Adatstruktúrák és Algoritmusok

10. gyakorlat

Rendezések III.

Az összefésülő rendezés

Az Összefésülő rendezés

Az Összefésülő rendezés az ÖSSZEFÉSÜL algoritmuson alapul, amely két rendezett tömböt rendezett tömbbé fésül össze. Ennek az algoritmusnak most két változatát írjuk le. Az első változatban egy A és egy B rendezett tömböt rendezett módon összefésüljük. A kapott tömb a C tömb.
A második változatban ezt az algoritmust átírjuk úgy, hogy alkalmas legyen egy tömb két egymáshoz csatlakozó rendezett résztömbjének rendezett módon történő összefűzésére. A kapott rendezett tömb visszaíródik az eredeti tömb megfelelő helyére.

ÖSSZEFÉSÜL1(A, B, C) algoritmus.
INPUT: $A[1..n]$, $B[1..m]$ a rendezendő tömbök.
OUTPUT: $C[1..n+m]$ rendezett tömb, az A és B tömbök rendezett összefésülése.

ÖSSZEFÉSÜL1(A, B, C)
$i \longleftarrow 1$, $j \longleftarrow 1$, $k \longleftarrow 1$
REPEAT
IF $A[i] < B[j]$
THEN $C[k] \longleftarrow A[i]$, INC(i), INC(k),
ELSE $C[k] \longleftarrow B[j]$, INC(j), INC(k),
UNTIL $i = n + 1$ vagy $j = m + 1$
IF $i = n + 1$
THEN FOR $l \longleftarrow j$ TO m DO
$C[k] \longleftarrow B[l]$ INC(k)
ELSE FOR $l \longleftarrow i$ TO n DO
$C[k] \longleftarrow A[i]$ INC(k)
RETURN(C)

Feladat

Az ÖSSZEFÉSÜL1 algoritmus alkalmazásával fésüljük össze az

$A = [3, 5, 11, 14, 17, 22, 25, 33]$, és $B = [1, 2, 6, 8, 9, 15, 16]$

tömböket. Az eredmény jelenjen meg egy C tömbben.

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{IF } A[i] < B[j] \\ \quad \text{THEN } C[k] \longleftarrow A[i] \text{ INC}(i),\text{INC}(k) \\ \quad \text{ELSE } C[k] \longleftarrow B[j] \text{ INC}(j),\text{INC}(k) \end{array}}$$

i	j	k	$A[i] < B[j]$	$C[k] \longleftarrow$
1	1	1	$A[1] < B[1]$ hamis	$C[1] \longleftarrow B[1] = 1$
1	2	2	$A[1] < B[2]$ hamis	$C[2] \longleftarrow B[2] = 2$
1	3	3	$A[1] < B[3]$ hamis	$C[3] \longleftarrow A[1] = 3$
2	3	4	$A[2] < B[3]$ hamis	$C[4] \longleftarrow A[2] = 5$
3	3	5	$A[3] < B[3]$ hamis	$C[5] \longleftarrow B[3] = 6$
3	4	6	$A[3] < B[4]$ hamis	$C[6] \longleftarrow B[4] = 8$
3	5	7	$A[3] < B[5]$ hamis	$C[7] \longleftarrow B[5] = 9$
3	6	8	$A[3] < B[6]$ hamis	$C[8] \longleftarrow A[3] = 11$
4	6	9	$A[4] < B[6]$ hamis	$C[9] \longleftarrow A[4] = 14$
5	6	10	$A[5] < B[6]$ hamis	$C[10] \longleftarrow B[6] = 15$
5	7	11	$A[5] < B[7]$ hamis	$C[11] \longleftarrow B[7] = 16$
5	8	12		

$$C[12] \longleftarrow A[5] = 17$$
$$C[13] \longleftarrow A[6] = 22$$
$$C[14] \longleftarrow A[7] = 25$$
$$C[15] \longleftarrow A[8] = 33$$

A kapott rendezett tömb: $C = [1, 2, 3, 5, 6, 8, 9, 11, 14, 15, 16]$.

