

Miskolci Egyetem



GÉPÉSZMÉRNÖKI ÉS INFORMATIKAI KAR

DURVA HALMAZOK ÉS HÁLÓELMÉLETI VIZSGÁLATUK

PhD értekezés

KÉSZÍTETTE:
GÉGÉNY DÁVID
OKLEVELES MÉRNÖKINFORMATIKUS

HATVANY JÓZSEF INFORMATIKAI TUDOMÁNYOK DOKTORI ISKOLA

DOKTORI ISKOLA VEZETŐ:
Prof. Dr. Kovács László
EGYETEMI TANÁR

TUDOMÁNYOS TÉMAVEZETŐ:
Prof. Dr. Radeleczki Sándor
EGYETEMI TANÁR

TUDOMÁNYOS TÁRSTÉMAVEZETŐ:
Prof. Dr. Kovács László
EGYETEMI TANÁR

Miskolc, 2025

Tartalomjegyzék

1. BEVEZETÉS	4
1.1. Hálóelméleti áttekintés	4
1.2. Durva halmazok elmélete	5
1.3. Információs rendszerek	7
1.4. Fuzzy halmazok és fuzzy relációk	8
2. MULTIGRANULÁRIS DURVA HALMAZOK	10
2.1. Elméleti áttekintés	10
2.2. Disztributivitás vizsgálata optimista esetben	13
2.3. Dedekind–MacNeille-kiterjesztés	17
2.4. Pesszimista eset vizsgálata	26
2.5. Alkalmazási lehetőségek	29
2.5.1. Alkalmazás az információs rendszerek területén	29
2.5.2. Alkalmazás az ajánlórendszerek területén	31
3. FUZZY DURVA HALMAZOK ÉLES REFERENCIAHALMAZZAL	34
3.1. Teljesen disztributív reguláris dupla Stone-háló tulajdonság szükséges és elégséges feltétele	39
3.2. Egzakt halmazok vizsgálata	42
4. DURVA L-FUZZY HALMAZOK	45
4.1. Reprezentációs tétel	48
4.2. Reprezentáció durva relációkkal	52
4.3. Hálótulajdonságok	56
5. FUZZY DURVA HALMAZOK FUZZY REFERENCIAHALMAZZAL	63
5.1. Implikátorok	63
5.2. Fuzzy durva halmazok	64
5.3. Alsó és felső approximációkból származtatott kvázirendezések	65
5.4. A $R(F)$ és $\varrho(G)$ kvázirendezések által indukált ekvivalenciák	68
5.5. Fuzzy durva halmazok jellemzése	74
5.6. Az $E(F)$ - és $\varepsilon(G)$ -osztályok további tulajdonságai	76
5.7. Hálóelméleti vizsgálat	79
6. FUZZY DURVA HALMAZOK ALKALMAZÁSA KÉPTÖMÖRÍTÉSRE	87
6.1. Előzmény	87
6.1.1. Kódtábla felépítése	87
6.1.2. Kódolás	88
6.1.3. Durva fuzzy halmazok szorzata	88
6.1.4. Dekódolás	88
6.2. Az algoritmus továbbfejlesztése	89
6.2.1. Fuzzy hasonlósági reláció használata	89
6.2.2. Segédalgoritmusok	93

6.2.3.	Kódtábla felépítése	96
6.2.4.	Kódolás	98
6.2.5.	Dekódolás	99
7.	ÖSSZEFOGLALÁS	102
7.1.	ÖSSZEFOGLALÁS ÉS KUTATÁS IRÁNYOK	102
7.2.	TÉZISEK	104
7.2.1.	I. TÉZIS	104
7.2.2.	II. TÉZIS	104
7.2.3.	III. TÉZIS	104
7.2.4.	IV. TÉZIS	105
7.2.5.	V. TÉZIS	105
8.	SUMMARY	106
8.1.	SUMMARY AND FUTURE RESEARCH DIRECTIONS	106
8.2.	THESES	108
8.2.1.	I. THESIS	108
8.2.2.	II. THESIS	108
8.2.3.	III. THESIS	108
8.2.4.	IV. THESIS	109
8.2.5.	V. THESIS	109

Ábrák jegyzéke

2.1.	A 2.9. Példa szerinti optimista durva halmazok hálójá	17
2.2.	A 2.10	18
2.3.	A 2.18. Példában szereplő optimista durva halmazok hálójá.	24
2.4.	A 2.19. Példához tartozó optimista durva halmazok hálójá.	25
2.5.	A 2.26. Példához tartozó pesszimista durva halmazok hálójá.	28
2.6.	A pesszimista durva halmazok hálójá a 2.27. Példában	29
3.1.	Az R fuzzy relációhoz tartozó E ekvivalenciareláció.	40
3.2.	Az $(\mathcal{RS}(U, R), \leq)$ háló a 3.6. Példa alapján.	41
5.1.	Az 5.15. Példában szereplő fuzzy θ hasonlósági reláció	73
5.2.	A 5.15. Példához tartozó kvázirendezések, és a kapcsolódó faktorhalmazok a Hasse-diagramjaikkal.	74
5.3.	Az 5.26. Példában szereplő θ fuzzy hasonlósági reláció	85
5.4.	A $\varrho(G)$ és $R(F)$ kvázirendezések.	85
5.5.	Az 5.27. Példában szereplő θ hasonlósági reláció	86
5.6.	Az 5.27. Példában szereplő fuzzy durva halmazok hálójá	86
6.1.	Blokkhoz tartozó vektor felépítése az ablak csúsztatásával.	88
6.2.	Adott pixel és a négy ekvivalenciareláció, amelyek osztályainak metszeteként adódik a képpont szorzás után, mint egytagú ekvivalenciaosztály.	89

Táblázatok jegyzéke

2.1. Információs rendszer a 2.1. Példához.	12
3.1. Példa egy R fuzzy hasonlósági relációra.	40
3.2. Az E ekvivalencia és az R fuzzy reláció által adott approximációk az U alaphalmazon.	41
3.3. A példához tartozó R fuzzy hasonlósági reláció	43
3.4. A 3.3. táblázatban szereplő R reláció egzakt fuzzy halmazai. .	43
5.1. Az 5.15. Példában szereplő h fuzzy halmaz	73
5.2. Az 5.26. Példában szereplő f_1 és f_2 fuzzy halmazok és azok közelítései	85

Algoritmusok jegyzéke

1. Kép felosztása blokkokra.	93
2. Kép rekonstruálása blokkokból.	94
3. Blokk vektorra alakítása úgy, hogy a sorait egymás mellé helyezi	95
4. Blokk vektorra alakítása úgy, hogy az értékeket cikcakk alakban dolgozza fel.	95
5. Vektor visszaalakítása blokká a szakaszok egymás alá helyezésével.	96
6. Vektor visszaalakítása blokká az értékek cikcakk alakban történő elhelyezésével.	96
7. Kódtábla felépítése.	97
8. Kép kódolása.	99
9. Kép dekódolása.	101

1. BEVEZETÉS

A disszertáció a durva halmazokon alapuló általánosabb modellekkel foglalkozik, amelyben azok hálóelméleti tulajdonságait és alkalmazási lehetőségeit tárgyalom. A témakör feldolgozásához szükséges elméleti háttérrel ebben a fejezetben ismertetem.

1.1. Hálóelméleti áttekintés

A hálóelméleti, algebrai alapfogalmakat több könyv is összefoglalja, ezek közül a témakörhöz legrelevánsabb koncepciókat többnyire a [19], a [17] és a [8] könyvek alapján mutatom be. Legyen U egy alaphalmaz, $\varrho \subseteq U \times U$ pedig egy rajta értelmezett *homogén bináris reláció* (a továbbiakban egyszerűen *reláció*). Kétféleképpen is jelölhetjük, hogy az $a, b \in U$ elemek ϱ relációban állnak egymással: $(a, b) \in \varrho$ vagy infix jelöléssel $a\varrho b$. Azt mondjuk, hogy a ϱ reláció egy *részenrendezés*, ha teljesülnek az alábbi tulajdonságok:

- *reflexív*, azaz $a\varrho a$ minden $a \in U$ esetén;
- *transzitiv*, azaz ha $a\varrho b$ és $b\varrho c$ teljesül, akkor $a\varrho c$ is, minden $a, b, c \in U$ esetén;
- *antiszimmetrikus*, azaz $a\varrho b$ és $b\varrho a$ csak akkor lehetséges, ha $a = b$

Azt mondjuk, hogy a ϱ reláció *szimmetrikus*, ha minden $a, b \in U$ elemre $a\varrho b$ esetén $b\varrho a$ is teljesül. Egy relációt *ekvivalenciareláció*-nak nevezünk, ha reflexív, szimmetrikus és transzitiv. Az előzőeknél egy-egy tulajdonságot elhagyva kaphatunk néhány új fogalmat. A reflexív és transzitiv relációkat *kvázirendezés*-nek, míg a reflexív és szimmetrikus relációkat *toleranciának* nevezzük. Legyen most P egy halmaz, $\leq$ pedig egy rajta értelmezett részenrendezés. Ekkor a $(P, \leq)$ struktúrát *részenrendezett halmaznak* nevezzük.

Ha egy $(L, \leq)$ részenrendezett halmazban bármely két $a, b \in L$ elemnek létezik *infimuma*, $\inf\{a, b\}$ (legnagyobb alsó korlátja) és *szuprémuma*, $\sup\{a, b\}$ (legkisebb felső korlátja), akkor azt mondjuk, hogy $(L, \leq)$ egy *háló*. Ha L bármely $A \subseteq L$ részhalmazának létezik infimuma, $\inf A$ és szuprémuma, $\sup A$, akkor $(L, \leq)$ egy *teljes háló*. Hálóban az $a, b \in L$ elemek infimumát és szuprémumát szoktuk rendre $a \wedge b$ és $a \vee b$ módon is jelölni. Hasonlóan az $A \subseteq L$ halmaz infimumát és szuprémumát rendre $\bigwedge A$ és $\bigvee A$ jelöli. Azt mondjuk, hogy az $(L, \leq)$ háló disztributív, ha bármely $a, b, c \in L$ elemre az alábbi két (egymással ekvivalens) tulajdonság teljesül:

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c),$$

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c).$$

A $(P, \leq)$ részenrendezett halmazon értelmezett $x \mapsto \sim x$ leképezést *rendezésfordító involúciónak* (vagy *polaritásnak*) nevezzük, ha az alábbi tulajdonságoknak eleget tesz:

- $x \leq y \Leftrightarrow \sim y \leq \sim x$,
- $\sim \sim x = x$.

Ha egy L hálón értelmezhető egy polaritás, akkor azt mondjuk, hogy L egy *polaritásháló*. Ha egy L teljes hálóban bármely kettősen indexelt $x_{i,j} \in L$ elemekre ($i \in I, j \in J$ és $I, J \neq \emptyset$) teljesül, hogy

$$\bigwedge_{i \in I} \left(\bigvee_{j \in J} x_{i,j} \right) = \bigvee_{f: I \rightarrow J} \left(\bigwedge_{i \in I} x_{i,f(i)} \right), \quad (1.1)$$

akkor azt mondjuk, hogy L *teljesen disztributív háló*.

Az L háló *pszeudokomplementumos háló*, ha van legkisebb eleme ($0 \in L$), és bármely $x \in L$ esetén egyértelműen létezik egy $x^* \in L$ elem, amire $x \wedge x^* = 0$ pontosan akkor teljesül, ha $z \leq x^*$. Ekkor az x^* elemet az x *pszeudokomplementumának* nevezzük. Ha az L disztributív pszeudokomplementumos hálóban minden $x \in L$ esetén teljesül, hogy $x^* \vee x^{**} = 1$, akkor L egy *Stone-háló*. Ha az L hálónak van legnagyobb eleme ($1 \in L$), akkor az $x^+ \in L$ elemet az $x \in L$ elem *duális pszeudokomplementumának* nevezzük, amennyiben $x \vee z = 1$ pontosan akkor teljesül, ha $z \geq x^+$. Ha az L hálónak egyaránt van legkisebb és legnagyobb eleme, valamint minden elemének van pszeudokomplementuma és duális pszeudokomplementuma, akkor L *duplán pszeudokomplementumos háló*. Amennyiben L egy duplán pszeudokomplementumos Stone-háló, és az is teljesül, hogy minden $x \in L$ esetén $x^+ \wedge x^{++} = 0$, úgy azt mondjuk, hogy L egy *dupla Stone-háló*. Az L duplán pszeudokomplementumos háló *reguláris*, ha minden $x, y \in L$ elemre $x^* = y^*$ és $x^+ = y^+$ esetén $x = y$ teljesül.

Az $(L, \vee, \wedge, \sim, 0, 1)$ *De Morgan-algebra* egy $(L, \vee, \wedge)$ disztributív háló a 0 legkisebb elemmel és az 1 legnagyobb elemmel, valamint egy $\sim$ rendezésfordító involúcióval.

minden $x, y \in L$ esetén. Egy *Kleene-algebra* [2] egy olyan $\mathcal{K} = (K, \vee, \wedge, \sim, 0, 1)$ De Morgan-algebra, amely kielégíti a következő (Kleene-féle) axiómát:

$$x \wedge \sim x \leq y \vee \sim y, \text{ minden } x, y \in K \text{ esetén.} \quad (K)$$

Egy Kleene-algebra akkor *teljesen disztributív*, ha az alaphálója teljesen disztributív.

1.2. Durva halmazok elmélete

A durva halmazok fogalmát Zdzisław Pawlak vezette be [81]. A fogalom mögötti motiváció, hogy az egyes objektumokkal kapcsolatos hiányos információt kezelni tudjuk. Az információ hiányossága miatt előfordulhat, hogy egyes objektumokat nem tudunk megkülönböztetni. Az eredeti durvahalmazmodellben ezt egy ekvivalenciareláció, méghozzá egy úgynevezett *megkülönböztethetlenségi reláció* reprezentálja. Az évek során a durvahalmaz-modellt

több megközelítéssel is általánosították és kitejesztették. A durva halmazok fejlődésének első évtizedéről áttekintést ad a [84] mű, további kutatási irányokat és alkalmazásokat pedig a [86] cikk említ. Eredetileg Pawlak azt feltételezte, hogy ez a reláció ekvivalencia, de később több más relációtípussal definiált durvahalmaz-modell is a vizsgálat tárgyát képezte (lásd pl. [91], [108], [52], [55], vagy [57], [54], [64], [65], [126]). Az egyik általánosítási irány, hogy ekvivalencia helyett más típusú bináris relációt használunk, például kvázirendezéseket vagy toleranciákat, ld. például [126], [54], [55].

A durva halmaz a hagyományos (*éles* vagy *crisp*) halmazfogalom kiterjesztésével keletkezik, ami figyelembe veszi, hogy a rendelkezésünkre álló tudás általában nem teljes és sok esetben bizonytalan.

Legyen az A halmaz részhalmaza az U alaphalmaznak és legyen $E \subseteq U \times U$ egy ekvivalenciareláció. Az (U, E) párt *approximációs térnek* nevezzük, ami-ben az A halmaz *alsó*, illetve *felső approximációját* (*közelítését*) a következőképpen definiálhatjuk:

$$A_E = \{x \in U \mid [x]_E \subseteq A\}, A^E = \{x \in U \mid [x]_E \cap A \neq \emptyset\}, \quad (1.2)$$

ahol $[x]_E$ az $x \in U$ elemhez tartozó ekvivalenciaosztály. Az U részhalmazain értelmezhetünk egy $\equiv$ ekvivalenciarelációt a következőképpen:

$$\text{Az } A, B \subseteq U \text{ halmazokra } A \equiv B \Leftrightarrow A_R = B_R \text{ és } A^R = B^R.$$

Eredetileg *durva halmaz* alatt ennek az ekvivalenciarelációnak az osztályait értettük. Iwiński [51] nyomán azóta már az (U, E) approximációs térben az $A \subseteq U$ halmazhoz tartozó *durva halmazt* inkább az (A_E, A^E) párral azonosítjuk. A dolgozat további részében én is ezt a megközelítést fogom használni.

