., .]$$

$$C = [., ., ., ., ., .]$$

# 1. lépés

A  $C$  tömb inicializálása.

```
FOR  $i \leftarrow 1$  TO hossz[ $C$ ] DO  
   $C[i] \leftarrow 0$ 
```

$C = [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, ]$

## 2. lépés

```
FOR  $j \leftarrow 1$  TO hossz[A] DO  
  INC (C [A[j]])
```

$j = 1$	INC (C [A[1]]) :	$C = [0, 0, 0, 1, 0, 0]$
$j = 2$	INC (C [A[2]]) :	$C = [0, 1, 0, 1, 0, 0]$
$j = 3$	INC (C [A[3]]) :	$C = [0, 1, 0, 2, 0, 0]$
$j = 4$	INC (C [A[4]]) :	$C = [1, 1, 0, 2, 0, 0]$
$j = 5$	INC (C [A[5]]) :	$C = [1, 1, 0, 3, 0, 0]$
$j = 6$	INC (C [A[6]]) :	$C = [1, 1, 0, 3, 0, 1]$
$j = 7$	INC (C [A[7]]) :	$C = [2, 1, 0, 3, 0, 1]$
$j = 8$	INC (C [A[8]]) :	$C = [2, 1, 0, 4, 0, 1]$

A 2. lépés hatására a  $C[i]$  azt mondja meg, hogy hány darab  $i$  szám van az  $A$  többen, azaz képletekkel  $C[i] = |\{k \mid A[k] = i\}|$ .

### 3. lépés

```
FOR  $i \leftarrow 2$  TO hossz[C] DO  
   $C[i] \leftarrow C[i] + C[i - 1]$ 
```

Ez a lépés egy részletösszeg-sorozat képzést valósít meg. A felső sor mutatja a  $C$  tömb elemeit a részletösszeg sorozat képzés előtt, az alsó utána:

$$C = [2, 1, 0, 4, 0, 1]$$

$$C = \left[ 2, \underbrace{2+1}_3, \underbrace{2+1+0}_3, \underbrace{2+1+0+4}_7, \underbrace{2+1+0+4+0}_7, \underbrace{2+1+0+4+0+1}_8 \right]$$

$$\begin{aligned}i = 2 & \quad C[2] \leftarrow C[2] + C[1] = 1 + 2 = 3 \\i = 3 & \quad C[3] \leftarrow C[3] + C[2] = 0 + 3 = 3 \\i = 4 & \quad C[4] \leftarrow C[4] + C[3] = 4 + 3 = 7 \\i = 5 & \quad C[5] \leftarrow C[5] + C[4] = 0 + 7 = 7 \\i = 6 & \quad C[6] \leftarrow C[6] + C[5] = 1 + 7 = 8\end{aligned}$$

Tehát a megváltozott  $C$  tömb:

$$C = [2, 3, 7, 7, 8]$$

A 3. lépés hatására most

$$C[i] = |\{k \mid A[k] \leq i\}|.$$

Ez azt jelenti, hogy ha  $A[j] = i$  és ez az  $j$  a legutolsó index az  $A$  tömbben, amelyre  $A[j] = i$ , akkor  $C[i]$  megmondja azt az indexet, hogy az  $A[j]$  elemnek a  $B$  tömbben hová kell kerülnie.

Az első 3 lépést nem kell ennyire részletezni a Z.H.-ban, persze a pszeudokód és a futás eredménye kell. A most következő részt viszont valamilyen módon kérem kiírni.