ÖSSZEFÉSÜL2 (A, p, q, r) algoritmus.
INPUT: $A[1, \ldots, n]$ tömb, amelynek az $A[p, \ldots, q]$, $A[q+1, \ldots, r]$ résztömbjei rendezettek. Ezeket a rendezett résztömböket rendezett módon összefésüljük. Az eredmény átmenetileg bekerül egy $C[1, \ldots, r-p+2]$ tömbbe, ahonnan az elemeket visszaírjuk az $A[p, \ldots, r]$ résztömbbe.
OUTPUT: $C[1, \ldots, n]$ rendezett tömb, az $A[p, \ldots, r]$ rendezett résztömbökkel.

```
ÖSSZEFÉSÜL2(A, p, q, r)
i ⟵ p, j ⟵ q + 1, k ⟵ 1
REPEAT
      IF A[i] < A[j]
            THEN C[k] ⟵ A[i], INC(i), INC(k),
            ELSE C[k] ⟵ A[j], INC(j), INC(k),
UNTIL i = q + 1 vagy j = r + 1
IF i = q + 1
      THEN FOR l ⟵ j − 1 TO r DO
            C[k] ⟵ A[l] INC(k)
      ELSE FOR l ⟵ i − 1 TO q DO
            C[k] ⟵ A[l] INC(k)
FOR l ⟵ 1 TO r − p + 1 DO
      A[p − 1 + l ⟵ C[l]
RETURN(A)
```

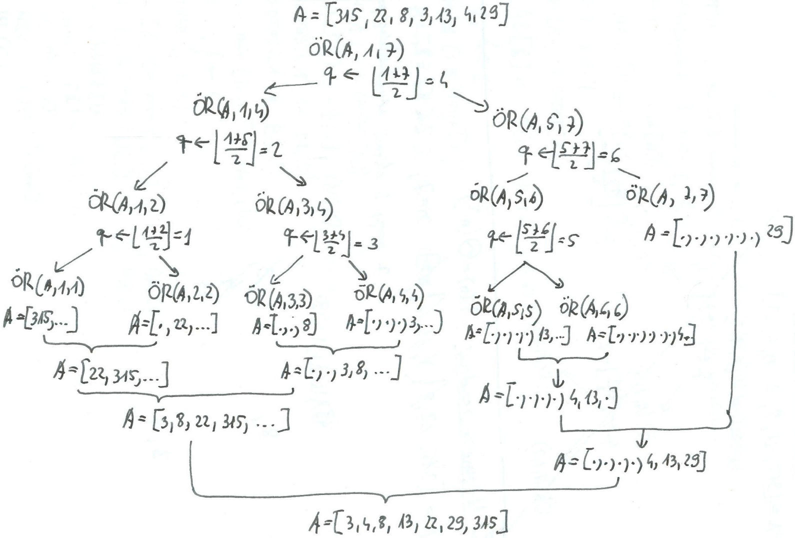
Összefésülő rendezés (MERGE SORT)

7. Összefésülő rendezés (MERGE SORT)

7. Összefésülő rendezés (MERGE SORT)
$T(n) = \Theta\left(n \log(n)\right)$ ÖR(A, p, r)
INPUT: A egy tömb, amelynek az $A[p, \ldots, r]$ résztömbjét kell rendezni.
OUTPUT: A tömb, a $A[p, \ldots, q]$ rendezett résztömbökkel.

	ÖR(A, p, r)
1.	IF $p < r$
2.	THEN $q \longleftarrow \left\lfloor \frac{p+r}{2} \right\rfloor$
3.	ÖR(A, p, q)
4.	ÖR$(A, q+1, r)$
5.	ÖSSZEFÉSÜL2(A, p, q, r)
6.	RETURN(A)

ÖSSZEFÉSÜLŐ RENDEZÉS



Butcher-féle páros páratlan összefésülés

Butcher-féle páros-páratlan összefűzés

BATCHER(A, B, C)
INPUT: A, B rendezett tömbök.
OUTPUT: C az A, B rendezett tömbök rendezett összefűzése.

- Az algoritmus úgy működik, hogy az A tömb elemeiből létrehozzuk az A_1 és A_2 tömböket úgy, hogy az A tömb páratlan indexű elemei az A_1, páros indexű elemei az A_2 tömbbe kerülnek.
- Hasonló módon előállítjuk a B tömb elemeiből a B_1 és B_2 tömböket.
- Ezután az U tömbbe rendezett módon összefésüljük a A_1 és B_2 rendezett tömböket, illetve a V tömbbe rendezett módon összefésüljük az A_2 és B_1 rendezett tömböket.