Az E ekvivalencia osztályainak uniójaként kapott halmazokat *E -definiálható* halmaznak, vagy *egzak*t halmaznak nevezzük. Itt érdemes megjegyezni, hogy ha A egy E -definiálható halmaz, akkor $A_E = A^E = A$.

Ekvivalenciareláció helyett tetszőleges $R \in U \times U$ relációra értelmezhetjük az approximációs operátorokat:

$$A_R = \{x \in U \mid R(x) \subseteq A\}, A^R = \{x \in U \mid R(x) \cap A \neq \emptyset\}, \quad (1.3)$$

ahol $x \in U$ esetén $R(x) = \{y \in U \mid (x, y) \in R\}$. Ekvivalencia esetén $R(x) = [x]_R$. Jelölje A^c az $A \subseteq U$ halmaz komplementerét, azaz $A^c = \{x \in U \mid x \notin A\}$. Könnyen látható, hogy

$$(A^R)^c = (A^c)_R \text{ és } (A_R)^c = (A^c)^R. \quad (1.4)$$

Az U alaphalmazon és R relációra értelmezett durva halmazok összességét $\mathcal{RS}(U, R)$ jelöli, amin a komponensenkénti tartalmazás által értelmezhető egy részbenrendezés:

$$(A_R, A^R) \leq (B_R, B^R) \Leftrightarrow A_R \subseteq B_R \text{ és } A^R \subseteq B^R. \quad (1.5)$$

Általánosságban véve $(\mathcal{RS}(U, R), \leq)$ egy részbenrendezett halmaz, aminek a legkisebb eleme $(\emptyset, \emptyset)$, legnagyobb eleme pedig (U, U) . Értelmezhetünk ezen a halmazon egy $\sim$ rendezésfordító involúciót is:

$$\sim (A_R, A^R) = ((A^c)_R, (A^c)^R) = ((A^R)^c, (A_R)^c). \quad (\text{Inv})$$

Az összes alsó approximáció halmazát $\mathcal{P}(U)_R$, az összes felső approximáció halmazát pedig $\mathcal{P}(U)^R$ jelöli. Ismert, hogy $\mathcal{P}(U)_R$ és $\mathcal{P}(U)^R$ duálisan izomorf hálók, továbbá az is, hogy amennyiben R egy kvázirendezés, úgy $\mathcal{P}(U)_R$, $\mathcal{P}(U)^R$ és $\mathcal{RS}(U, R)$ teljesen disztributív hálók.

1.1. Tétel ([92] [13]). *Az $E \in U \times U$ ekvivalenciareláció esetén $(\mathcal{RS}(U, E), \vee, \wedge, \sim, (\emptyset, \emptyset), (U, U))$ egy reguláris dupla Stone-hálót alkot.*

1.3. Információs rendszerek

Az *információs rendszer* egy $\mathcal{S} = (U, A, (V_a)_{a \in A})$ hármas, ahol U egy nem-üres objektumhalmaz, A egy nemüres véges attribútumhalmaz, és $(V_a)_{a \in A}$ egy indexelt attribútumérték-halmaz. Minden attribútum egy $a: U \rightarrow V_a$ függvényként értelmezhető, amely minden $u \in U$ objektumhoz hozzárendeli az $a(u) \in V_a$ értéket. A gyakorlatban előfordulhat, hogy egy objektumhoz tartozó egyes attribútumértékek hiányoznak vagy ismeretlenek (ezeket gyakran $*$ szimbólummal jelölik). Az ilyen információs rendszereket nevezzük *hiányos információs rendszereknek*. Bármely $a \in A$ attribútum és bármely nemüres $P \subseteq A$ halmaz esetén az alábbi ekvivalenciarelációkat definiáljuk:

$$\text{Ind}(a) := \{(x, y) \in U^2 \mid a(x) = a(y)\},$$

$$\text{Ind}(P) := \{(x, y) \in U^2 \mid a(x) = a(y), \text{ minden } a \in P\},$$

Ha $(x, y) \in \text{Ind}(a)$, akkor azt mondjuk, hogy x és y *megkülönböztethetetlen az a attribútum alapján*. Ha $(x, y) \in \text{Ind}(P)$, akkor x és y *megkülönböztethetetlen a P attribútumhalmaz alapján*. Nyilvánvaló, hogy $\text{Ind}(P) = \bigcap_{a \in P} \text{Ind}(a)$, és ha $P \subseteq Q \subseteq A$, akkor $\text{Ind}(Q) \subseteq \text{Ind}(P)$. Továbbá bármely $P_i \subseteq A$ (ahol $1 \leq i \leq n$) attribútumhalmaz-rendszer esetén

$$\text{Ind}\left(\bigcup_{i=1}^n P_i\right) = \bigcap_{i=1}^n \text{Ind}(P_i).$$

Valóban, hiszen

$$\begin{aligned} \bigcap_{i=1}^n \text{Ind}(P_i) &= \bigcap_{i=1}^n \{(x, y) \in U^2 \mid a(x) = a(y), \forall a \in P_i\} \\ &= \{(x, y) \in U^2 \mid a(x) = a(y), \forall a \in \bigcup_{i=1}^n P_i\} = \text{Ind}\left(\bigcup_{i=1}^n P_i\right). \end{aligned}$$

1.4. Fuzzy halmazok és fuzzy relációk

A fuzzy halmazok elméletét Lotfi Zadeh vezette be [129]. Az A fuzzy halmazt a $\mu_A : U \rightarrow [0, 1]$ tagsági függvénnyel tudjuk megadni. A 0 tagsági érték azt jelenti, hogy az elem biztosan nincs benne az A halmazban, míg az 1 tagsági érték azt jelenti, hogy az elem biztosan benne van A -ban. Azt mondjuk, hogy az A fuzzy halmaz véges értékkészletű, ha az (éles) $\{\mu_A(x) \mid x \in U\}$ halmaz véges. Az U alaphalmazon értelmezett fuzzy halmazok összességét jelölje $\mathcal{F}(U)$.

Az U alaphalmazon értelmezett R (bináris) fuzzy reláció egy $U \times U$ halmazon értelmezett fuzzy halmaz, tehát a tagsági függvénye $\mu_R : U \times U \rightarrow [0, 1]$. Azt mondjuk, hogy az R fuzzy relációnak véges értékkészlete van, ha az értékei által meghatározott $\{\mu_R(x, y) \mid x, y \in U\}$ (éles) halmaz véges.

A későbbiekben a jelölések egyszerűsítése érdekében előfordulhat, hogy egy fuzzy halmazra vagy fuzzy relációra csak a tagsági függvényével hivatkozom, pl. az $f : U \rightarrow [0, 1]$ fuzzy halmaz, a $\theta : U \times U \rightarrow [0, 1]$ fuzzy reláció.

Egy fuzzy hasonlósági reláció (más néven fuzzy ekvivalenciareláció) egy reflexív, szimmetrikus és tranzitív fuzzy reláció. Fuzzy relációk esetén a reflexív tulajdonság azt jelenti, hogy $\mu_R(x, x) = 1$ minden $x \in U$ esetén, a szimmetria pedig azt, hogy $\mu_R(x, y) = \mu_R(y, x)$ minden $x, y \in U$ esetén. Eleinte akkor neveztek egy R fuzzy relációt tranzitívnek, ha $\min(\mu_R(x, y), \mu_R(y, z)) \leq \mu_R(x, z)$ teljesült minden $x, y, z \in U$ esetén [128]. Később ezt a fogalmat általánosították a t -normák alkalmazásával (ld. például [115]). A $([0, 1], \leq)$ hálóban a $\sim x := 1 - x$ műveletet definiálva egy teljesen disztributív Kleene-algebrát kapunk.

A háromszögnorma (röviden t -norma) egy olyan növekvő, kommutatív és asszociatív $\mathcal{T} : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ leképezés, amelyre minden $x \in [0, 1]$ esetén teljesül, hogy $\mathcal{T}(1, x) = \mathcal{T}(x, 1) = x$. A $\mathcal{T}$ t -normát pozitívnek nevezzük (ld. például [5]), ha $x, y > 0$ esetén $\mathcal{T}(x, y) > 0$. A $\mu_R : U^2 \rightarrow [0, 1]$ fuzzy reláció $\mathcal{T}$ -tranzitív, ha

$$\mathcal{T}(\mu_R(x, y), \mu_R(y, z)) \leq \mu_R(x, z), \text{ minden } x, y, z \in U \text{ esetén.}$$

Ha az R fuzzy reláció reflexív és $\mathcal{T}$ -tranzitív, akkor fuzzy $\mathcal{T}$ -kvázirendezésnek nevezzük. Ha az R fuzzy reláció reflexív, szimmetrikus és $\mathcal{T}$ -tranzitív, akkor $\mathcal{T}$ -ekvivalenciának, vagy fuzzy $\mathcal{T}$ -hasonlósági relációnak nevezzük. Amikor $\mathcal{T}(x, y) = \min(x, y)$, akkor szokás simán fuzzy hasonlósági relációnak is nevezni. Jól ismert, hogy a minimumnorma egy pozitív t -norma, amellyel a korábbi tranzitivitási fogalmat kapjuk. Minden $\mathcal{T}$ t -norma kielégíti minden $x \in L$ esetén, hogy $\mathcal{T}(x, 0) = \mathcal{T}(0, x) = 0$. A legismertebb t -normák a következők:

- a szokásos minimum operátor: $\mathcal{T}(x, y) := \min(x, y)$;
- az aritmetikai szorzat: $\mathcal{T}(x, y) := x \cdot y$;

- a Łukasiewicz t -norma: $\mathcal{T}(x, y) := \max(0, x + y - 1)$,
- a drasztikus t -norma: $\mathcal{T}(x, y) := \begin{cases} \min(x, y), & \text{ha } x = 1 \text{ vagy } y = 1; \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$

A $\mathcal{T}$ t -normát (*balról*) *folytonosnak* nevezzük (ld. [28]), ha függvényként balról folytonos a szokásos $[0, 1]^2$ intervallumtopológiában. Szokás még a t -normákat infix módon is jelölni, például a $\odot: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ t -norma esetén $\odot(x, y)$ helyett írhatjuk, hogy $x \odot y$.

Az $\oplus$ *háromszög-konormát* (röviden *t-konorma*, ld. [100]) egy kommutatív, asszociatív és monoton növekvő bináris műveletként definiáljuk a $[0, 1]$ intervallumon, amely minden $x \in [0, 1]$ esetén kielégíti, hogy $0 \oplus x = x \oplus 0 = x$. A $\oplus$ t -konorma (*balról*) *folytonos* [28], ha függvényként balról folytonos a szokásos topológiában.

2. MULTIGRANULÁRIS DURVA HALMAZOK

A durva halmazok modelljére lehet úgy tekinteni, hogy egyetlen szakértő véleményét tükrözik arról, hogy melyek a megkülönböztethetetlen elemek. A multigranuláris durva halmazok modellje ezzel szemben jelentheti azt, hogy egy halmaz approximációinak meghatározásakor egy szakértő értékelése helyett több szakértő megállapítását is figyelembe vesszük. Így az objektumok megkülönböztethetlenségét nem csak egyetlen ekvivalenciareláció fogja kifejezni. Ennek modellezésére két elterjedt megközelítést adnak az optimista és a pesszimista multigranuláris durva halmaz modellek.

Tegyük fel, hogy több "szakértőnk" vagy több információs rendszerünk van, és mindegyik egy megkülönböztethetlenségi relációt határoz meg az U alaphalmaz elemein. Ennek a megközelítésnek a lényege, hogy aggregáljuk ezekben az ekvivalenciarelációkban rejlő információt, hogy ezáltal kétféle alsó és felső approximációt képezzünk, majd ezek felhasználásával durva halmazokat definiáljunk. A durva halmazok multigranuláris általánosítása a közelmúlt kutatásainak szintén középpontjában állt. A multigranuláris durva halmazok topológiai tulajdonságait elemezték például a [114] és a [113] cikkekben. A [121] munkában a szerzők a toleranciarelációkon alapuló multigranuláris durva halmazokat vizsgálták. A döntéseméleti durva halmazok multigranuláris modelljét a [96] cikkben vezették be és elemezték. A multigranuláris durva halmazok hálószerkezetét tárgyalták a [106] és [56] publikációkban — itt érdemes megjegyezni, hogy a [56] cikkben csak két ekvivalenciarelációt vettek figyelembe. Jelen disszertációban a [56] megközelítést bővítem ki. Jellemeznem fogom az optimista és pesszimista durva halmazok rendezési szerkezeit, és meghatározom, hogy mikor alkotnak teljes, illetve teljesen disztributív hálókat. Emellett megvizsgálom az optimista multigranuláris durva halmazok részbenrendezett halmazának Dedekind-MacNeille-féle kiegészítésének tulajdonságait is. Bemutatok néhány további megállapítást is, valamint néhány alkalmazási lehetőséget az információs rendszerek és ajánlórendszerek területén is.

A jövőben szándékomban áll ezen alkalmazásokat részletesebben kidolgozni. Továbbá szeretnék gazdagabb algebrai szerkezeteket is definiálni a multigranuláris durva halmazokon. Például tervezzük annak vizsgálatát, hogy koherens ekvivalenciák esetén lehetséges-e Nelson-algebrák (ld. például [54]) kialakítása, illetve hogy néhány háromértékű logika szemantikáját modális környezetben (ld. [12]) rögzítsük.

2.1. Elméleti áttekintés

Legyenek $P_1, P_2, \dots, P_n$ ekvivalenciarelációk az U alaphalmazon. Ekkor az $A \subseteq U$ halmaz úgynevezett *optimista alsó közelítését* [95] a következőképpen definiáljuk:

$$A_{\sum_{i=1}^n P_i} = \{x \in U \mid P_1(x) \subseteq A \text{ vagy } P_2(x) \subseteq A \text{ vagy } \dots \text{ vagy } P_n(x) \subseteq A\}. \quad (2.1)$$

Az A halmaz *optimista felső közelítése* az optimista alsó közelítés duálisa:

$$A^{\sum_{i=1}^n P_i} = ((A^c)_{\sum_{i=1}^n P_i})^c. \quad (2.2)$$

A tömörség és olvashatóság érdekében a továbbiakban a $\sum P_i$ jelölést használom a $\sum_{i=1}^n P_i$ helyett. A következő azonosságok könnyen ellenőrizhetők:

$$A^{\sum P_i} = \{x \in U \mid P_1(x) \cap A \neq \emptyset \text{ és } \dots \text{ és } P_n(x) \cap A \neq \emptyset\}, \quad (2.3)$$

$$A_{\sum P_i} = \bigcup_{i=1}^n A_{P_i} \text{ és } A^{\sum P_i} = \bigcap_{i=1}^n A^{P_i}. \quad (2.4)$$

Fontos megjegyezni, hogy a fenti képletekhez nem szükséges, hogy a $P_1, P_2, \dots, P_n$ relációk ekvivalenciarelációk legyenek, tetszőleges U -n értelmezett bináris relációk esetén is alkalmazhatók.