## 4. lépés, a bicaj decaj rész

```
FOR  $j \leftarrow$  Hossz[A] DOWTO 1 DO  
  B[C[A[j]]]  $\leftarrow$  A[j]  
  DEC(C[A[j]])
```

$$j = 8 \quad B[\underbrace{C[\underbrace{A[8]}_4]}_7] \leftarrow \underbrace{A[8]}_4 \quad C = [2, 3, 3, \overset{6}{7}, 7, 8]$$

Ezt a lépést most egy kicsit részletezzük.  $j = 8$ ,  $A[8] = 4$ . A 2. lépés végén  $C[4] = 4$  volt, ami azt jelentette, hogy a 4-es számból (index) 4 darab (érték) van az  $A$  tömbben. A 3. lépés végére  $C[4] = 7$ , ami azt jelenti, hogy a legnagyobb indexű 4-es az  $A$  tömbben, ami az  $A[8]$  a  $B$ -ben - ami az  $A$  tömb elemeit tartalmazza - a 7. helyre kell kerülnie. Úgyhogy az  $A[8] = 4$ -et beszúrjuk a  $B[7]$ -be, majd ezt követően a  $C[4]$  értékét 7-ről 6-ra csökkentjük, hogy a második legnagyobb indexű 4-es a  $B[6]$ -ba tudjon kerülni. Futtassuk tovább az algoritmust.

$$j = 7 \quad B[\underbrace{C[\underbrace{A[7]}_1]}_2] \leftarrow \underbrace{A[7]}_1 \quad C = [2, 3, 3, 6, 7, 8]$$

$$j = 6 \quad B[\underbrace{C[\underbrace{A[6]}_6]}_8] \leftarrow \underbrace{A[6]}_6 \quad C = [1, 3, 3, 6, 7, 8]$$

$$j = 5 \quad B[\underbrace{C[\underbrace{A[5]}_4]}_6] \leftarrow \underbrace{A[5]}_4 \quad C = [1, 3, 3, 6, 7, 7]$$

$$j = 4 \quad B[C[A[4]]] \leftarrow A[4] \quad C = [1^0, 3, 3, 5, 7, 7]$$

$\underbrace{\quad\quad\quad}_1 \quad \underbrace{\quad}_1$   
 $\underbrace{\quad\quad\quad}_1$

$$j = 3 \quad B[C[A[3]]] \leftarrow A[3] \quad C = [0, 3, 3, 5^4, 7, 7]$$

$\underbrace{\quad\quad\quad}_4 \quad \underbrace{\quad}_4$   
 $\underbrace{\quad\quad\quad}_5$

$$j = 2 \quad B[\underbrace{C[\underbrace{A[2]}_2]}_3] \leftarrow \underbrace{A[2]}_2 \quad C = [0, \overset{2}{3}, 3, 4, 7, 7]$$

$$j = 1 \quad B[\underbrace{C[\underbrace{A[1]}_4]}_4] \leftarrow \underbrace{A[1]}_4 \quad C = [0, 2, 3, \overset{3}{4}, 7, 7]$$

Az eredeti tömb:  $A = [4, 2, 4, 1, 4, 6, 1, 4]$ .

A rendezett tömb:  $B = [1, 1, 2, 4, 4, 4, 4, 6]$ .

## 2. feladat

Rendezzük leszámpláló rendezéssel az

$$A = [2, 1, 2, 4, 3, 3]$$

tömböt.

$$B = [\cdot, \cdot, \cdot, \cdot, \cdot, \cdot]$$

$$C = [\cdot, \cdot, \cdot, \cdot]$$

# 1. lépés

A  $C$  tömb inicializálása.

```
FOR  $i \leftarrow 1$  TO hossz[ $C$ ] DO  
   $C[i] \leftarrow 0$ 
```

$C = [0, 0, 0, 0]$

## 2. lépés

```
FOR  $j \leftarrow 1$  TO hossz[A] DO  
  INC (C [A[j]])
```

$C = [1, 2, 2, 1]$

$C[i]$  azt jelenti, hogy az  $i$  értékből hány darab van.