- Ezután jön a trükk: A C tömbbe kell rendezett módon összefésülnünk az U és a V tömböket. Ez az összefésülés azonban már könnyen megtehető az alábbi módon:

$$\begin{aligned} C[2i-1] &:= \min(U[i], V[i]), \\ C[2i] &:= \max(U[i], V[i]). \end{aligned}$$

BATCHER(A, B, C)
$i \longleftarrow 1$, $k \longleftarrow 1$
WHILE $(i \leqslant \mathrm{Hossz}[A])$
$A1[k] \longleftarrow A[i]$, INC$(k)$, $i \longleftarrow i+2$
$i \longleftarrow 2$, $k \longleftarrow 1$
WHILE $(i \leqslant \mathrm{Hossz}[A])$
$A2[k] \longleftarrow A[i]$, INC$(k)$, $i \longleftarrow i+2$
$i \longleftarrow 1$, $k \longleftarrow 1$
WHILE $(i \leqslant \mathrm{Hossz}[B])$
$B1[k] \longleftarrow B[i]$, INC$(k)$, $i \longleftarrow i+2$
$i \longleftarrow 2$, $k \longleftarrow 1$
WHILE $(i \leqslant \mathrm{Hossz}[B])$
$B2[k] \longleftarrow B[i]$, INC$(k)$, $i \longleftarrow i+2$
ÖSSZEFÉSÜL1$(A1, B2, U)$
ÖSSZEFÉSÜL1$(A2, B1, V)$

folytatás

$n \longleftarrow \min(\mathrm{Hossz}[U], \mathrm{Hossz}[V])$
$i \longleftarrow 1,\ k \longleftarrow 1$
WHILE $(i \leqslant n)$
$\quad C[k] \longleftarrow \min\,(U[i], V[i])$, INC$(k)$
$\quad C[k] \longleftarrow \max\,(U[i], V[i])$, INC$(k)$
IF $n < \mathrm{Hossz}[U]$
$\quad$ THEN $C[k] \longleftarrow U[n+1]$
IF $n < \mathrm{Hossz}[V]$
$\quad$ THEN $C[k] \longleftarrow V[n+1]$
RETURN(C)

Feladat a Batcher-féle páros-páratlan összefésülésre

$$A = [3, 5, 11, 14, 17, 22, 25, 33]$$

$$A_1 = [3, 11, 17, 25]$$

$$A_2 = [5, 14, 22, 33]$$

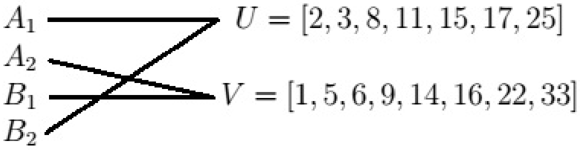
$$B = [1, 2, 6, 8, 9, 15, 16]$$

$$B_1 = [1, 6, 9, 16]$$

$$B_2 = [2, 8, 15]$$

ÖSSZEFÉSÜL1($A1$, $B2$, U),

ÖSSZEFÉSÜL1($A2$, $B1$, V).



$$C[2i-1] = \min(U[i], V[i]),$$
$$C[2i] = \max(U[i], V[i]).$$

U	2	3	8	11	15	17	25	
V	1	5	6	9	14	16	22	33

Tehát a rendezett tömb:
$C = [1, 2, 3, 5, 6, 8, 9, 11, 14, 15, 16, 17, 22, 25, 33]$.

A Négyzetes rendezés

8. Négyzetes rendezés

$T(n) = \Theta\left(n^{\frac{3}{2}}\right)$.

- A tömb elemeit alcsoportokra osztjuk úgy, hogy minden alcsoportnak körülbelül annyi eleme legyen, amennyi az alcsoportok száma. Ez úgy érhető el, hogy n hosszúságú tömb esetén a $\lceil\sqrt{n}\rceil$ elemenként alkossanak a tömb elemei egy-egy alcsoportot.
- Ezt követően minden alcsoportnak kiválasztjuk a legkisebb elemét. Ezeket az elemeket egy segédtömbben átmenetileg tároljuk, ezek alkotják a főcsoportot.
- A kiválasztott minimális elemeket el is távolítjuk az eredeti tömbből.