Legyen $\mathcal{P}(U)^{\sum P_i}$ és $\mathcal{P}(U)_{\sum P_i}$ az összes optimista felső és összes optimista alsó közelítés halmaza U -n, azaz legyen

$$\mathcal{P}(U)^{\sum P_i} := \{A^{\sum P_i} \mid A \subseteq U\} \text{ és } \mathcal{P}(U)_{\sum P_i} := \{A_{\sum P_i} \mid A \subseteq U\}. \quad (2.5)$$

A [106] publikációban a szerzők megmutatták, hogy ezek a halmazok megfelelnek a $\mathcal{P}(U)^{\sum P_i} = \{A \subseteq U \mid A^{\sum P_i} = A\}$ és $\mathcal{P}(U)_{\sum P_i} = \{A \subseteq U \mid A_{\sum P_i} = A\}$ módon megadott halmazoknak, továbbá bebizonyították, hogy a $(\mathcal{P}(U)^{\sum P_i}, \subseteq)$ és $(\mathcal{P}(U)_{\sum P_i}, \subseteq)$ részbenrendezett halmazok egymással duálisan izomorf teljes hálók. A duális izomorfizmus az $A \rightarrow A^c$ leképezés által történik, ahol $A \in \mathcal{P}(U)^{\sum P_i}$. A megfelelő hálóműveletek alakját [106] és [56] közölték. Egy tetszőleges $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{P}(U)$ rendszerre

$$\bigvee_{A \in \mathcal{H}} A_{\sum P_i} = \bigcup_{A \in \mathcal{H}} A_{\sum P_i}, \bigwedge_{A \in \mathcal{H}} A_{\sum P_i} = \left(\bigcap_{A \in \mathcal{H}} A_{\sum P_i} \right)_{\sum P_i}, \quad (2.6)$$

$$\bigvee_{A \in \mathcal{H}} A^{\sum P_i} = \left(\bigcup_{A \in \mathcal{H}} A^{\sum P_i} \right)^{\sum P_i}, \bigwedge_{A \in \mathcal{H}} A^{\sum P_i} = \bigcap_{A \in \mathcal{H}} A^{\sum P_i}. \quad (2.7)$$

A *pesszimista alsó közelítést* a következőképpen definiáljuk [106]:

$$\{x \in U \mid P_1(x) \subseteq A \text{ és } P_2(x) \subseteq A \text{ és } \dots \text{ és } P_n(x) \subseteq A\}. \quad (2.8)$$

Könnyen látható, hogy ez a definíció ekvivalens azzal, hogy

$$\left\{ x \in U \mid \bigcup_{i=1}^n P_i(x) \subseteq A \right\}. \quad (2.9)$$

Ezen észrevétel alapján a pesszimista alsó közelítést a $A_{\bigcup_{i=1}^n P_i}$ jelöléssel adhatjuk meg, ahol $\bigcup_{i=1}^n P_i$ az ekvivalenciarelációk halmazelméleti unióját jelöli. A *pesszimista felső közelítés* pedig az alsó közelítés duálisa, és így $A^{\bigcup_{i=1}^n P_i}$ módon

jelöljük. Az optimista esethez hasonlóan a tömörség jegyében a továbbiakban a $A^{\bigcup_{i=1}^n P_i}$ jelölés helyett a $A^{\bigcup P_i}$ jelölést alkalmazom.

Helyszín	Páratartalom	Éghajlati övezet	Hőmérséklet	Csapadék
L_1	Magas	Trópusi	Magas	Igen
L_2	Közepes	Mérsékelt	Magas	Nem
L_3	Közepes	Mérsékelt	Közepes	Igen
L_4	Alacsony	Mérsékelt	Közepes	Nem
L_5	Közepes	Trópusi	Alacsony	Igen
L_6	Alacsony	Hideg	Alacsony	Nem

2.1. táblázat. Információs rendszer a 2.1. Példához.

2.1. Példa. Ez a példa a [112] forrásban található példa alapján készült. Az információs rendszer hat helyszínről tartalmaz adatokat a páratartalomra, éghajlati övezetre, hőmérsékletre és csapadékozásra vonatkozóan. Az adatok a 2.1 táblázatban találhatók. Az alaphalmaz a helyszínek halmaza: $U = \{L_1, L_2, L_3, L_4, L_5, L_6\}$. A páratartalom alapján a helyszínek partíciói: $U/H = \{\{L_1\}, \{L_2, L_3, L_5\}, \{L_4, L_6\}\}$. Az éghajlati övezet és a hőmérséklet szerinti partíciók rendre $U/C = \{\{L_1, L_5\}, \{L_2, L_3, L_4\}, \{L_6\}\}$ és $U/T = \{\{L_1, L_2\}, \{L_3, L_4\}, \{L_5, L_6\}\}$.

Legyen A a csapadékos helyszínek halmaza, azaz $A = \{L_1, L_3, L_5\}$. A halmaznak megfelelő optimista közelítések:

$$A_{H+C+T} = \{L_1, L_5\}, A^{H+C+T} = \{L_1, L_2, L_3, L_5\}.$$

A pesszimista közelítések:

$$A_{H \cup C \cup T} = \emptyset, A^{H \cup C \cup T} = \{L_1, L_2, L_3, L_4, L_5, L_6\}.$$

A következő lemma a [56] forrás 2.9. lemmájának nyilvánvaló kiterjesztése.

2.2. Lemma. Minden $A \subseteq U$ esetén:

$$A_{\bigcup P_i} = \bigcap_{i=1}^n A_{P_i}, A^{\bigcup P_i} = \bigcup_{i=1}^n A^{P_i}. \quad (2.10)$$

Megjegyezzük, hogy $\bigcap P_i$ mindig egy ekvivalenciareláció, míg $\bigcup P_i$ csak reflexív és szimmetrikus, azaz egy *toleranciareláció*. Bevezetve a $\mathcal{P}(U)^{\bigcup P_i} := \{A^{\bigcup P_i} \mid A \subseteq U\}$ és $\mathcal{P}(U)_{\bigcup P_i} := \{A_{\bigcup P_i} \mid A \subseteq U\}$ jelöléseket, a [55] alapján azt kapjuk, hogy $\mathcal{P}(U)^{\bigcup P_i}$ és $\mathcal{P}(U)_{\bigcup P_i}$ egymással izomorf, teljes, komplementumos hálókat alkotnak a $\subseteq$ részbenrendezésre nézve.

A következő ismert lemma implicit módon megtalálható például a [53] forrásban is.

2.3. Lemma. *Ha P és Q ekvivalenciarelációk az U alaphalmazonn úgy, hogy $P \subseteq Q$, akkor minden $A \subseteq U$ esetén:*

$$(A^P)^Q = (A^Q)^P = A^Q. \quad (2.11)$$

A továbbiakban a rövideg kedvéért $\bigcap P_i$ jelölést használom a $\bigcap_{i=1}^n P_i$ helyett.

2.4. Következmény. *Legyenek $P_1, P_2, \dots, P_n$ ekvivalenciarelációk az U alaphalmazon. Minden $A, B \subseteq U$ esetén igazak az alábbi állítások:*

- (i) $(A \cap P_i)^{\sum P_i} = A^{\sum P_i}$;
- (ii) $A \cap P_i = B \cap P_i$ esetén $A^{\sum P_i} = B^{\sum P_i}$.
- (iii) $(A^{\sum P_i})^{\cap P_i} = A^{\sum P_i}$ és $(A_{\sum P_i})^{\cap P_i} = A_{\sum P_i}$, azaz $A^{\sum P_i}$ és $A_{\sum P_i}$ definiálható halmazok az $\bigcap P_i$ ekvivalenciareláció szerint.

Bizonyítás. (i) Tudjuk, hogy $(A \cap P_i)^{\sum P_i} = \bigcap_{j=1}^n (A \cap P_i)^{P_j}$. Mivel minden $j \in \{1, \dots, n\}$ esetén $\bigcap P_i \subseteq P_j$, a 2.3. Lemma szerint $(A \cap P_i)^{P_j} = A^{P_j}$. Ez azt eredményezi, hogy $(A \cap P_i)^{\sum P_i} = \bigcap_{i=1}^n A^{P_i} = A^{\sum P_i}$.

(ii) Tegyük fel, hogy $A \cap P_i = B \cap P_i$. Az (i) pont alkalmazásával azt kapjuk, hogy $A^{\sum P_i} = (A \cap P_i)^{\sum P_i} = (B \cap P_i)^{\sum P_i} = B^{\sum P_i}$.

(iii) Tudjuk, hogy

$$\bigcap_{i=1}^n A^{P_i} \subseteq (A^{\sum P_i})^{\cap P_i} = \left(\bigcap_{i=1}^n A^{P_i} \right)^{\cap P_i} \subseteq \bigcap_{i=1}^n (A^{P_i})^{\cap P_i} = \bigcap_{i=1}^n A^{P_i} = A^{\sum P_i}.$$

Ebből következik, hogy $(A^{\sum P_i})^{\cap P_i} = \bigcap_{i=1}^n A^{P_i} = A^{\sum P_i}$.

Másrészt,

$$\bigcup_{i=1}^n A_{P_i} \subseteq (A_{\sum P_i})^{\cap P_i} = \left(\bigcup_{i=1}^n A_{P_i} \right)^{\cap P_i} = \bigcup_{i=1}^n (A_{P_i})^{\cap P_i} \subseteq \bigcup_{i=1}^n (A_{P_i})^{P_i} = \bigcup_{i=1}^n A_{P_i}.$$

Így $(A_{\sum P_i})^{\cap P_i} = \bigcup_{i=1}^n A_{P_i} = A_{\sum P_i}$. □

2.2. Disztributivitás vizsgálata optimista esetben

Legyenek $P_1, P_2, \dots, P_n \subseteq U \times U$ ekvivalenciarelációk. Ebben a szakaszban az $(A_{\sum P_i}, A^{\sum P_i})$, $A \subseteq U$ közelítéspárokból álló $RS(\sum P_i)$ részbenrendezett halmazt vizsgálom. Az ilyen párokat *multigranuláris optimista durva halmazoknak* nevezzük, és a $\subseteq$ reláció szerint koordinátánként rendezzük. Általánosságban elmondható az $RS(\sum P_i)$ egy korlátos részbenrendezett halmaz, amelynek legkisebb eleme $(\emptyset, \emptyset)$, legnagyobb eleme pedig (U, U) . Bevezetünk egy feltételt, ami mellett $RS(\sum P_i)$ teljesen disztributív hálót alkot:

($\star$) Minden $x \in U$ esetén létezik olyan $k_x \in \{1, 2, \dots, n\}$, amelyre $P_{k_x}(x) \subseteq P_i(x)$ teljesül minden $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ esetén.

Érdemes megjegyezni, hogy a ($\star$) feltétel azt jelenti, hogy minden $x \in U$ esetén a $(\{P_1(x), P_2(x), \dots, P_n(x)\}, \subseteq)$ részbenrendezett halmazban van egy legkisebb elem az x -hez tartozó P_i -ekvivalenciaosztályok között ($1 \leq i \leq n$). Könnyen belátható, hogy a ($\star$) definícióval ekvivalens a következő:

($\star$)' Minden $x \in U$ esetén létezik egy $k_x \in \{1, 2, \dots, n\}$ úgy, hogy $\bigcap_{i=1}^n P_i(x) = P_{k_x}(x)$.

2.5. Állítás. Legyenek $P_1, P_2, \dots, P_n$ ekvivalenciarelációk az U alaphalmazon. Ha $\mathcal{P}(U)^{\Sigma P_i}$ ($\mathcal{P}(U)_{\Sigma P_i}$) disztributív, akkor teljesül a ($\star$) feltétel.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy ($\star$) nem teljesül. Ez azt jelenti, hogy létezik olyan $x \in U$, amelyre

$$\bigcap_{i=1}^n P_i(x) \neq P_q(x),$$

minden $q \in \{1, 2, \dots, n\}$ esetén. Ezért léteznek olyan $a_1, a_2, \dots, a_n$ elemek, amelyekre:

$$a_1 \in P_1(x) \setminus \bigcap_{i=1}^n P_i(x), \quad a_2 \in P_2(x) \setminus \bigcap_{i=1}^n P_i(x), \quad \dots, \quad a_n \in P_n(x) \setminus \bigcap_{i=1}^n P_i(x).$$

Nyilvánvaló, hogy

$$\{x\}^{\Sigma P_i} = \bigcap_{i=1}^n \{x\}^{P_i} = \bigcap_{i=1}^n P_i(x) = \left(\bigcap_{i=1}^n P_i \right) (x).$$

Hasonlóan, $\{a_j\}^{\Sigma P_i} = \left(\bigcap_{i=1}^n P_i \right) (a_j)$ minden $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ esetén.

Mivel $\left(\bigcap_{i=1}^n P_i \right) \subseteq P_q$ teljesül minden $q \in \{1, \dots, n\}$ esetén, azt kapjuk, hogy

$$\left(\bigcap_{i=1}^n P_i \right) (a_j)^{P_q} = P_q(a_j),$$

minden $q, j \in \{1, \dots, n\}$ esetén. Emellett megjegyezzük, hogy $P_j(a_j) = P_j(x)$ minden $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ esetén. Most a $\mathcal{P}(U)^{\Sigma P_i}$ összes felső approximáció halmazában a következőt kapjuk:

$$\{x\}^{\Sigma P_i} \wedge \left(\bigvee_{j=1}^n \{a_j\}^{\Sigma P_i} \right) = \left(\bigcap_{i=1}^n P_i \right) (x) \wedge \left(\bigvee_{j=1}^n \left(\bigcap_{i=1}^n P_i \right) (a_j) \right) =$$

$$\begin{aligned}
 & \left(\bigcap_{i=1}^n P_i \right) (x) \cap \left(\bigcup_{j=1}^n \left(\bigcap_{i=1}^n P_i \right) (a_j) \right)^{\sum P_i} = \\
 & \left(\bigcap_{i=1}^n P_i \right) (x) \cap \left(\bigcap_{q=1}^n \left(\bigcup_{j=1}^n \left(\bigcap_{i=1}^n P_i \right) (a_j) \right)^{P_q} \right) = \\
 & \left(\bigcap_{i=1}^n P_i \right) (x) \cap \left(\bigcap_{q=1}^n \bigcup_{j=1}^n \left(\bigcap_{i=1}^n P_i \right) (a_j)^{P_q} \right) \supseteq \\
 & \left(\bigcap_{i=1}^n P_i \right) (x) \cap (P_1(a_1) \cap P_2(a_2) \cap \dots \cap P_n(a_n)) = \\
 & \left(\bigcap_{i=1}^n P_i \right) (x) \cap (P_1(x) \cap P_2(x) \cap \dots \cap P_n(x)) \neq \emptyset,
 \end{aligned}$$

hiszen mindegyikük tartalmazza x -et.

Másrészről, vegyük észre, hogy minden $j \in 1, 2, \dots, n$ esetén $\left(\bigcap_{i=1}^n P_i \right) (x) \wedge \left(\bigcap_{i=1}^n P_i \right) (a_j) = \emptyset$, ellenkező esetben $\left(\bigcap_{i=1}^n P_i \right) (x) = \left(\bigcap_{i=1}^n P_i \right) (a_j)$ teljesülne, amiből következne, hogy $(x, a_j) \in \bigcap_{i=1}^n P_i$, ami ellentmond a_j definíciójának, miszerint $a_j \in P_j(x) \setminus \left(\bigcap_{i=1}^n P_i \right) (x)$. Ez azt jelenti, hogy

$$\begin{aligned}
 & \{x\}^{\sum P_i} \wedge \left(\bigvee_{j=1}^n \{a_j\}^{\sum P_i} \right) = \bigvee_{j=1}^n (\{x\}^{\sum P_i} \wedge \{a_j\}^{\sum P_i}) = \\
 & \bigvee_{j=1}^n \left(\left(\bigcap_{i=1}^n P_i \right) (x) \wedge \left(\bigcap_{i=1}^n P_i \right) (a_j) \right) = \emptyset.
 \end{aligned}$$

Ez ellentmond a korábban kapott eredménynek, miszerint

$$x^{\sum P_i} \wedge \left(\bigvee_{j=1}^n a_j^{\sum P_i} \right) \neq \emptyset.$$

□

2.6. Állítás. Ha $P_1, \dots, P_n$ olyan ekvivalenciarelációk az U alaphalmazon, amelyek kielégítik a $(\star)$ feltételt, akkor minden $X \subseteq U$ esetén $X^{\sum P_i} = X \cap P_i$ és $X_{\sum P_i} = X \cap P_i$.