### 3. lépés

```
FOR  $i \leftarrow 2$  TO hossz[C] DO  
   $C[i] \leftarrow C[i] + C[i - 1]$ 
```

$C = [1, 3, 5, 6]$

$C[i] = \{k \mid A[k] \leq i\}$

## 4. lépés

FOR  $j \leftarrow \text{Hossz}[A]$  DOWTO 1 DO

$B[C[A[j]]] \leftarrow A[j]$

DEC( $C[A[j]]$ )

$$j = 6 \quad B[\underbrace{C[\underbrace{A[6]}_3]}_5] \leftarrow \underbrace{A[6]}_3 \quad C = [1, 3, \overset{4}{5}, 6]$$

$$j = 5 \quad B[\underbrace{C[\underbrace{A[5]}_3]}_4] \leftarrow \underbrace{A[5]}_3 \quad C = [1, 3, \overset{3}{4}, 6]$$

$$j = 4 \quad B[\underbrace{C[\underbrace{A[4]}_4]}_6] \leftarrow \underbrace{A[4]}_4 \quad C = [1, 3, 3, \overset{5}{6}]$$

$$j = 3 \quad B[\underbrace{C[\underbrace{A[3]}_2]}_3] \leftarrow \underbrace{A[3]}_2 \quad C = [1, \overset{2}{\cancel{3}}, 3, 5]$$

$$j = 2 \quad B[\underbrace{C[\underbrace{A[2]}_1]}_1] \leftarrow \underbrace{A[2]}_1 \quad C = [\overset{0}{\cancel{1}}, 2, 3, 5]$$

$$j = 1 \quad B[\underbrace{C[\underbrace{A[1]}_2]}_2] \leftarrow \underbrace{A[1]}_2 \quad C = [0, \overset{0}{\cancel{1}}, 3, 5]$$

Az eredeti tömb:  $A = [2, 1, 2, 4, 3, 3]$ .

A rendezett tömb:  $B = [1, 2, 2, 3, 3, 4]$ .

## 4. A buborék rendezés

## 4. A buborék rendezés

BUBIREND( $A$ ),  $T(n) = \Theta(n^2)$  helyben rendezés, stabil rendezés.

A buborékrendezés szomszédos cserékkel rendezi a tömb elemeit.

INPUT:  $A[1..n]$  a rendezendő tömb.

OUTPUT:  $A[1..n]$  a rendezett tömb.

	BUBIREND( $A$ )
1.	$i \leftarrow 2$
2.	REPEAT
3.	nemvoltcsere $\leftarrow$ igaz
4.	FOR $j \leftarrow n$ DOWTO $i$ DO
5.	IF $A[j] < A[j - 1]$
6.	THEN CSERE ( $A[j], A[j - 1]$ )
7.	nemvoltcsere $\leftarrow$ hamis
8.	INC ( $i$ )
9.	UNTIL nemvoltcsere
10.	RETURN( $A$ )

# Feladat

Rendezzük buborékrendezéssel az alábbi tömböt:

$$A = [315, 22, 8, 3, 13].$$

$i = 2$

$$A = [315, 22, \overset{3}{8}, \overset{8}{3}, 13]$$

$$A = [315, \overset{3}{22}, \overset{22}{3}, 8, 13]$$

$$A = [\overset{3}{315}, \overset{315}{3}, 22, 3, 13]$$

$i = 3$

$$A = [3 || 315, \overset{8}{22}, \overset{22}{8}, 13]$$

$$A = [3 || \overset{8}{315}, \overset{315}{8}, 22, 13]$$

$i = 4$

$$A = [3, 8 || 315, \overset{13}{22}, \overset{22}{13}]$$

$$A = [3, 8 || \overset{13}{315}, \overset{315}{13}, 22]$$

$i = 5$

$$A = [3, 8, 13 || \overset{22}{315}, \overset{315}{22}]$$

$i = 6$  A for ciklus nem indul be, a nemvoltcsere igaz marad, így kélép az algoritmus a repeat-until ciklusból és visszatér a rendezett tömbbel.

RETURN(A)

## 5. A beszúró rendezés

## 5. A beszűrő rendezés

BESZREND( $A$ ),  $T(n) = \Theta(n^2)$ , helyben rendezés, stabil rendezés.

INPUT:  $A[1..n]$  a rendezendő tömb.