- Ezt követően megkeressük a főcsoport legkisebb elemét, amelyet eltávolítunk a főcsoportból és beírjuk az eredménytömbbe.
- Az eltávolított elemet abból az alcsoportból pótoljuk, amelyikből az eltávolított elem származik. Az alcsoport sorszámát (tehát, hogy hányadik alcsoportról van szó), a főcsoportból eltávolított elem indexe adja. Illetve, ha az alcsoportnak már nincs eleme, akkor nem pótoljuk. Az eljárást iteráltan alkalmazzuk mindaddig, ameddig a főcsoportból el nem fogynak az elemek.
- Az eredménytömb az eredeti tömb elemeit tartalmazza rendezett módon.

Feladat

Rendezzük a négyzetes rendezés alkalmazásával a

$$A = [315, 22, 8, 3, 13, 4, 29]$$

tömböt.

Megoldás

Mivel $n = 7$ és $\lceil \sqrt{n} \rceil = 3$, így 3 elemenként fognak alcsoportototokat alkotni az A. tömb elemei és 3 alcsoportot kapunk. Ezek a következők:

$$A = [315, 22, 8|3, 13, 4|29].$$

Az alcsoportok minimális elemeiből megalkotjuk a főcsoportot. A főcsoportnak annyi eleme van, amennyi az alcsoportok száma, tehát szintén 3.
A főcsoportból kiválasztjuk és el is távolítjuk a minimális elemet. Ez az elem bekerül az eredménytömbbe (ami most egy B tömb), majd a megfelelő alcsoportból visszapótoljuk, amennyiben a megfelelő alcsoportnak van eleme, ha nincs, akkor nem pótoljuk. Ezt az iterációt tartalmazza a következő táblázat.

8	$\cancel{3}$	29	$A = [315, 22, \cdot \vert \cdot, 13, 4 \vert \cdot]$
8	4	29	$A = [315, 22, \cdot \vert \cdot, \cancel{13}, \cdot \vert \cdot]$
$\cancel{8}$	13	29	$A = [315, \cancel{22}, \cdot \vert \cdot, \cdot, \cdot \vert \cdot]$
22	$\cancel{13}$	29	$A = [315, \cdot, \cdot \vert \cdot, \cdot, \cdot \vert \cdot]$
$\cancel{22}$	$\cdot$	29	$A = [\cancel{315}, \cdot, \cdot \vert \cdot, \cdot, \cdot \vert \cdot]$
315	$\cdot$	$\cancel{29}$	$A = [\cdot, \cdot, \cdot \vert \cdot, \cdot, \cdot \vert \cdot]$
$\cancel{315}$	$\cdot$	$\cdot$	
$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	

Tehát a rendezett tömb: $B = [3, 4, 8, 13, 22, 29, 315]$.

A lexikografikus rendezés

Ismétlés

Legyen X egy halmaz, $\leqslant$ egy reláció X-en. Azt mondjuk, hogy a $\leqslant$ reláció egy **rendezés** X-en, ha

1. **Reflexív**, azaz $x \leqslant x$ minden $x \in X$ esetén.
2. **Antiszimmetrikus**, azaz ha $x \leqslant y$ és $y \leqslant x$, akkor $x = y$ minden x, $y \in X$ esetén.
3. **Tranzitív**, azaz ha $x \leqslant y$ és $y \leqslant z$, akkor $x \leqslant z$ minden x, y, $z \in X$ esetén.
4. **Dichotóm**, azaz $x \leqslant y$ vagy $y \leqslant x$ minden x, $y \in X$ esetén.

Sztingek

Legyen Σ egy véges ábécé, amelyen értelmezve van egy $\leqslant$ rendezési reláció. Jelölje Σ^n a Σ ábécé elemeiből alkotott n hosszúságú sztringek halmazát.
Sztringek egyenlősége: Legyenek $\alpha, \beta \in \Sigma^n$ $\alpha = a_1, \ldots, a_n$; $\beta = b_1, \ldots, b_n$.

$$\alpha = \beta \qquad :\Longleftrightarrow \qquad a_i = b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Lexikografikus rendezés Σ^n-n: Legyenek $\alpha, \beta \in \Sigma^n$

$$\alpha \leqslant \beta \qquad :\Longleftrightarrow \qquad \alpha = \beta \quad \text{vagy} \quad \exists k \in \{1, \ldots, n\}$$
$$a_1 = b_1, \ldots, a_{k-1} = b_{k-1} \quad \text{de} \quad a_k < b_k,$$

ahol az $a_k < b_k$ azt jelenti, hogy $a_k \leqslant b_k$, de $a_k \neq b_k$.