Bizonyítás. Mivel $\bigcap P_i \subseteq P_i$, így $X^{\bigcap P_i} \subseteq X^{P_i}$ minden $i \in \{1, \dots, n\}$ esetén, tehát $X^{\bigcap P_i} \subseteq \bigcap_{i=1}^n X^{P_i} = X^{\sum P_i}$. Fordítva, ha $x \in X^{\sum P_i}$, akkor $P_i(x) \cap X \neq \emptyset$ minden $i \in \{1, \dots, n\}$ esetén. Mivel $(\bigcap P_i)(x) = \bigcap_{i=1}^n P_i(x)$, a $(\star)$ feltétel alkalmazásával azt kapjuk, hogy $(\bigcap P_i)(x) = P_k(x)$ valamely $k \in \{1, \dots, n\}$ esetén. Abból, hogy $(\bigcap P_i)(x) \cap X \neq \emptyset$, az következik, hogy $x \in X^{\bigcap P_i}$. Alkalmazzuk ezután az approximációs párok dualitását, azaz

$$X_{\sum P_i} = \left((X^c)^{\sum P_i} \right)^c = \left((X^c)^{\bigcap P_i} \right)^c = X_{\bigcap P_i}.$$

□

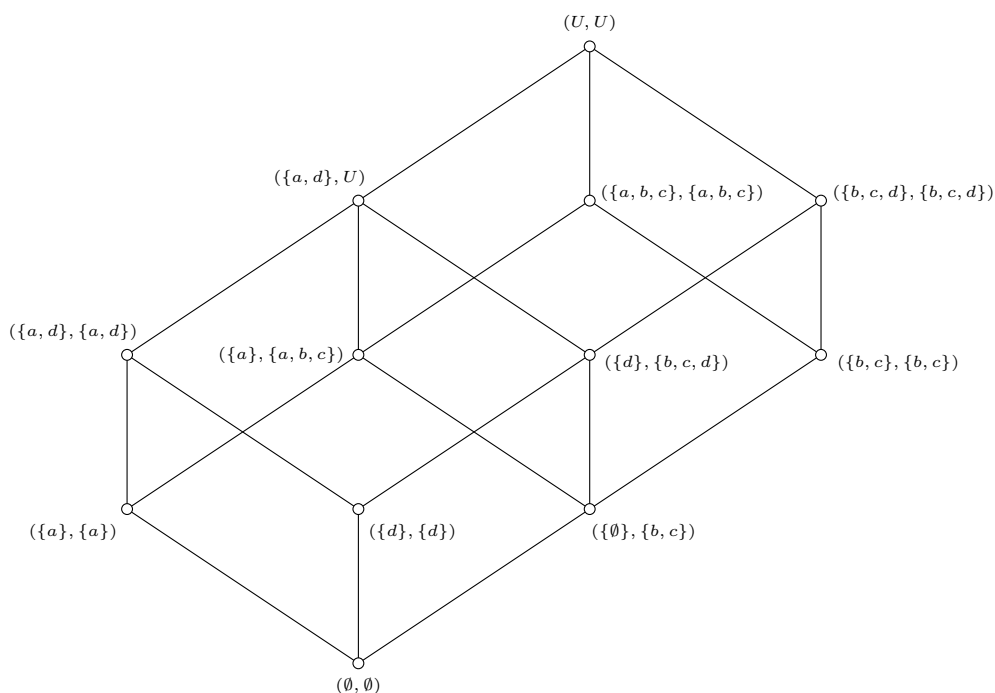
2.7. Következmény. Legyenek $P_1, \dots, P_n$ olyan ekvivalenciarelációk az U alaphalmazon, amelyek kielégítik a $(\star)$ feltételt. Ekkor $RS(\sum P_i)$ egy teljesen disztributív reguláris dupla Stone-háló.

Egy $\tau \subseteq \mathcal{P}(U)$ rendszert *topológiának* nevezünk egy nemüres U alaphalmazon, ha $\emptyset, U \in \tau$, továbbá tetszőleges τ -beli elemek uniója szintén τ -ban marad, és véges sok τ -beli elem metszete szintén τ -ban marad. Ha τ tetszőleges elemeinek (akár végtelen soknak) metszete is τ -ban marad, akkor azt mondjuk, hogy τ -t egy *Alexandroff-topológia*.

2.8. Megjegyzés. A $(\star)$ feltétel először (kissé más formában) a [106] munkában jelent meg, ahol a szerzők bizonyították, hogy a $\mathcal{P}(U)_{\sum P_i}$ rendszer pontosan akkor alkot topológiát U -n, ha $(\star)$ teljesül. Azt is megmutatták, hogy ez az eset ekvivalens azzal a feltétellel, hogy $\mathcal{P}(U)_{\sum P_i} = \mathcal{P}(U)_R$ valamely $R \subseteq U \times U$ ekvivalenciára. Mivel bármely R ekvivalencia esetén $\mathcal{P}(U)_R$ egy Alexandroff-topológia, és minden Alexandroff-topológia önduális, az eredményük tovább erősíthető azzal az állítással, hogy $(\star)$ pontosan akkor teljesül, ha $\mathcal{P}(U)_{\sum P_i}$ és $\mathcal{P}(U)^{\sum P_i}$ Alexandroff-topológiák. Két ekvivalenciareláció esetére a 2.5. és 2.6. Állításokat [56]-ban bizonyították.

2.9. Példa. Legyen $U = \{a, b, c, d\}$, és legyenek P_1, P_2, P_3 ekvivalenciarelációk U -n úgy, hogy $U/P_1 = \{\{a, b, c\}, \{d\}\}$, $U/P_2 = \{\{a\}, \{b, c, d\}\}$ és $U/P_3 = \{\{a, d\}, \{b, c\}\}$.

Vegyük észre, hogy ezek az ekvivalenciák kielégítik a $(\star)$ feltételt. A 2.1. ábra mutatja $RS(\sum_{i=1}^3 P_i)$ Hasse-diagramját.

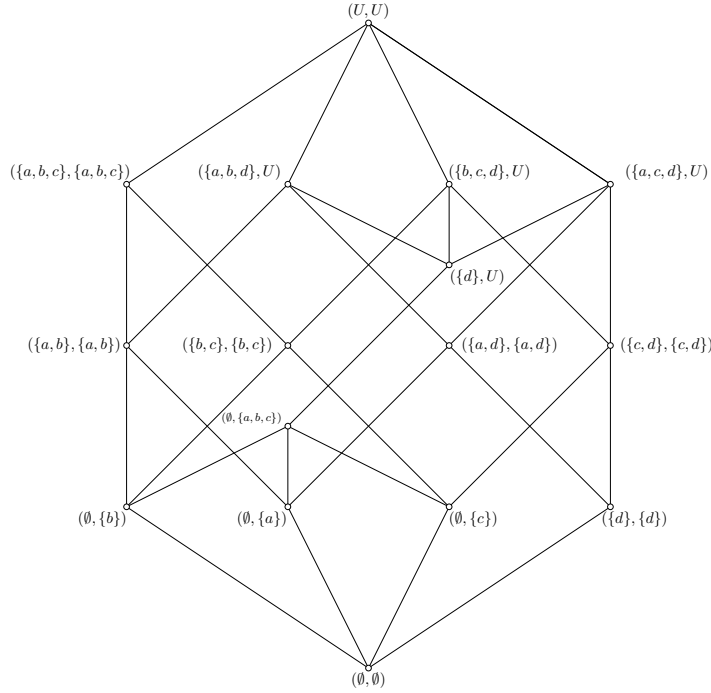


2.1. ábra. A 2.9. Példa szerinti optimista durva halmazok hálója

2.3. Dedekind–MacNeille-kiterjesztés

A multigranuláris durva halmazok általánosságban nem feltétlenül alkotnak hálót (még az optimista esetben sem), csupán részbenrendezett halmazt, ezt demonstrálja a 2.10. Példa. Érdekes tehát vizsgálni ennek a részbenrendezett halmaznak a teljes kiterjesztését.

2.10. Példa. Legyen $U = \{a, b, c, d\}$, és legyenek P_1, P_2, P_3 ekvivalenciarelációk U -n, ahol $U/P_1 = \{\{a, b, c\}, \{d\}\}$, $U/P_2 = \{\{a, d\}, \{b, c\}\}$, $U/P_3 = \{\{a, b\}, \{c, d\}\}$.



2.2. ábra. A 2.10

. Példa optimista multigranuláris durva halmazainak hálójára.

A 2.2. ábra mutatja a $RS(\sum_{i=1}^3 P_i)$ Hasse-diagramját. Vegyük észre, hogy $RS(\sum_{i=1}^3 P_i)$ nem egy háló, hanem csak egy korlátos részbenrendezett halmaz. Például az $(\emptyset, \{b\})$ és $(\emptyset, \{a\})$ elemeknek nincs szuprénuma, mivel két legkisebb felső korlátjuk van: $(\{a, b\}, \{a, b\})$ és $(\emptyset, \{a, b, c\})$.

A továbbiakban kiterjesztem a [56] eredményeit olyan esetekre, amikor az ekvivalenciarelációk száma tetszőleges, nem feltétlenül kettő. Legyenek $P_1, P_2, \dots, P_n$ ekvivalenciarelációk U -n. Minden $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ esetén jelöljük a P_k egytagú („singleton”) elemeinek halmazát a következőképpen:

$$S_k = \{x \in U \mid P_k(x) = \{x\}\}.$$

Ezenfelül definiáljuk a $\sum P_i$ -durva halmazok növekvő reprezentációját az alábbi módon:

$$IRS(\sum P_i) = \left\{ (A, B) \in \mathcal{P}(U)_{\sum P_i} \times \mathcal{P}(U)^{\sum P_i} \mid A \subseteq B \text{ és } (B \setminus A) \cap \left(\bigcup_{i=1}^n S_i \right) = \emptyset \right\}.$$

2.11. Lemma. $RS(\sum P_i) \subseteq IRS(\sum P_i)$.

Bizonyítás. Legyen $(X_{\sum P_i}, X^{\sum P_i}) \in RS(\sum P_i)$, ahol $X \subseteq U$. Ekkor $(X_{\sum P_i}, X^{\sum P_i})$ szintén eleme a $\mathcal{P}(U)_{\sum P_i} \times \mathcal{P}(U)^{\sum P_i}$ halmaznak, továbbá

$X_{\sum P_i} \subseteq X^{\sum P_i}$. Tegyük fel, hogy valamely $k \in \{1, \dots, n\}$ esetén létezik $z \in (X^{\sum P_i} \setminus X_{\sum P_i}) \cap S_k$ elem. Ekkor $P_k(z) = \{z\}$ és $z \in X^{\sum P_i}$ miatt $z \in X$, és így $P_k(z) \subseteq X$. Ebből adódik, hogy $z \in X_{\sum P_i}$, ami ellentmond a feltevésnek. Mivel k tetszőleges volt, ez azt jelenti, hogy $(X^{\sum P_i} \setminus X_{\sum P_i}) \cap (\bigcup_{i=1}^n S_i) = \emptyset$, vagyis $(X_{\sum P_i}, X^{\sum P_i}) \in IRS(\sum P_i)$. $\square$

Legyen adott az $\{L\}_{j \in J}$ teljes hálóból álló család a nemüres J indexhalmazzal. Ezek direkt szorzata $\prod_{j \in J} L$ egy teljes háló, ahol az egyesítés és metszet műveleteket komponensenkénti végrehajtással értelmezzük. Az alábbi leképezéseket *kanonikus projekcióknak* nevezzük:

$$\pi_k((x_j)_{j \in J}) = x_k, \quad k \in J.$$

Ezek a leképezések tetszőleges egyesítéseket és metszeteket megőriznek, azaz szűrjektív teljes homomorfizmusok. A $\mathcal{P}(U)_{\sum P_i} \times \mathcal{P}(U)^{\sum P_i}$ direkt szorzat a természetes rendezésre nézve egy teljes hálót alkot, ahol az egyesítés és metszet az alábbi módon adhatók meg:

$$\bigvee_{j \in J} (X_j, Y_j) = \left(\bigcup_{j \in J} X_j, \left(\bigcup_{j \in J} Y_j \right)^{\sum P_i} \right),$$

$$\bigwedge_{j \in J} (X_j, Y_j) = \left(\left(\bigcap_{j \in J} X_j \right)_{\sum P_i}, \bigcap_{j \in J} Y_j \right),$$

minden $\{(X_j, Y_j) \mid j \in J\} \subseteq \mathcal{P}(U)_{\sum P_i} \times \mathcal{P}(U)^{\sum P_i}$ esetén. A kanonikus projekciók $\pi_1: (X, Y) \mapsto X$ és $\pi_2: (X, Y) \mapsto Y$. A $\mathcal{P}(U)_{\sum P_i} \times \mathcal{P}(U)^{\sum P_i}$ szorzaton egy polaritást is értelmezhetünk a következőképpen:

$$\sim (X, Y) := (Y^c, X^c).$$

Valóban, bármely $(X, Y), (A, B) \in \mathcal{P}(U)_{\sum P_i} \times \mathcal{P}(U)^{\sum P_i}$ esetén a következők teljesülnek:

$$\sim \sim (X, Y) = (X, Y),$$

$$(A, B) \leq (X, Y) \Leftrightarrow \sim (X, Y) \leq \sim (A, B).$$

Teljes hálók direkt szorzatának egy teljes alhálóját *teljes szubdirekt szorzatnak* nevezzük, ha a kanonikus projekciók mind szűrjektív leképezések. A továbbiakban legyen $S := \bigcup_{i=1}^n S_i$. A következő eredményt a [56] cikkben két ekvivalenciarelációra bizonyították, azonban a bizonyítás hasonlóan történik $n \geq 2$ különböző ekvivalenciareláció esetén is.

2.12. Lemma. (i) $IRS(\sum P_i)$ egy teljes szubdirekt szorzata $\mathcal{P}(U)_{\sum P_i}$ és $\mathcal{P}(U)^{\sum P_i}$ hálónak.

(ii) $IRS(\sum P_i)$ egy teljes polaritás-alhálója $\mathcal{P}(U)_{\sum P_i} \times \mathcal{P}(U)^{\sum P_i}$ -nak.

Például (ii) igazolható azzal, hogy bármely $(A, B) \in IRS(\sum P_i)$ esetén teljesül, hogy $\sim(A, B) = (B^c, A^c) \in IRS(\sum P_i)$.

Valóban, definíció szerint $A \subseteq B$, $A = A_{\sum P_i}$, $B = B^{\sum P_i}$, és $(B \setminus A) \cap S = \emptyset$. Mivel $B^c = (B^{\sum P_i})^c = (B^c)_{\sum P_i}$, ebből következik, hogy $B^c \in \mathcal{P}(U)_{\sum P_i}$, továbbá $A^c = (A_{\sum P_i})^c = (A^c)^{\sum P_i} \in \mathcal{P}(U)^{\sum P_i}$. Nyilvánvaló, hogy $A \subseteq B$ esetén $B^c \subseteq A^c$, amiből adódik, hogy $A^c \setminus B^c = A^c \cap B^{cc} = B \cap A^c = B \setminus A$. Ebből $(A^c \setminus B^c) \cap S = (B \setminus A) \cap S = \emptyset$. Ezzel igazoltuk, hogy $(B^c, A^c) \in IRS(\sum P_i)$.