OUTPUT:  $A[1..n]$  a rendezett tömb.

	BESZREND(A)
1.	FOR $i \leftarrow 2$ TO $n$ DO
2.	$x \leftarrow A[i]$
3.	$j \leftarrow i - 1$
4.	WHILE ( $j > 0$ és $x < A[j]$ ) DO
5.	$A[j + 1] \leftarrow A[j]$
6.	DEC( $j$ )
7.	$A[j + 1] \leftarrow x$
8.	RETURN(A)

# Feladat

Beszúró rendezéssel rendezzük a

$$A = [315, 22, 8, 3, 13]$$

tömböt.

Először csak nagy vonalakban átfutjuk, hogy hogyan működik az algoritmus.

$A = [315||22, 8, 3, 13]$

$i = 2 \quad x \leftarrow A[2] = 22 \quad A = [22, 315||8, 3, 13]$

$i = 3 \quad x \leftarrow A[3] = 8 \quad A = [8, 22, 315||3, 13]$

$i = 4 \quad x \leftarrow A[4] = 3 \quad A = [3, 8, 22, 315||13]$

$i = 5 \quad x \leftarrow A[5] = 13 \quad A = [3, 8, 13, 22, 315]$

Most nézzük meg egy kicsit részletesebben:

$i = 2$

$$A = \begin{array}{cccccc} & 22 & 315 & & & \\ & \uparrow & \downarrow & & & \\ & j & x & & & \\ & 315, & 22, & 8, & 3, & 13 \end{array}$$

$i = 3$

	8	22	315		
$A = [$	<del>22</del> ,	<del>315</del>	8,	3,	13]
$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\downarrow$		
$j$	$j$	$j$	$x$		

$i = 4$

	3	8	22	315	
$A = [$	<del>8</del> ,	<del>22</del> ,	<del>315</del>   ,	<del>3</del> ,	13]
	↑	↑	↑	↓	
	$j$	$j$	$j$	x	

$i = 5$

			13	22	315
$A = [$	3	8,	<del>22,</del>	<del>315</del>   ,	<del>13]</del>
		$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\downarrow$
		$j$	$j$	$j$	$x$

RETURN  $A = [3, 8, 13, 22, 315]$

## 6. A Shell rendezés

## 6. A Shell rendezés fogyó növekményekkel

Egymástól távoli elemeket mozgat.

**Növekmények:**  $h[1 \dots t]$  ( $t = \lceil \log(n) \rceil - 1$ )

$h[1] < h[2] < \dots < h[t]$  növekmények tömbjei csökkenő módon járjuk be.

Összegyűjtöttünk néhány tipikus módszert, amelynek segítségével a növekmények tömbjét fel tudjuk tölteni.

$$h[1] = 1, \quad h[i + 1] = 2h[i] \quad \implies \quad h = [1, 2, 4]$$

$$h[1] = 1, \quad h[i + 1] = 3h[i] + 1 \quad \implies \quad h = [1, 4, 13]$$

$$h[1] = 1, \quad h[i + 1] = 2h[i] - 1 \quad \implies \quad h = [1, 3, 7]$$

# Az algoritmus

SHELLREND( $A, h$ )

INPUT:  $A[1..n]$  a rendezendő tömb,  $h[1..t]$  növekmények.

OUTPUT:  $A[1..n]$  a rendezett tömb.

	SHELLREND( $A, h$ )
1.	FOR $s \leftarrow t$ DOWNTO 1 DO
2.	$m \leftarrow h[s]$
3.	FOR $i \leftarrow m + 1$ TO $n$ DO
4.	$x \leftarrow A[i]$
5.	$j \leftarrow i - m$
6.	WHILE ( $j > 0$ és $x < A[j]$ ) DO
7.	$A[j + m] \leftarrow A[j]$
8.	$j \leftarrow j - m$
9.	$A[j + m] \leftarrow x$
10.	RETURN( $A$ )