Szigorú rendezés

Legyen X egy halmaz, $<$ egy reláció X-en. Azt mondjuk, hogy $<$ egy szigorú rendezés az X-en, ha

1. **Irreflexív**, azaz $x \not< x$ minden $x \in X$ esetén (azaz nincs olyan x eleme az X halmaznak, amelyre $x < x$ teljesül). Ez azt jelenti, hogy egy elem sem nagyobb saját magánál.
2. **Tranzitív**, azaz ha $x < y$ és $y < z$, akkor $x < z$ minden $x, y, z \in X$ esetén.
3. **Tricichotóm**, azaz vagy $x < y$, vagy $x = y$, vagy $y < x$ minden $x, y \in X$ esetén. A trichotómia most is azt garantálja, hogy bármely két (nem feltétlenül különböző) elem összehasonlítható legyen.

1.Tétel

Legyen X egy halmaz és $\leqslant$ egy rendezés az X-en. Definiáljuk a $<$ relációt az alábbi módon:

$$x < y \qquad :\Longleftrightarrow \qquad x \leqslant y \quad \text{de} \quad x \neq y \qquad (x, y \in X).$$

Ekkor a $<$ egy szigorú rendezés az X halmazon.

2. Tétel

Legyen X egy halmaz és $<$ egy szigorú rendezés az X-en.
Definiáljuk a $\leqslant$ relációt az alábbi módon:

$$x \leqslant y \qquad :\Longleftrightarrow \qquad x < y \quad \textit{vagy} \quad x = y \qquad (x, y \in X).$$

Ekkor a $\leqslant$ egy rendezés az X halmazon.
A fenti két tétel bizonyítása szorgalmi házi feladat.

A lexikografikus rendezés

Ezeknek az egyszerű tényeknek az ismeretében a lexikografikus rendezés úgy érthető meg, hogy először az 1. tételünk segítségével létrehozunk egy szigorú rendezést a Σ ábécén. Ennek a szigorú rendezésnek a segítségével szigorú rendezést értelmezünk az n hosszúságú sztringek Σ^n halmazán az alábbi módon:

$$\begin{aligned} \alpha < \beta \quad :\Longleftrightarrow \quad & a_1 < b_1 \text{ vagy} \\ & \exists k \in \{1, \ldots, n\} : a_1 = b_1, \ldots, a_{k-1} = b_{k-1} \text{ de } a_k < b_k, \end{aligned} \tag{1}$$

azaz $\alpha < \beta$, pontosan akkor, ha balról jobbra haladva a sztringekben először α-ban találunk nagyobb betűt. Így a n hosszúságú sztringek halmazán kapunk egy szigorú rendezést. Ebből a szigorú rendezésből a 2. tételünk segítségével állítjuk elő a lexikografikus rendezést.

Feladat

A Cormen-könyvben (vagy legalábbis annak magyar fordításában) szerepel az alábbi feladat: Rendezzük a lexikografikus rendezéssel az alábbi szavakat: ÓRA, LAP, TEA, GÉP, ING, SZÓ, FÜL, ORR, LÁB, SOR, KÉS, ÁGY, VÍZ, RÁK, CÉL, FIÚ.

A Radix, vagy számjegyes rendezés

9. Radix rendezés

Azonos hosszúságú szavak rendezésére alkalmas. (Azonos hosszúságú szavak helyett gondolhatunk ugyanannyi jegyből álló pozitív egészekre.) Ha azonos hosszúságú szavakat rendezünk, akkor lexikografikus rendezést valósítunk meg. A radix rendezés felhasznál egy stabil rendezést. A szavakat a betűik alapján rendezzük jobbról balra haladva (tehát az utolsó karaktertől az első felé). Mire elérjük a legelső, tehát a bal szélső betűt, akkor a szavak rendezetté válnak.