A következő definíciókat [20] alapján vezetem be (ld. még [104]). Legyen P egy részbenrendezett halmaz. Az L teljes hálót a P *kiteljesítésének* nevezzük, ha létezik $\nu : P \rightarrow L$ rendezésőrző beágyazás. Bármely $X \subseteq P$ esetén legyenek

$$X^u = \{p \in P \mid p \geq x, \text{ minden } x \in X\}, \quad X^l = \{p \in P \mid p \leq x, \text{ minden } x \in X\},$$

$$DM(P) = \{X \subseteq P \mid X^{ul} = X\}.$$

Ekkor $(DM(P), \subseteq)$ egy teljes háló, amit a P részbenrendezett halmaz *Dedekind–MacNeille-teljesítésének* nevezzük. Legyen $x \in P$, és legyen $(x] = \{y \in P \mid y \leq x\}$. Defináljuk a $\mu : P \rightarrow DM(P)$, $\mu(x) = (x]$ rendezésőrző beágyazást. Ekkor $DM(P)$ a P μ leképezés általi teljesítése, amely tetszőleges P -beli egyesítést vagy metszetet megőriz.

Egy $T \subseteq P$ halmazt *egyesítéssűrűnek* nevezzük, ha minden $x \in P$ elemre létezik $X \subseteq T$ úgy, hogy $x = \bigvee X$. A duális fogalom a *metszetsűrű* halmaz. Megjegyzendő, hogy a $\mu(P)$ képhalmaz mind egyesítés-, mind metszetsűrű $DM(P)$ -ben. Továbbá, ha L egy teljes háló, és P egy egyesítés- és metszetsűrű részhalmaza L -nek, akkor L izomorf $DM(P)$ -vel. Ezenkívül [104] megmutatta, hogy minden részbenrendezett halmaz teljesítése tartalmaz egy másolatot a Dedekind–MacNeille-teljesítésből, így bizonyítva, hogy a Dedekind–MacNeille teljesítés az összes teljesítés közül a legkisebb.

2.13. Tétel. $RS(\sum P_i)$ Dedekind–MacNeille teljesítése $IRS(\sum P_i)$.

Bizonyítás. $IRS(\sum P_i)$ egy olyan teljes háló, ami tartalmazza $RS(\sum P_i)$ -t. Ez azt jelenti, hogy az $IRS(\sum P_i)$ identitásleképezésen keresztüli teljesítése $RS(\sum P_i)$ -nek. Tehát annak igazolásához, hogy ez a legkisebb teljesítés, elegendő annyit megmutatni, hogy $RS(\sum P_i)$ mind egyesítés-, mind metszetsűrű $IRS(\sum P_i)$ -ben. Ez pontosan ugyanolyan módon igazolható $n \geq 2$ különböző ekvivalenciareláció esetére, mint ahogyan [56]-ben szerepel. $\square$

Nyilvánvaló, hogy ha $RS(\sum P_i)$ egy teljes háló, akkor egybeesik $IRS(\sum P_i)$ -vel. Nézzük meg a Tétel 2.13 (és Lemma 2.12) néhány következményét.

Azt mondjuk, hogy egy polaritásháló $(L, \vee, \wedge, \sim)$ kielégíti a *Kleene-egyenlőtlenséget*, ha minden $x, y \in L$ esetén fennáll, hogy

$$x \wedge \sim x \leq y \vee \sim y. \quad (\text{K})$$

Ezeket a hálókat *pszeudo-Kleene-hálóknak* is nevezik. Bevezetve az $a \perp b$ jelölést az $a \leq \sim b$ esetre, a (K) egyenlőtlenség ekvivalens a következő implikációval: $a \perp a$ és $b \perp b \Rightarrow a \perp b$. Azokat a polaritáshálókat, amelyek kielégítik ezt a tulajdonságot, *reguláris polaritáshálóknak* (vagy *reguláris korlátos involutív hálóknak*) is nevezik (ld. [31]). Az $(L, \vee, \wedge, \sim)$ polaritásháló *paraortomoduláris* (ld. [32]), ha minden $x, y \in L$ esetén teljesül, hogy

$$(x \leq y \text{ és } \sim x \wedge y = 0) \Rightarrow x = y. \quad (\text{P})$$

2.14. Tétel. *Az $IRS(\sum P_i)$ polaritásháló kielégíti a Kleene-egyenlőtlenséget, továbbá paraortomoduláris.*

Bizonyítás. Vegyünk tetszőleges $(A, B), (C, D)$ elemeket az $IRS(\sum P_i)$ halmazból. Ekkor $A \subseteq B$ miatt $A \cap B^c = \emptyset$, így

$$(A, B) \wedge \sim (A, B) = (A, B) \wedge (B^c, A^c) = ((A \cap B^c)_{\sum P_i}, B \cap A^c) = (\emptyset, B \setminus A).$$

Továbbá azt is megkaphatjuk, hogy

$$(C, D) \vee \sim (C, D) = (C, D) \vee (D^c, C^c) = (C \cup D^c, (D \cup C^c)_{\sum P_i}) = (C \cup D^c, U),$$

mivel $C \subseteq D$ miatt $D \cup C^c \supseteq C \cup C^c = U$. Abból, hogy $(\emptyset, B \setminus A) \leq (C \cup D^c, U)$, következik, hogy $(A, B) \wedge \sim (A, B) \leq (C, D) \vee \sim (C, D)$, ezáltal igazolva (K)-t.

Most tegyük fel, hogy $(A, B) \leq (C, D)$ és $\sim (A, B) \wedge (C, D) = (B^c, A^c) \wedge (C, D) = (\emptyset, \emptyset)$ teljesül. Ekkor $A \subseteq C \subseteq D$, $A \subseteq B \subseteq D$ és $A^c \cap D = \emptyset$. Mivel az utóbbi összefüggés azt jelenti, hogy $D \subseteq (A^c)^c = A$, ebből következik $A = C = D = B$. Tehát $(A, B) = (C, D)$ is igaz, ezzel bizonyítva (P)-t. $\square$

A durvahalmaz-elméletben egy $X \subseteq U$ halmazt *egzaktnak* nevezünk (ld. [85]), ha az alsó és felső közelítései megegyeznek (ekvivalenciareláció esetén gyakran *definiálhatónak* is nevezik). Valamilyen $P_1, \dots, P_n \subseteq U \times U$ ekvivalenciák által meghatározott optimista multigranuláris approximációk esetén ez azt jelenti, hogy $X_{\sum P_i} = X^{\sum P_i}$. Nyilvánvaló, hogy ha $X \subseteq U$ egzakt halmaz, akkor annak komplementere, X^c is egzakt. Valóban, hiszen ekkor $(X^c)_{\sum P_i} = (X^{\sum P_i})^c = (X_{\sum P_i})^c = (X^c)^{\sum P_i}$.

Az $RS(\sum P_i)$ *egzakt elemének* nevezünk egy olyan durva halmazt, amelyik (X, X) alakú ($X \subseteq U$). Mivel ebben az esetben $X_{\sum P_i} = X = X^{\sum P_i}$, nyilvánvaló, hogy (X, X) akkor és csakis akkor egzakt elem $RS(\sum P_i)$ -ben, ha $X \subseteq U$ egy egzakt halmaz.

A $(P, \leq)$ korlátos részbenrendezett halmazban az $x \in P$ elemet *komplementumosnak* nevezzük, ha létezik $x' \in P$ elem, amelyre

$$x \vee x' = 1 \text{ és } x \wedge x' = 0 \text{ teljesül } (P, \leq) \text{ halmazban.}$$

2.15. Állítás. *Az $RS(\sum P_i)$ egzakt elemei egybeesnek az $RS(\sum P_i)$ komplementumos elemeivel.*

Bizonyítás. Ha (X, X) egy egzakt elem $RS(\sum P_i)$ -ben, akkor X és X^c is egzakt halmazok, így (X^c, X^c) is egzakt elem $RS(\sum P_i)$ -ben. Mivel $X \cap X^c = \emptyset$, így az egyetlen közös alsó korlátja (X, X) és (X^c, X^c) elemeknek $RS(\sum P_i)$ -ben $(\emptyset, \emptyset)$, azaz $(X, X) \wedge (X^c, X^c) = (\emptyset, \emptyset)$ teljesül $RS(\sum P_i)$ -ben. Hasonlóan $X \cup X^c = U$ miatt $(X, X) \vee (X^c, X^c) = (U, U)$ teljesül $RS(\sum P_i)$ -ben. Ezért (X, X) és (X^c, X^c) egymás komplementerei $RS(\sum P_i)$ -ben. Fordítva, tegyük fel, hogy $(A, B) \vee (C, D) = (U, U)$ és $(A, B) \wedge (C, D) = (\emptyset, \emptyset)$ teljesül, azaz (C, D) komplementere (A, B) -nek $RS(\sum P_i)$ -ben. Ekkor ezek az egyenlőségek igazak $RS(\sum P_i)$ legszűkebb kiterjesztésében, vagyis az $IRS(\sum P_i)$ hálóban is. Így a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned} (A, B) \vee (C, D) &= (A \cup C, (B \cup D)^{\sum P_i}) = (U, U) \text{ és} \\ (A, B) \wedge (C, D) &= ((A \cap C)_{\sum P_i}, (B \cap D)) = (\emptyset, \emptyset). \end{aligned}$$

Mivel $A \subseteq B$ és $C \subseteq D$, így $A \cup C = U$ miatt $B \cup D = U$ is teljesül, tovább $B \cap D = \emptyset$ következtében $A \cap C = \emptyset$ teljesül. Ezekből azt kapjuk, hogy $D = B^c$ és $C = A^c$. Mivel $D = B^c \subseteq A^c = C$, és $C \subseteq D$, ebből következik $C = D$ és $A = B$. Így $(A, B) = (A, A)$ és $(C, D) = (C, C)$ egzakt elemek $RS(\sum P_i)$ -ben. $\square$

Tekintsük az U -n értelmezett $P_1, P_2, \dots, P_n$ ekvivalenciarelációkra a következő feltételt:

$$\left| \left(\bigcap_{i=1}^n P_i \right) (x) \right| = 1 \Rightarrow |P_1(x)| = 1 \text{ vagy } |P_2(x)| = 1 \text{ vagy } \dots \text{ vagy } |P_n(x)| = 1 \quad (\$)$$

2.16. Tétel. *Legyenek $P_1, P_2, \dots, P_n$ ekvivalenciarelációk az U alaphalmazon, amelyek kielégítik a $(\$)$ feltételt. Ekkor $RS(\sum P_i)$ egy teljes háló.*

Bizonyítás. Mivel $IRS(\sum P_i)$ egy teljes háló, elegendő megmutatni, hogy $RS(\sum P_i) = IRS(\sum P_i)$. Lemma 2.11 alapján $RS(\sum P_i) \subseteq IRS(\sum P_i)$. Az ellenkező irányú tartalmazás bizonyításához elegendő minden $(A, B) \in IRS(\sum P_i)$ esetén találni egy $X \subseteq U$ halmazt, amelyre

$$X_{\sum P_i} = A \text{ és } X^{\sum P_i} = B.$$

Az $IRS(\sum P_i)$ definíciója szerint $A \in \mathcal{P}(U)_{\sum P}$, $B \in \mathcal{P}(U)^{\sum P_i}$, $A \subseteq B$, és $(B \setminus A) \cap S = \emptyset$. Tekintettel a Következmény 2.4. Állítására, a $\mathcal{P}(U)_{\sum P}$ és $\mathcal{P}(U)^{\sum P_i}$ elemei $(\bigcap P_i)$ -definíálhatóak, így az A és B halmazok, valamint a különbségük, $C := B \setminus A$ is $(\bigcap P_i)$ -definíálható.

Ezután megmutatjuk, hogy bármely $x \in C$ esetén $|(\bigcap P_i)(x)| \geq 2$. Indirekt módon bizonyítjuk, így tegyük fel, hogy $|(\bigcap P_i)(x)| = 1$. Mivel a (\$) feltétel teljesül, ez azt eredményezi, hogy $|P_k(x)| = 1$ valamely $k \in \{1, \dots, n\}$ esetén, és így $x \in (B \setminus A) \cap S \neq \emptyset$ – ami ellentmondás.

Mivel C definiálható, ezért a $\bigcap P_i$ ekvivalencia valamely C_k ($k \in K$) osztályainak diszjunkt uniójaként előáll. A kiválasztási axióma szerint minden C_k osztályhoz hozzárendelhetünk egy $\delta_k \in C_k$ elemet. Legyen F az így kiválasztott elemek halmaza, azaz $F := \{\delta_k \mid k \in K\}$. Ekkor $F \cap P_i = C$. Mivel minden C_k osztály legalább két elemből áll, minden $y \in F$ esetén létezik $v \in C \setminus F$ elem, amire $(y, v) \in \bigcap P_i$. Legyen

$$X = A \cup F.$$

Mivel $B = A \cup C$, a Következmény 2.4 miatt

$$\begin{aligned} X^{\sum P_i} &= (X \cap P_i)^{\sum P_i} = ((A \cup F) \cap P_i)^{\sum P_i} = (A^{\cap P_i} \cup F \cap P_i)^{\sum P_i} \\ &= (A \cup C)^{\sum P_i} = B^{\sum P_i} = B. \end{aligned}$$

Továbbá $A \subseteq X$ miatt adódik, hogy $A = A_{\sum P_i} \subseteq X_{\sum P}$. A fordított tartalmazás igazolására vegyünk egy $x \in X_{\sum P_i}$ elemet. Ekkor $P_k(x) \subseteq X$, valamely $k \in \{1, \dots, n\}$ esetén. Azt fogjuk belátni, hogy $P_k(x) \cap F = \emptyset$, ami azt eredményezi, hogy $P_k(x) \subseteq X = A \cup F$ ekvivalens $P_k(x) \subseteq A$ -val.

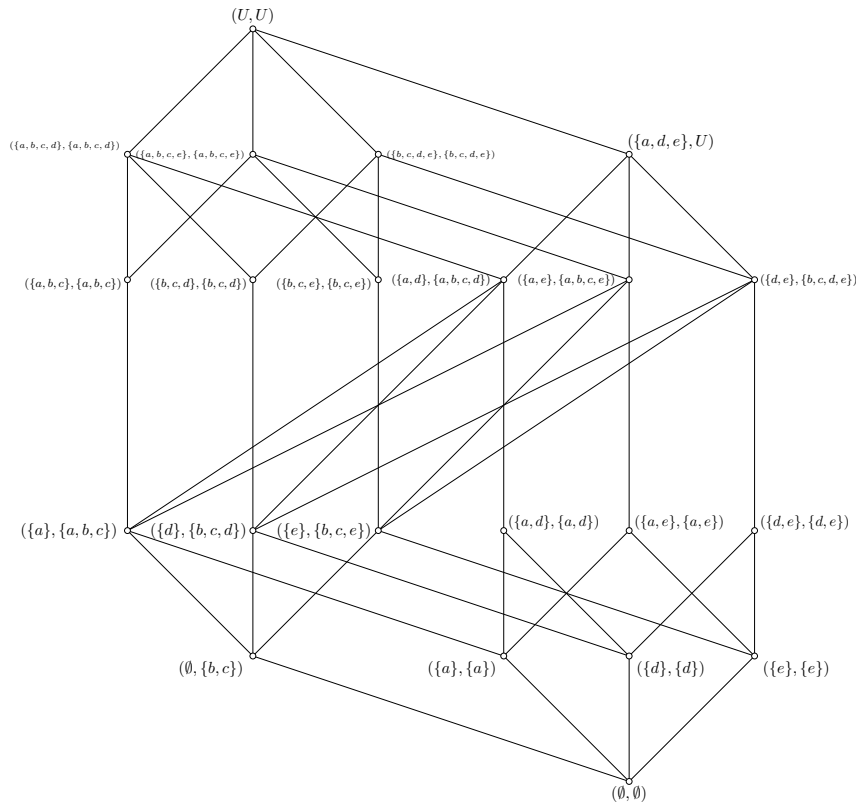
Tegyük fel, hogy $P_k(x) \subseteq A \cup F$ és $P_k(x) \cap F \neq \emptyset$. Ekkor létezik $y \in F$ elem, amire $(x, y) \in P_k$, és szintén létezik $v \in C \setminus F$ elem, amire $(y, v) \in \bigcap P_i \subseteq P_k$. Így $(x, v) \in P_k$, tehát $v \in P_k(x) \subseteq A \cup F$. Ez lehetetlen, mert

$$\begin{aligned} (A \cup F) \cap (C \setminus F) &= (A \cap (C \setminus F)) \cup (F \cap (C \setminus F)) = \\ &= (A \cap (C \setminus F)) \cup \emptyset \subseteq A \cap (B \setminus A) = \emptyset. \end{aligned}$$

Tehát $P_k(x) \subseteq A$, és ez azt eredményezi, hogy $x \in A_{\sum P_i} = A$. Így $X_{\sum P} = A$, és ezzel a bizonyítás befejeződött. $\square$

2.17. Megjegyzés. Könnyű ellenőrizni, hogy a $(\star)$ feltétel maga után vonja a (\$) feltételt. Valóban, tegyük fel, hogy létezik $x \in U$, amelyre $|(\bigcap P_i)(x)| = 1$. Ekkor a $(\star)$ feltétel alapján $(\bigcap P_i)(x) = P_k(x)$ teljesül valamely $k \in \{1, \dots, n\}$ esetén. Következésképpen $|P_k(x)| = 1$, ami azt jelenti, hogy (\$) teljesül.