# Feladat

Rendezzük Shell rendezéssel az alábbi tömböt:

$$A = [315, 22, 8, 3, 13, 4, 29].$$

Legyen továbbá  $h := [1, 2, 4]$ , a rendezendő tömb hossza:  $n = 7$ .

s=3  $m = h[3] = 4$  FOR  $i = 5$  TO  $7$  DO

$i = 5$ :  $A = [$   $\begin{array}{c} 13 \\ \uparrow \\ j \end{array}$   $315,$   $22,$   $8,$   $3,$   $\begin{array}{c} 315 \\ \downarrow \\ x \end{array}$   $4,$   $29]$  (WHILE 1x)

$i = 6$ :  $A = [ 13 \quad 22, \quad 8, \quad 3, \quad 315, \quad 4, \quad 29 ]$  (WHILE 1x)

$\uparrow$   
 $j$

$\downarrow$   
 $x$

$i = 7$ :  $A = [ 13 \ 4, \ 8, \ 3, \ 315, \ 22, \ 29 ]$  (WHILE 0x)

$\uparrow$   $\downarrow$   
 $j$   $x$

$s=2$   $m = h[2] = 2$  FOR  $i = 3$  TO 7 DO

$i = 3$ :  $A = [$       8      13  
  ~~13~~, 4, 8, 3, 315, 22, 29 ] (WHILE 1x)  
          ↑            ↓  
          *j*            *x*

$i = 4$ :  $A = [ 8, 4, 13, 3, 315, 22, 29 ]$  (WHILE 1x)

	3	4				
	↑	↓				
	$j$	x				

$i = 5$ :  $A = [ 8, 3, 13, 4, 315, 22, 29 ]$  (WHILE 0x)

$\uparrow$                        $\downarrow$   
 $j$                                $x$

$i = 6$ :  $A = [ 8, 3, 13, 4, 315, 22, 29 ]$  (WHILE 0x)

$\uparrow$   $\downarrow$   
 $j$   $x$

$i = 7$ :  $A = [ 8, 3, 13, 4, 315, 22, 29 ]$  (WHILE 1x)

				29		315	
				↑		↓	
			$j$		$j$	$x$	

$s=1$   $m = h[1] = 1$  FOR  $i = 2$  TO 7 DO (Innen egy beszúrásos rendezés valósul meg.)

$i = 2$ :  $A = [ \begin{array}{cc} 3 & 8 \\ 8, & 3, & 13, & 4, & 29, & 22, & 315 \end{array} ]$  (WHILE 1x)  
 $\begin{array}{cc} \uparrow & \downarrow \\ j & x \end{array}$

$i = 3$ :  $A = [ 3, 8, 13, 4, 29, 22, 315 ]$  (WHILE 0x)

$\uparrow$        $\downarrow$   
 $j$        $x$

$$i = 4: \quad A = [ \quad \quad \quad \begin{matrix} 4 & 8 & 13 \\ 3, & 8, & 13, & 4, & 29, & 22, & 315 \end{matrix} ]$$

$$\quad \quad \quad \begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \downarrow \\ j & j & j & x \end{matrix}$$

$j = 3 \quad A = [3, 8, 13, 13, 29, 22, 315]$

$j = 2 \quad A = [3, 8, 8, 13, 29, 22, 315]$

$j = 1 \quad \text{nem indul be}$

$i = 5$ :  $A = [ 3, 4, 8, 13, 29, 22, 315 ]$  (WHILE 0x)

$\uparrow$   $\downarrow$   
 $j$   $x$

$i = 6$ :  $A = [ 3, 4, 8, 13, 22, 29, 22, 315 ]$  (WHILE 0x)

				22	29		
			↑	↑	↓		
			$j$	$j$	$x$		

$i = 7$ :  $A = [ 3, 4, 8, 13, 22, 29, 315 ]$  (WHILE 0x)

$\uparrow$        $\downarrow$   
 $j$        $x$

RETURN  $A = [3, 4, 8, 22, 29, 315]$

**Köszönöm a figyelmet!**