Feladat

A következő numerikus példában az

$$235, 144, 474, 508, 133, 175, 200, 741$$

számokat rendezzük a radix rendezés segítségével.

$$
\begin{array}{cc|c|}
2 & 3 & 5 \\
1 & 4 & 4 \\
4 & 7 & 4 \\
5 & 0 & 8 \\
1 & 3 & 3 \\
1 & 7 & 5 \\
2 & 0 & 0 \\
7 & 4 & 1
\end{array}
\quad \leadsto \quad
\begin{array}{c|c|c}
2 & 0 & 0 \\
7 & 4 & 1 \\
1 & 3 & 3 \\
1 & 4 & 4 \\
4 & 7 & 4 \\
2 & 3 & 5 \\
1 & 7 & 5 \\
5 & 0 & 8
\end{array}
\quad \leadsto \quad
\begin{array}{|c|cc}
2 & 0 & 0 \\
5 & 0 & 8 \\
1 & 3 & 3 \\
2 & 3 & 5 \\
7 & 4 & 1 \\
1 & 4 & 4 \\
4 & 7 & 4 \\
1 & 7 & 5
\end{array}
\quad \leadsto \quad
\begin{array}{ccc}
1 & 3 & 3 \\
1 & 4 & 4 \\
1 & 7 & 5 \\
2 & 0 & 0 \\
2 & 3 & 5 \\
4 & 7 & 4 \\
5 & 0 & 8 \\
7 & 4 & 1
\end{array}
$$

Az edényrendezés

10. Az Edényrendezés

Korábban beszéltünk arról, hogy egy matematikai értelemben sűrű számhalmaz (például a racionális számok halmaza) elemei leszámláló rendezéssel nem rendezhetők. Az edényrendezés egy olyan rendezés, amely például racionális számokból álló sorozatot is képes rendezni lineáris időben. Ennek is ára van, a rendezendő sorozatnak egyenletes eloszlásúnak kell lenniük valamely $[a, b[$ intervallumon.

Egyenletes eloszlású sorozatok

Azt mondjuk, hogy egy $x_1, \ldots, x_n$ egy n-tagú adatsorozat **egyenletes eloszlású** egy $[a, b[$ intervallumon azt jelenti, a részintervallumba esés valószínűsége arányos a részintervallum hosszával.
Mivel a valószínűség fogalma leginkább a relatív gyakoriság segítségével fogható meg, a fenti definíció az alábbi módon önthető matematikai formába:

$$\frac{k_n}{n} := \frac{\{i \in \{1, \ldots, n\} \mid x_i \in [c, d]\}}{n} \quad \sim \quad \frac{d-c}{b-a}.$$

- Ha az egyenletes eloszlásra vonatkozó feltétel nem teljesül, akkor is működik a rendezési algoritmus, csak ebben az esetben a futási idő nem lesz lineáris.
- Mivel tetszőleges $[a, b[$ intervallum egy egyszerű affin transzformációval beletranszformálható a $[0, 1[$-be, ezért most feltételezzük, hogy a sorozat tagjai eleve a $[0, 1[$ intervallumból származnak.
- Az edényrendezés arról kapta a nevét, hogy a $[0, 1[$ intervallumot n darab egyenlő részintervallumra bontjuk, ezek lesznek az edények.
- Tehát az edények az

$$\left[0, \frac{1}{n}\right[, \quad \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right[, \quad \dots, \quad \left[\frac{n-1}{n}, 1\right[$$

intervallumok.

- Van továbbá egy n elemű tömbünk, amelyben láncolt listák fejei vannak.
- Használunk egy ügyes függvényt, amely egy $[0,1[$-beli elemről kapásból megmondja, hogy melyek edénybe tartozik. Ez a függvény:

$$x_i \mapsto \lfloor n \cdot x_i \rfloor .$$

- Az x_i adatelemet a kapott láncolt listához hozzáfűzzük.
- Ezt követően a n darab láncolt listát rendezzük, majd egyetlen listává fűzzük össze. Az algoritmus azzal a láncolt listával tér vissza, amely a eredeti tömb elemeit rendezett módon tartalmazza.

Az edényrendezés algoritmusa

EDENYREND(A, L)
INPUT: A egy tömb, amely a rendezendő elemeket tartalmazza.
OUTPUT: L egy láncolt lista, amely az A tömb elemeit tartalmazza növekvő sorrendben.
$B[0, \ldots, n-1]$ a listafejeket tartalmazó tömb.