2.18. Példa. Legyen $U = \{a, b, c, d, e\}$, és legyenek P_1, P_2, P_3 ekvivalenciarelációk U -n úgy, hogy $U/P_1 = \{\{a, b, c\}, \{d, e\}\}$, $U/P_2 = \{\{a\}, \{b, c, d\}, \{e\}\}$, $U/P_3 = \{\{a\}, \{d\}, \{b, c, e\}\}$. Ezek az ekvivalenciarelációk kielégítik (\$) feltételt, de nem teljesítik a $(\star)$ feltételt. A 2.3 ábra az $RS(\sum_{i=1}^3 P_i)$ Hasse-diagramját mutatja.

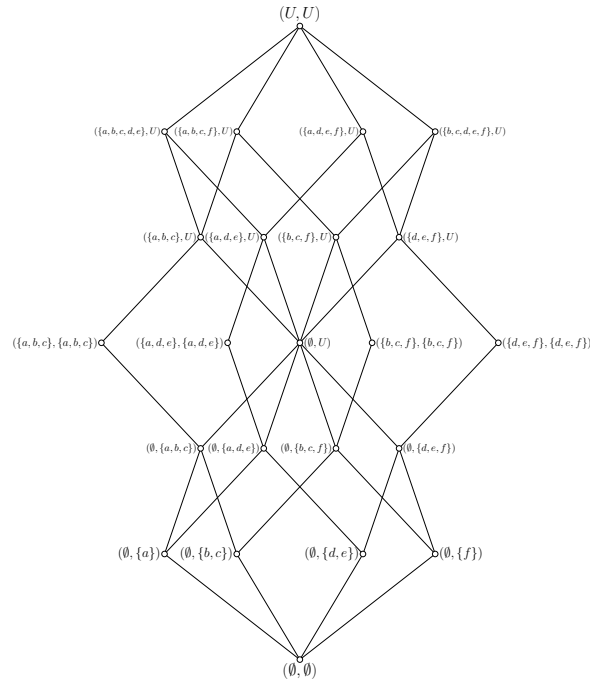


2.3. ábra. A 2.18. Példában szereplő optimista durva halmazok hálója.

Megjegyezzük, hogy a 2.16. Tétel csupán azt garantálja, hogy (\$) elégséges feltétele az $RS(\sum P_i)$ teljes háló tulajdonságának. A 2.19. Példa azt mutatja, hogy általánosságban viszont (\$) nem szükséges feltétel.

2.19. Példa. Legyen $U = \{a, b, c, d, e, f\}$, és legyenek P_1, P_2 ekvivalenciarelációk U -n úgy, hogy $U/P_1 = \{\{a, b, c\}, \{d, e, f\}\}$, $U/P_2 = \{\{a, d, e\}, \{b, c, f\}\}$. Ezek az ekvivalenciarelációk nem elégítik ki a (\$) feltételt, de $RS(P_1 + P_2)$ egybeesik az $IRS(P_1 + P_2)$ hálóval: $\{(\emptyset, \emptyset), (\emptyset, \{a\}), (\emptyset, \{b, c\}), (\emptyset, \{d, e\}), (\emptyset, \{f\}), (\emptyset, \{a, b, c\}), (\emptyset, \{a, d, e\}), (\emptyset, \{b, c, f\}), (\emptyset, \{d, e, f\}), (\emptyset, U), (\{a, b, c\}, \{a, b, c\}), (\{a, d, e\}, \{a, d, e\}), (\{b, c, f\}, \{b, c, f\}), (\{d, e, f\}, \{d, e, f\}), (\{a, b, c\}, U), (\{a, d, e\}, U), (\{b, c, f\}, U), (\{d, e, f\}, U), (\{a, b, c, d, e\}, U), (\{a, b, c, f\}, U), (\{a, d, e, f\}, U), (\{b, c, d, e, f\}, U), (U, U)\}$.

Ez azt jelenti, hogy a 2.4 ábrán is látható $RS(P_1 + P_2)$ háló egy (teljes) háló.



2.4. ábra. A 2.19. Példához tartozó optimista durva halmazok hálójá.

A $(\star)$ feltétellel és a disztributivitással kapcsolatban a következő állítást fogalmazhatjuk meg:

2.20. Állítás. *Az alábbi állítások ekvivalensek:*

- (a) $IRS(\sum P_i)$ disztributív;
- (b) $\mathcal{P}(U)_{\sum P_i}$ és $\mathcal{P}(U)^{\sum P_i}$ disztributívak;
- (c) $P_1, P_2, \dots, P_n$ kielégítik a $(\star)$ feltételt;
- (d) $\mathcal{P}(U)_{\sum P_i}$ és $\mathcal{P}(U)^{\sum P_i}$ Alexandroff-topológiát alkotnak;
- (e) $RS(\sum P_i)$ egy teljesen disztributív reguláris dupla Stone-háló.

Bizonyítás. Mivel $\mathcal{P}(U)_{\sum P_i}$ és $\mathcal{P}(U)^{\sum P_i}$ az $IRS(\sum P_i)$ homomorf képei, így ezek disztributívak, ha $IRS(\sum P_i)$ is az, tehát (a)-ból következik (b). A 2.5. Állítás szerint (b) maga után vonja (c)-t. A [106] és a 2.8 megjegyzés alapján $(c) \Leftrightarrow (d)$. Ha $P_1, \dots, P_n$ teljesíti a $(\star)$ feltételt, akkor $RS(\sum P_i) = RS(\bigcap P_i)$, így (c) implikálja (e)-t a 2.7. következmény alapján. Az pedig nyilvánvaló, hogy (e)-ből következik (a). $\square$

2.4. Pesszimista eset vizsgálata

Ha $P_1, P_2, \dots, P_n$ ekvivalenciarelációk az U alaphalmazon, akkor a 2.1. szakaszban tárgyaltak szerint egy $X \subseteq U$ halmaz pesszimista alsó és felső közelítései rendre az $X_{\bigcup P_i}$ és az $X^{\bigcup P_i}$ halmazok. Ezért a $(X_{\bigcup P_i}, X^{\bigcup P_i})$ pesszimista multigranuláris durva halmazok azonosíthatók a $\bigcup P_i$ bináris reláció által indukált durva halmazokkal, és így ezek összességét $RS(\bigcup P_i)$ jelöli. Köztudott, hogy $\bigcup P_i$ általában csupán egy toleranciareláció, és nem feltétlenül ekvivalencia, így általánosságban $RS(\bigcup P_i)$ -ről csak annyit mondhatunk, hogy egy korlátos rendezett halmaz, nem feltétlenül háló.

A [55] publikációban kimutatták, hogy a R toleranciareláció által definiált durva halmazok pontosan akkor alkotnak teljesen disztributív hálót, ha az R tolerancia az U alaphalmaznak egy irredundáns lefedéséből származik. Érdekes megjegyezni, hogy nincs ismert szükséges és elégséges feltétel arra, hogy $RS(U, R)$ szimplán egy háló legyen.

A következőkben legyen $R \subseteq U \times U$ egy toleranciareláció (reflexív és szimmetrikus). Azt mondjuk, hogy az $X \subseteq U$ halmaz az R toleranciának egy *előblokkja*, ha minden $a, b \in X$ esetén $(a, b) \in R$, azaz $X^2 = X \times X \subseteq R$. Az R reláció *blokkja* pedig egy maximális előblokk – a blokkokat a továbbiakban B -vel fogjuk jelölni.

A $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(U)$ nemüres részhalmazok összességét *lefedésnek* nevezzük, ha $\bigcup \mathcal{C} = U$. Azt mondjuk, hogy $\mathcal{C}$ egy *irredundáns lefedés*, ha bármely $X \in \mathcal{C}$ esetén $\mathcal{C} \setminus \{X\}$ már nem lefedés U -ban. A [55] cikkben megmutatták, hogy egy R toleranciareláció pontosan akkor származtatható irredundáns lefedésből, ha minden $(a, b) \in R$ párhoz létezik egy $B_{a,b}$ blokk R -ben és egy $c \in U$ elem úgy, hogy $a, b \in B_{a,b} = R(c)$. Ismert továbbá, hogy $R = \bigcup \{B^2 \mid B \text{ egy blokk } R\text{-ben}\}$.

2.21. Állítás. *Legyenek $P_1, P_2, \dots, P_n$ ekvivalenciarelációk az U alaphalmazon. A következő két állítás ekvivalens:*

- (i) *Az $R := \bigcup_{i=1}^n P_i$ toleranciát egy irredundáns lefedés indukálja.*
- (ii) *Léteznek a $c_j \in U$ ($j \in J, J \neq \emptyset$) elemek úgy, hogy $\bigcup_{i=1}^n P_i = \bigcup_{j \in J} [R(c_j)]^2$.*

Bizonyítás. (i) $\Rightarrow$ (ii) Legyen $U = \bigcup_{j \in J} C_j$ egy irredundáns lefedése U -nak, amely indukálja R -et. Ez azt jelenti, hogy $(a, b) \in R$ pontosan akkor teljesül, ha $(a, b) \in C_j^2$ valamely $j \in J$ esetén. Más szavakkal, $R = \bigcup_{j \in J} C_j^2$. Mivel $C_j, j \in J$ irredundáns lefedése U -nak, minden $j \in J$ esetén létezik $c_j \in C_j \setminus \bigcup_{k \in J \setminus \{j\}} C_k$. Ekkor $(c_j, x) \in R$ minden $x \in C_j$ esetén, és $(c_j, y) \notin R$ minden $y \notin C_j$ esetén. Tehát $C_j = R(c_j)$, ami bizonyítja (ii)-t.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Tegyük fel, hogy léteznek a $c_j \in U, j \in J$ elemek úgy, hogy $R = \bigcup_{j \in J} [R(c_j)]^2$. Ekkor minden $u \in U$ esetén $(u, u) \in [R(c_j)]^2$ valamely $j \in J$ esetén. Ez azt jelenti, hogy minden $u \in U$ benne van valamely $R(c_j)$ halmazban, tehát $U = \bigcup_{j \in J} R(c_j)$. Így az $R(c_j)$ halmazok lefedik U -t.

Mivel $R(c_j) \times R(c_j) = [R(c_j)]^2 \subseteq R$, az $R(c_j)$ halmaz egy előblokk. Mivel $(c_j, x) \notin R$ minden $x \notin R(c_j)$ esetén, ebből következik, hogy $R(c_j)$ egy blokk R -ben. Minden $(a, b) \in R$ egy $R(c_j)$ alakú blokkban található, azaz egy olyan blokkban, amely megegyezik egy $c_j \in U$ elem szomszédságával, így a [55] alapján az $R(c_j)$, $j \in J$ halmazcsalád egy irredundáns lefedést alkot U -n. Mivel $(a, b) \in R$ pontosan akkor teljesül, ha $(a, b) \in R(c_j)$ valamely $j \in J$ esetén, így az R tolerancia ebből az irredundáns lefedésből származik. $\square$

Ennek az eredménynek és a [55]-nek a következményeként azonnal kapjuk az alábbi állítást.

2.22. Következmény. *Ha $P_1, \dots, P_n$ ekvivalenciarelációk az U alaphalmazon, és léteznek $c_j \in U$ ($j \in J, J \neq \emptyset$) elemek úgy, hogy $\bigcup_{i=1}^n P_i = \bigcup_{j \in J} [(\bigcup_{i=1}^n P_i)(c_j)]^2$, akkor $RS(\bigcup P_i)$ teljesen disztributív háló.*

Vizsgáljuk meg most a $(\star)$ duális feltételét:

$(\star)^d$ Minden $x \in U$ esetén létezik $k_x \in \{1, \dots, n\}$ úgy, hogy $P_i(x) \subseteq P_{k_x}(x)$ minden $i \in \{1, \dots, n\}$ esetén.

Valójában $(\star)^d$ azt jelenti, hogy minden $x \in U$ esetén az x -hez tartozó P_i -ekvivalenciaosztályok rendezett halmaza, azaz $(\{P_1(x), P_2(x), \dots, P_n(x)\}, \subseteq)$ tartalmaz egy legnagyobb elemet. Könnyen belátható, hogy a $(\star)^d$ feltételből következik a 2.21. Állítás (ii) feltétele. Sőt:

2.23. Állítás. *Ha $P_1, P_2, \dots, P_n$ ekvivalenciarelációk az U alaphalmazon, amelyek teljesítik a $(\star)^d$ feltételt, akkor $\bigcup P_i$ egy ekvivalenciareláció.*

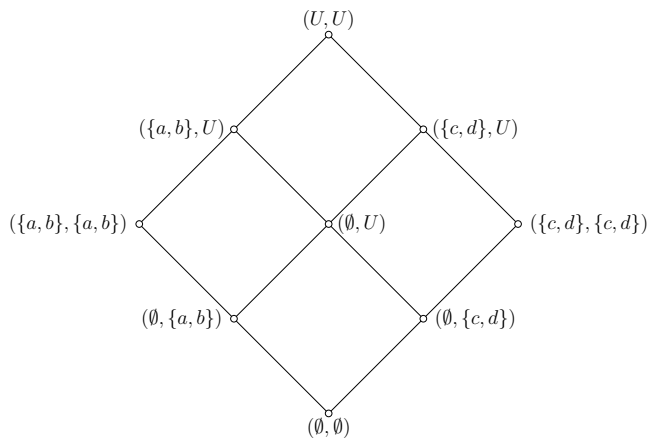
Bizonyítás. Legyenek $P_1, P_2, \dots, P_n$ ekvivalenciarelációk az U alaphalmazon. Mivel általában $\bigcup P_i$ egy tolerancia, csak azt kell megmutatnunk, hogy ha $(\star)^d$ teljesül, akkor $\bigcup P_i$ tranzitív.