	EDENYREND(A, L)
1.	B-be beszúr.
2.	B listáit rendezi.
3.	B listáit összefűzi L be.
24.	RETURN(L)

Feladat

Edényrendezés segítségével rendezzük a következő tömböt:

$A = [0.741, 0.522, 0.579, 0.251, 0.180, 0.446, 0.619, 0.107, 0.827]$

Megoldás

Legyen $n = 4$, azaz $n = 4$ db edény van.

$$
\begin{array}{cccc}
0 & 1 & 2 & 3 \\
[0, \frac{1}{4}[, & [\frac{1}{4}, \frac{2}{4}[, & [\frac{2}{4}, \frac{3}{4}[, & [\frac{3}{4}, \frac{4}{4}[
\end{array}
$$

$A[j]$ elemet láncoljuk hozzá a $B\left[\lfloor nA[j] \rfloor\right]$ fejű listához.

$$
\begin{array}{lcl}
0,741 & \mapsto & \lfloor 4 \cdot 0.471 \rfloor = 2 \\
0,522 & \mapsto & \lfloor 4 \cdot 0.522 \rfloor = 2 \\
0,579 & \mapsto & \lfloor 4 \cdot 0.579 \rfloor = 2 \\
0,251 & \mapsto & \lfloor 4 \cdot 0.251 \rfloor = 1 \\
0,180 & \mapsto & \lfloor 4 \cdot 0.180 \rfloor = 0 \\
0,446 & \mapsto & \lfloor 4 \cdot 0.446 \rfloor = 1 \\
0,619 & \mapsto & \lfloor 4 \cdot 0.619 \rfloor = 2 \\
0,107 & \mapsto & \lfloor 4 \cdot 0.107 \rfloor = 0 \\
0,827 & \mapsto & \lfloor 4 \cdot 0.827 \rfloor = 3
\end{array}
$$

Így az alábbi láncolt listákat kapjuk:

$B[0]$	$\left(x \in \left[0, \frac{1}{4}\right[\right)$	NIL	$\rightarrow$ 0,180	$\rightarrow$ 0,107		
$B[1]$	$\left(x \in \left[\frac{1}{4}, \frac{2}{4}\right[\right)$	~~NIL~~	$\rightarrow$ 0,251	$\rightarrow$ 0,446		
$B[2]$	$\left(x \in \left[\frac{2}{4}, \frac{3}{4}\right[\right)$	~~NIL~~	$\rightarrow$ 0,741	$\rightarrow$ 0,522	$\rightarrow$ 0,579	$\rightarrow$ 0,619
$B[3]$	$\left(x \in \left[\frac{3}{4}, \frac{4}{4}\right[\right)$	NIL	$\rightarrow$ 0,827			

Rendezzük a kapott láncolt listákat.

$B[0]$	$\left(x \in \left[0, \frac{1}{4}\right[\right)$	NIL	$\to$ $\boxed{0,107}$	$\to$ $\boxed{0,180}$		
$B[1]$	$\left(x \in \left[\frac{1}{4}, \frac{2}{4}\right[\right)$	NIL	$\to$ $\boxed{0,251}$	$\to$ $\boxed{0,446}$		
$B[2]$	$\left(x \in \left[\frac{2}{4}, \frac{3}{4}\right[\right)$	NIL	$\to$ $\boxed{0,522}$	$\to$ $\boxed{0,579}$	$\to$ $\boxed{0,619}$	$\to$ $\boxed{0,741}$
$B[3]$	$\left(x \in \left[\frac{3}{4}, \frac{4}{4}\right[\right)$	NIL	$\to$ $\boxed{0,827}$			

Majd a rendezett láncolt listákat egyetlen listává fűzzük össze.

$\boxed{\mathsf{L}} \to \boxed{0.107} \to \boxed{0.180} \to \boxed{0.251} \to \boxed{0.446} \to$

$\to \boxed{0.522} \to \boxed{0.579} \to \boxed{0.619} \to \boxed{0.741} \to \boxed{0.827}$

$\rightarrow$ $\boxed{\text{Köszönöm a figyelmet!}}$ $\leftarrow$