Legyen $a, b, c \in U$ és $(a, b) \in \bigcup P_i$, valamint $(b, c) \in \bigcup P_i$. Mivel $(a, b) \in \bigcup P_i$, létezik $x \in \{1, \dots, n\}$ úgy, hogy $(a, b) \in P_x$. Hasonlóan, mivel $(b, c) \in \bigcup P_i$, létezik $y \in \{1, \dots, n\}$ úgy, hogy $(b, c) \in P_y$. Ekkor $P_x(a) = P_x(b)$ és $P_y(b) = P_y(c)$. Mivel $(\star)^d$ teljesül, létezik egy $k_b \in \{1, \dots, n\}$ úgy, hogy minden $i \in \{1, \dots, n\}$ esetén $P_i(b) \subseteq P_{k_b}(b)$. Ezért adódik, hogy $a \in P_x(b) \subseteq P_{k_b}(b)$ és $c \in P_y(b) \subseteq P_{k_b}(b)$. Ez azt jelenti, hogy $(a, b) \in P_{k_b}$ és $(b, c) \in P_{k_b}$. Mivel P_{k_b} egy ekvivalencia, ebből az következik, hogy $(a, c) \in P_{k_b}$, amiből $(a, c) \in \bigcup P_i$. $\square$

2.24. Következmény. *Legyenek $P_1, P_2, \dots, P_n$ ekvivalenciarelációk az U alaphalmazon, amelyek kielégítik $(\star)^d$ feltételt. Ekkor $RS(\bigcup P_i)$ egy teljesen disztributív reguláris dupla Stone-háló.*

2.25. Megjegyzés. Ha a rendszert csak két ekvivalenciareláció, P_1 és P_2 alkotja (azaz $n = 2$), akkor a $(\star)$ és $(\star)^d$ feltételek ekvivalensek. Ebben az esetben a P_1 és P_2 ekvivalenciákat koherensnek nevezzük (ld. [56]). Két koherens ekvivalenciareláció esetén mind a pesszimista, mind az optimista multigranuláris durva halmazok teljesen disztributív reguláris dupla Stone-hálót alkotnak.

2.26. Példa. Legyen $U = \{a, b, c, d\}$, és legyenek P_1, P_2, P_3 ekvivalenciák U -n úgy, hogy $U/P_1 = \{\{a, b\}, \{c\}, \{d\}\}$, $U/P_2 = \{\{a\}, \{b\}, \{c, d\}\}$, $U/P_3 = \{\{a, b\}, \{c, d\}\}$. Ezek az ekvivalenciák kielégítik a $(\star)^d$ feltételt. A 2.5. ábra a $RS(\bigcup_{i=1}^3 P_i)$ Hasse-diagramját mutatja.



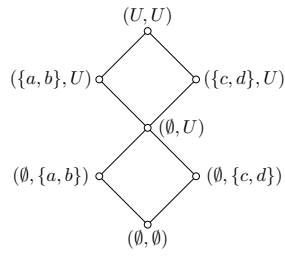
2.5. ábra. A 2.26. Példához tartozó pesszimista durva halmazok hálója.

A 2.21. Állítás alapján lehetséges, hogy a pesszimista durva halmazok hálója disztributív akkor is, ha $(\star)^d$ nem teljesül, amint azt a következő példa is mutatja.

2.27. Példa. Tekintsük ugyanazokat az ekvivalenciarelációkat, mint a 2.18. Példában, azaz $U/P_1 = \{\{a, b, c\}, \{d, e\}\}$, $U/P_2 = \{\{a\}, \{b, c, d\}, \{e\}\}$, $U/P_3 = \{\{a\}, \{d\}, \{b, c, e\}\}$. Vegyük észre, hogy ezek az ekvivalenciák nem elégítik ki a $(\star)^d$ feltételt, azonban a 2.21(ii) állítás feltétele teljesül, mert

$$\bigcup_{i=1}^3 P_i = \left[\left(\bigcup_{i=1}^3 P_i \right) (a) \right]^2 \cup \left[\left(\bigcup_{i=1}^3 P_i \right) (d) \right]^2 = \{a, b, c\}^2 \cup \{b, c, d, e\}^2.$$

Így a 2.22. következmény alapján a pesszimista durva halmazok disztributív hálót alkotnak.



2.6. ábra. A pesszimista durva halmazok hálójának a 2.27. Példában

2.5. Alkalmazási lehetőségek

A multigranuláris módszereket több probléma hatékony megoldására alkalmazták már. Például az optimista multigranuláris durva halmazokon alapuló osztályozási módszert használták emlőrák, májbetegségek, hepatitis és szívbetegségek diagnosztizálására [59]. A pesszimista durva halmazokat pedig tudták például hasznosítani a döntéshozatali folyamatokban [94]. A bizonyítékelmélet és a multigranuláris durva halmazok közötti összefüggéseket [63] tárgyalja. Ebben a szekcióban az információs rendszerek és az ajánlórendszerek területén való alkalmazását tárgyalom (ld. [72], [93]).

2.5.1. Alkalmazás az információs rendszerek területén

A következőkben vizsgáljuk meg, hogy egy információs rendszer által indukált ekvivalenciarelációk koherens rendszert alkotnak-e. Mivel ilyen esetben az indukált struktúrák sokkal egyszerűbbek, az ekvivalenciák koherenciája megkönnyíti és hatékonyabbá teszi az adott objektumokkal kapcsolatos adat-elemzést, ezáltal segítve az adathalmazon alapuló döntéshozatalt. Például két koherens ekvivalencia esetén (vö. 2.25 megjegyzéssel) mind az optimista, mind a pesszimista multigranuláris durva halmazok teljesen disztributív reguláris dupla Stone-algebrákat alkotnak, ami lehetőséget biztosít arra, hogy ezeket jelentősegteljesebb logikákkal kapcsoljuk össze (ld. például [12], [54]).

Legyen X egy nemüres halmaz. Az X egy $(X_j)_{j \in J}$ lefedése *finomabb*, mint az X egy $(Y_k)_{k \in K}$ lefedése, ha minden $j \in J$ esetén létezik egy $k(j) \in K$ úgy, hogy $X_j \subseteq Y_{k(j)}$. Ebben az esetben az $(Y_k)_{k \in K}$ lefedést *durvábbnak* nevezzük, mint az $(X_j)_{j \in J}$ lefedést. Egy $(P_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$ nemüres attribútumhalmaz-rendszert *koherensnek* nevezzük, ha az $\text{Ind}(P_i)$ ekvivalenciarelációk ($i \in \{1, \dots, n\}$) teljesítik a $(\star)$ feltételt.

2.28. Lemma. *Az A attribútumhalmazra vonatkozó $P_i \subseteq A$, $P_i \neq \emptyset$, $i \in \{1, \dots, n\}$ rendszer koherens, ha bármely $x \in U$ esetén létezik olyan $i_x \in \{1, \dots, n\}$ index, amire $\text{Ind}(P)(x) = \text{Ind}(P_{i_x})(x)$, ahol $P = \bigcup_{i=1}^n P_i$.*

Bizonyítás. Mivel $P_i \subseteq P$ minden $i \in \{1, \dots, n\}$ esetén, ezért $\text{Ind}(P) \subseteq \text{Ind}(P_i)$ teljesül minden $i \in \{1, \dots, n\}$ esetén. Legyen $x \in U$ tetszőleges. Tegyük fel,

hogy létezik olyan $i_x \in \{1, \dots, n\}$, amire $\text{Ind}(P_{i(x)})(x) = \text{Ind}(P)(x)$. Ekkor $\text{Ind}(P_{i(x)})(x) \subseteq \text{Ind}(P_i)(x)$ fennáll minden $i \in \{1, \dots, n\}$ esetén, és így a $(\star)$ feltétel teljesül az $\text{Ind}(P_i)$, $i \in \{1, \dots, n\}$ ekvivalenciákra. Ezért $(P_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$ egy koherens attribútumhalmaz-rendszer.

Fordítva, tegyük fel, hogy $(P_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$ egy koherens rendszer. Ekkor bármely $x \in U$ esetén létezik olyan $i_x \in \{1, \dots, n\}$, amire $\text{Ind}(P_{i(x)})(x) \subseteq \text{Ind}(P_j)(x)$ minden $j \in \{1, \dots, n\}$ esetén. Ekkor

$$\text{Ind}(P_{i(x)})(x) \subseteq \bigcap_{j=1}^n \text{Ind}(P_j)(x) = \left(\bigcap_{j=1}^n \text{Ind}(P_j) \right)(x).$$

Mivel $\bigcap_{j=1}^n \text{Ind}(P_j) = \text{Ind}(P)$, ebből következik, hogy

$$\text{Ind}(P_{i(x)})(x) \subseteq \text{Ind}(P)(x).$$

Ekkor $\text{Ind}(P) \subseteq \text{Ind}(P_{i(x)})$ miatt $\text{Ind}(P)(x) \subseteq \text{Ind}(P_{i(x)})(x)$, tehát $\text{Ind}(P)(x) = \text{Ind}(P_{i(x)})(x)$. $\square$

2.29. Állítás. Legyen $\mathcal{S} = (U, A, (V_a)_{a \in A})$ egy információs rendszer és legyen $P_i \subseteq A$, $P_i \neq \emptyset$, $i \in \{1, \dots, n\}$ egy koherens attribútumhalmaz-rendszer, valamint $P = \bigcup_{i=1}^n P_i$. Ekkor a következő állítások igazak:

(i) Ha $P = \bigcup_{j=1}^m Q_j$ egy durvább lefedése P -nek, mint $(P_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$, akkor $(Q_j)_{j \in \{1, \dots, m\}}$ is koherens rendszer.

(ii) Ha $(R_k)_{k \in \{1, \dots, p\}}$ egy koherens attribútumhalmaz-rendszer és $P_1 = \bigcup_{k=1}^p R_k$, akkor a $\{R_1, R_2, \dots, R_p, P_2, \dots, P_n\}$ rendszer is koherens.

Bizonyítás. (i) Legyen $x \in U$ tetszőleges. Mivel $(P_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$ koherens rendszer, így a Lemma 2.28. alapján létezik olyan $i_x \in \{1, \dots, n\}$, amire $\text{Ind}(P)(x) = \text{Ind}(P_{i_x})(x)$. A $(Q_j)_{1 \leq j \leq m}$ egy durvább lefedése P -nek, így létezik olyan $j_x \in \{1, \dots, m\}$, amire $P_{i_x} \subseteq Q_{j_x} \subseteq P$. Ekkor $\text{Ind}(P)(x) \subseteq \text{Ind}(Q_{j_x})(x) \subseteq \text{Ind}(P_{i_x})(x) = \text{Ind}(P)(x)$. Ez bizonyítja, hogy $\text{Ind}(P)(x) = \text{Ind}(Q_{j_x})(x)$, és a Lemma 2.28. alapján ez azt jelenti, hogy $(Q_j)_{j \in \{1, \dots, m\}}$ is koherens rendszer.

(ii) Annak igazolásához, hogy $\{R_1, R_2, \dots, R_p, P_2, \dots, P_n\}$ koherens rendszer, elég egy tetszőleges olyan $x \in U$ elemet vizsgálni, ami rendelkezik a tulajdonsággal, hogy $\text{Ind}(P)(x) = \text{Ind}(P_1)(x)$. Mivel $P_1 = \bigcup_{k=1}^p R_k$, és $(R_k)_{k \in \{1, \dots, p\}}$ koherens rendszer, a Lemma 2.28. alapján $\text{Ind}(P_1)(x) = \text{Ind}(R_{k_x})(x)$ valamely megfelelő $k_x \in \{1, \dots, p\}$ értékre. Ekkor $\text{Ind}(P)(x) = \text{Ind}(R_{k_x})(x)$, és mivel $P = \left(\bigcup_{k=1}^p R_k \right) \cup P_2 \cup \dots \cup P_n$ teljesül, $\{R_1, R_2, \dots, R_p, P_2, \dots, P_n\}$ koherens rendszer. $\square$

2.30. Következmény. Legyen $P_i \subseteq A$, $P_i \neq \emptyset$, $i \in \{1, \dots, n\}$ egy koherens attribútumhalmaz-rendszer ($n \geq 2$), és legyen $P = \bigcup_{i=1}^n P_i$. Ekkor léteznek a $Q_1, Q_2 \subseteq A$ halmazok úgy, hogy $P = Q_1 \cup Q_2$ és $\{Q_1, Q_2\}$ egy koherens rendszer.

Bizonyítás. Legyen $Q_1 = \bigcup_{i=1}^{n-1} P_i$ és $Q_2 = P_n$. Ekkor nyilvánvalóan $P = Q_1 \cup Q_2$, valamint $\emptyset \neq Q_1 \subseteq A$, $\emptyset \neq Q_2 \subseteq A$. Mivel $\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ egy finomabb lefedése P -nek, mint $\{Q_1, Q_2\}$, a 2.29(i) állítás alapján következik, hogy a rendszer $\{Q_1, Q_2\}$ koherens. $\square$

2.5.2. Alkalmazás az ajánlórendszerek területén

Az ajánlórendszerek olyan szoftvereszközök, amelyek a rendelkezésre álló kínálatból a felhasználók egyéni preferenciái alapján segítenek a legmegfelelőbb elemek, szolgáltatások vagy személyek kiválasztásában [90]. Az ajánlórendszerek feladata, hogy a felhasználók profilja és előzményei alapján számukra érdekes elemeket válasszanak ki. Az előzmények tartalmazhatnak a felhasználó által adott explicit értékeléseket, de tartalmazhatnak korábban kiválasztott elemeket is. A rendszer minden egyes elemhez egy relevanciaértéket számol a felhasználó számára, majd visszaad neki egy listát a legmagasabb relevanciaértékű elemekkel. Az ajánlórendszerek alkalmazásának széles körű áttekintése megtalálható a [72] publikációban.

2.31. Példa. A ritkasság (szórványosság) problémája kulcsfontosságú a hatékony ajánlórendszerek fejlesztésében. A problémát az okozza, hogy a rendszer betanításához nem áll rendelkezésre elegendő adat a felhasználókról, az elemekről és az értékelésekről. A szórványosság hatásának csökkentésére a következő megközelítések léteznek:

- *Dimenziócsökkentés (PCA, SVD,...): az irreleváns attribútumok kiszűrésére a jellemzők vektorterében;*
- *Klaszterezési technikák: az egyes objektumokat klaszterekkel helyettesítik az objektumtér méretének csökkentése érdekében;*
- *A kapcsolatok, összefüggések bővítése új, származtatott elemekkel a tranzitivitási szabály alapján.*

Ebben a példában a durvahalmaz-módszert alkalmazzuk a szórványos adatok közvetlen kezelésére. Egy filmajánlórendszert veszünk, ahol nem rendelkezünk részletes profilvektorral a felhasználókról, így csak egy megközelítő jellemzővektor használható az objektumok közötti hasonlóság kiszámítására. Ez a kollaboratív szűrés egy speciális esete minimális felhasználói információval (ld.

például [90], [110]). Egy filmekhez kapcsolódó kollaboratív szűrési technikát bemutat [93].

A kapcsolódó hiányos információs rendszer a következőképpen definiálható:

- Az U objektumhalmaz egy véges filmhalmaz;
- az $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ attribútumhalmaz a felhasználóknak felel meg;
- az $a_i(u)$ attribútumérték jelenti az $u \in U$ film értékelését;
- a filmértékelések a $V = \{0, 1, *\}$ véges halmazból származnak, és $V_a = V$, $\forall a \in A$.
- Minden $a \in A$ felhasználó és bármely $u \in U$ film esetén a következő esetek lehetségesek:

$$a(u) = \begin{cases} 1, & \text{ha az } a \text{ felhasználó kedveli az } u \text{ filmet;} \\ 0, & \text{ha az } a \text{ felhasználó nem kedveli az } u \text{ filmet;} \\ *, & \text{ha az } a \text{ felhasználó számára az } u \text{ film ismeretlen.} \end{cases}$$

Minden $a_i \in A$ felhasználóhoz definiálhatunk egy ekvivalenciarelációt:

$$R_i := \{(x, y) \in U^2 \mid a_i(x) = a_i(y) = 1\} \cup \{(x, x) \mid x \in U\}.$$

A szokásos módon $R_i(x)$ jelöli az R_i -ekvivalenciaosztályt egy adott $x \in U$ film esetén. Feltételezhetjük, hogy minden $a \in A$ felhasználó osztályoz egy kis méretű filmhalmazt aszerint, hogy kedveli-e vagy sem – így minden felhasználónál a legnagyobb méretű kategória az ismeretlen. Az ajánlórendszer a következőképpen működik. Először az ügyfél (egy új felhasználó) megad egy $S \subseteq U$ részhalmazt az általa ismert és kedvelt filmekből. Az algoritmus ehhez meghatároz egy C halmazt, más felhasználók multigranuláris kategorizálása alapján. Mivel az ügyfél olyan elemek iránt érdeklődik, amelyeknek az értékelése megegyezik a bemutatott csoportéval, a következő kapcsolódó közelítő operátort használjuk:

$$C = S^{\cup R_i} = \{x \in U \mid (R_1(x) \cap S \neq \emptyset) \text{ vagy } \dots \text{ vagy } (R_n(x) \cap S \neq \emptyset)\}.$$

Továbbá vizsgálhatjuk ugyanezt akár egy felhasználói csoport (ügyfelek) esetén is vizsgálhatjuk. Legyen k a figyelembe vett felhasználók száma. Mind-egyikük megad egy $S_j \subseteq U, j \in \{1, \dots, k\}$ részhalmazt a kedvelt filmekből. Legyen $C_j := S_j^{\cup R_i}$. Ekkor a csoport preferenciái alapján ajánlott filmek halmaza:

$$C = (S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_k)^{\cup R_i} = S_1^{\cup R_i} \cup S_2^{\cup R_i} \cup \dots \cup S_k^{\cup R_i} = \bigcup_{j=1}^k S_j^{\cup R_i} = \bigcup_{j=1}^k C_j.$$

2.32. Példa. *A következő példában a vizsgált tartomány a legjobb jelöltek halmaza egy előzetes kiválasztás és egy szakértői csapat javaslatai alapján. A megfelelő információs rendszer a következőképpen definiálható:*

- Az U alaphalmaz a jelöltek egy (véges) halmaza;
- az $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ attribútumhalmaz a szakértőknek felel meg;
- az $a_i(x)$ attribútumérték egy $x \in U$ jelölt kategóriaértékelését jelenti;
- létezik egy véges kategóriahalmaz V , és $V_a = V, \forall a \in A$.

Minden $a_i, i \in \{1, \dots, n\}$ szakértő esetén egy ekvivalenciarelációt definiálunk az U alaphalmazon:

$$P_i := \{(x, y) \in U^2 \mid a_i(x) = a_i(y)\}$$

A bemenet egy $S \neq \emptyset$ jelölthalmaz, amelyet egy korábbi, a szakértőktől független folyamat során választottak ki. Az algoritmus előállítja a legjobb $C \subseteq S$ részhalmazt a szakértők véleménye alapján. Ez történhet egy megengedő (optimista) vagy egy szigorú (pesszimista) alsó közelítő operátor segítségével:

$$C = S_{\sum P_i} \text{ vagy } C = S_{\cup P_i}.$$

3. FUZZY DURVA HALMAZOK ÉLES REFERENCIA-HALMAZZAL

Amióta Zdzisław Pawlak bevezette a durva halmazok elméletét, már többféle megközelítést is javasoltak a durva halmazok és a fuzzy halmazok elméletének kombinálására. Ebben a fejezetben ezek közül az egyikvizsgálatom az egyiket, mégpedig a fuzzy durva halmazokat éles referenciahalmazokkal, hálóelméleti szempontból. Rávilágítok a kapcsolatra egy R fuzzy reláció alsó és felső közelítései, valamint R magjának és tartójának közelítései között. Megmutatom továbbá, hogy milyen kapcsolat van az R fuzzy hasonlósági reláció által meghatározott fuzzy durva halmazok hálója és az E (éles) ekvivalenciarelációhoz tartozó durva halmazok hálója között, ahol E az R magja. Továbbá megállapítom az összefüggést R egzakt (fuzzy) halmazai és R tartójának egzakt (éles) halmazai között is.

A fuzzy halmazok és a durva halmazok fogalma egyaránt kiterjesztik, általánosítják a hagyományos (éles) halmazok fogalmát – azt figyelembe véve, hogy tudásunk bizonytalan vagy hiányos lehet. A két megközelítés azonban eltérő módon kezeli a tökéletlen információ problémáját.

A két elmélet közötti kapcsolatot elemző egyik úttörő munka a [83] cikk, amiben Pawlak megmutatta, hogy lényeges különbségek vannak a két megközelítés között. Az első integrációs kísérlet Dubois és Prade munkájához [24] kapcsolódik. A fuzzy halmazok alsó és felső közelítéseit itt a minimum t -normával és a maximum t -konormával definiálták. Yao [125] szimbolikus jelölését használva a Γ fuzzy referenciahalmazhoz tartozó *fuzzy durva halmazt* az alábbiak szerint definiáljuk:

$$\begin{aligned}\mu_{\underline{apr}_{\mathcal{R}}}(\Gamma)(x) &= \inf\{\max[\mu_{\Gamma}(y), 1 - \mu_{\mathcal{R}}(x, y)] \mid y \in U\}, \\ \mu_{\overline{apr}_{\mathcal{R}}}(\Gamma)(x) &= \sup\{\min[\mu_{\Gamma}(y), \mu_{\mathcal{R}}(x, y)] \mid y \in U\},\end{aligned}$$

ahol U az alaphalmaz, $\mathcal{R}$ pedig egy fuzzy hasonlósági reláció. A definíció értelmében a *fuzzy durva halmazok* esetén az alsó és felső közelítés egyaránt fuzzy halmaz. Mivel az éles halmazokat tekinthetjük a fuzzy halmazok speciális esetének (ahol a tagsági függvény csak 0 vagy 1 lehet), a definíció arra is alkalmas, hogy éles referenciahalmazokhoz adjunk meg fuzzy durva halmazt. A két megközelítés összehasonlítását [53] is feldolgozza.

Más általánosítási irányok mellett – mint például Nanda és Majumdar munkája [78] – többféle integrációs javaslat is született. A [9] cikk megmutatta, hogy a fuzzy durva halmazok lényegében az Atanassov által kidolgozott intuicionista L -fuzzy halmazoknak [1] felelnek meg. A t -normák segítségével definiált fuzzy hasonlósági relációk által kialakított approximációs környezettel egy még általánosabb keretrendszer kaphatunk, ld. például [7] vagy [75]. A [7] cikkben egy megkülönböztethetlenségi operátorra vonatkozóan vizsgálják egy fuzzy részhalmaz alsó és felső közelítéseit, és rámutatnak a fuzzy durva halmazokkal való kapcsolatra. A [75] publikációban pedig kifejlesztettek egy axiomatikus megközelítést: a t -norma által meghatározott fuzzy

hasonlósági relációkat felhasználva a fuzzy durva halmazok az alsó és felső approximációs operátorát néhány axiomatikus tulajdonságra építve általánosítják.

Yao [125] integrációs javaslata azon az elképzelésen alapul, hogy egy fuzzy halmaz reprezentálható egy éles halmazcsaláddal az α -vágatai által, egy durva halmaz pedig három éles halmazzal reprezentálható. Yao elemezte a durva fuzzy és fuzzy durva modellek kapcsolatát, és bizonyította, hogy a durva fuzzy halmazok a Dubois és Prade-féle fuzzy durva halmazok speciális esetei. A [125] másik eredménye, hogy ugyanazon séma szerint egységesen ki lehet számítani a durva halmazok, durva fuzzy halmazok és fuzzy durva halmazok tagsági függvényeit:

$$\mu_{\underline{apr}_\Gamma(\Delta)}(x) := \inf \{ \max [\mu_\Delta(y), 1 - \mu_\Gamma(x, y)] \mid y \in U \},$$

$$\mu_{\overline{apr}_\Gamma(\Delta)}(x) := \sup \{ \min [\mu_\Delta(y), \mu_\Gamma(x, y)] \mid y \in U \},$$

ahol Γ lehet egy ekvivalenciareláció vagy egy fuzzy hasonlósági reláció, míg Δ lehet éles vagy fuzzy halmaz. Az általánosabb eset tulajdonságait [14] vizsgálja, ahol a referenciahalmaz fuzzy, a fuzzy approximációs tér pedig egy t -normából származtatott. A cikk egy alkalmazási lehetőséget is bemutat a keresési lekérdezések finomítására.

A fuzzy durva halmazok egyik fő alkalmazási területe a tudástechnológiai algoritmusok optimalizálásához kapcsolódik. Az adat-előkészítés fázisában a fuzzy durva halmazmodelleket elsősorban redukcióra használják [18], [60]. Ennek a megközelítésnek az előnye, hogy a fuzzy durva jellemzőkiválasztás megőrzi a jellemzők szemantikus jelentését a redundáns attribútumok eltávolítása után. A módszer az attribútumhalmaz elemei közötti függőségeket tárja fel. A fuzzy durva halmazmodellek általános adatbányászati műveletekre is használhatók, például klaszterezéshez vagy osztályozáshoz bizonytalan bemeneti tartományok esetén [122].

Jelen fejezet középpontjában olyan fuzzy durva halmazok állnak, ahol az approximációs tér fuzzy, de a referenciahalmaz éles. Ezek fontos modellezési eszközök a gépi tanulásban, például természetes nyelvfeldolgozásban, ahol a referenciahalmazok éles jellemzővektorokat tartalmaznak, és ezekhez rendelünk fuzzy fogalomkategóriákat (ld. például [58] és [36]). A továbbiakban a fuzzy durva halmazok hálóelméleti tulajdonságait vizsgálom, és összehasonlítom azokat a hagyományos durva halmazokkal. Megmutatom, hogy éles referenciahalmazok esetén az R fuzzy hasonlósági reláció által meghatározott fuzzy durva halmazok hálójá izomorf az E (éles) ekvivalenciarelációhoz tartozó durva halmazok hálójával, ahol E az R magja, ami pedig az irodalomban alaposan vizsgált struktúra.

Legyen (U, R) egy fuzzy approximációs tér, ahol U az alaphalmaz, és R egy fuzzy hasonlósági reláció, amelyet egy $\mu_R : U^2 \rightarrow [0, 1]$ tagsági függvény

határozz meg. Legyen továbbá $A \subseteq U$ egy éles halmaz. Az A *referenciahalmazhoz tartozó fuzzy durva halmaz* egy párként definiálható, ami két fuzzy halmazból áll [125]. Az A alsó approximációját az alábbi tagsági függvény adja meg:

$$\mu_{[A]_R}(x) = \inf\{1 - \mu_R(x, y) \mid y \notin A\},$$

míg az A felső approximációját a következő tagsági függvény határozza meg:

$$\mu_{[A]^R}(x) = \sup\{\mu_R(x, y) \mid y \in A\}.$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy $\mu_{[\emptyset]_R} = \mu_{[\emptyset]^R} = \mathbf{0}$, ahol $\mathbf{0}$ jelöli a konstans leképezést az U alaphalmazon, továbbá $\mu_{[U]_R} = \mu_{[U]^R} = \mathbf{1}$, ahol $\mathbf{1}$ jelöli a konstans 1 leképezést az U alaphalmazon. (Vegyük észre, hogy $\sup \emptyset = 0$, $\inf \emptyset = 1$, és $\mu_R(x, x) = 1$ minden $x \in U$ esetén.) Az éles A halmazhoz tartozó fuzzy durva halmaz a $(\mu_{[A]_R}, \mu_{[A]^R})$ párként definiálhatjuk. Tudjuk, hogy az (U, R) approximációs tér összes durva halmaza hálót alkot, amely számos érdekes tulajdonsággal bír (ld. például [92], [13], [26], [30]).

Legyen R egy fuzzy reláció a $\mu_R : U^2 \rightarrow [0, 1]$ tagsági függvénnyel. Az $S_R := \{\mu_R(x, y) \mid x, y \in U\} \subseteq [0, 1]$ halmazt R *spektumának* nevezzük. Azt mondjuk, hogy az R fuzzy relációnak *duálisan jólrendezett spektruma van*, ha S_R minden nemüres részhalmazának van legnagyobb eleme. Ez ekvivalens azzal a feltétellel, hogy minden $x \in U$ elem és minden $B \subseteq U$, $B \neq \emptyset$ éles halmaz esetén létezik olyan $m_x \in B$ elem, amelyre

$$\sup\{\mu_R(x, y) \mid y \in B\} = \max\{\mu_R(x, y) \mid y \in B\} = \mu_R(x, m_x).$$

Vegyük észre, hogy ez teljesül, ha S_R véges halmaz. Ha R -nek duálisan jólrendezett spektruma van, akkor minden nemüres $A \subseteq U$ éles halmaz esetén

$$\mu_{[A]_R}(x) = 1 - \max\{\mu_R(x, y) \mid y \notin A\},$$

$$\mu_{[A]^R}(x) = \max\{\mu_R(x, y) \mid y \in A\}.$$

Véges (éles) halmazok esetén hasonló megközelítés található a [116] munkában döntési táblázatok döntési attribútumaira, annak érdekében, hogy a fuzzy durva halmazokhoz távolságmértéket vezessenek be. Jelöljük a $(\mu_{[A]_R}, \mu_{[A]^R})$ fuzzy durva halmazok összességét $\mathcal{RS}(U, R)$ -rel, azaz legyen

$$\mathcal{RS}(U, R) := \{(\mu_{[A]_R}, \mu_{[A]^R}) \mid A \subseteq U\}.$$

A $\mathcal{RS}(U, R)$ elemei komponensenként rendezhetők az alábbi módon:

$$\begin{aligned} & (\mu_{[A]_R}, \mu_{[A]^R}) \leq (\mu_{[B]_R}, \mu_{[B]^R}) \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \mu_{[A]_R}(x) \leq \mu_{[B]_R}(x) \text{ és } \mu_{[A]^R}(x) \leq \mu_{[B]^R}(x), \text{ minden } x \in U \text{ esetén,} \end{aligned}$$

ezáltal egy $(\mathcal{RS}(U, R), \leq)$ részbenrendezett halmazt kapunk, aminek a legkisebb eleme $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$, a legnagyobb eleme pedig $(\mathbf{1}, \mathbf{1})$. Be fogjuk látni, hogy ha R egy fuzzy hasonlósági reláció duálisan jólrendezett spektrummal, akkor ez a részbenrendezett halmaz teljes hálót alkot.

Bármely $\alpha \in [0, 1]$ szám esetén az

$$R_\alpha := \{(x, y) \in U^2 \mid \mu_R(x, y) \geq \alpha\}$$

éles relációt az R fuzzy reláció α -vágatának (α -szintjének, α -szeletének) nevezzük. Mivel R fuzzy hasonlóság (hasonlóság), így R_α egy éles ekvivalenciareláció minden $\alpha \in [0, 1]$ esetén. Jelölje E az R_1 éles ekvivalenciarelációt, azaz legyen

$$E := \{(x, y) \in U^2 \mid \mu_R(x, y) = 1\}.$$

Az $x \in U$ elemhez tartozó E -ekvivalenciaosztályt $[x]_E$ -vel jelöljük, azaz

$$[x]_E = \{y \in U \mid (x, y) \in E\} = \{y \in U \mid \mu_R(x, y) = 1\}.$$

Az alábbi lemma jól ismert az irodalomban, ld. például [103]:

3.1. Lemma. *Bármely $y \in [x]_E$ és $z \in U$ esetén fennáll, hogy $\mu_R(z, x) = \mu_R(z, y)$.*

Legyen S a μ_R hozzárendeléssel adott R fuzzy hasonlósági reláció tartóhalmaza, azaz

$$S = \{(x, y) \in U^2 \mid \mu_R(x, y) > 0\},$$

és definiáljuk az $S(z) = \{y \in U \mid (z, y) \in S\}$ halmazt, ahol U az R alaphalmaza és $z \in U$ tetszőleges elem. Nyilvánvaló, hogy az S bináris reláció reflexív és szimmetrikus, valamint teljesül, hogy $S(z) = \{y \in U \mid \mu_R(z, y) > 0\} \neq \emptyset$, minden $z \in U$ esetén.

Tegyük fel továbbá, hogy $\mathcal{T}$ egy pozitív t -norma, és legyen $(x, y) \in S$ és $(y, z) \in S$ tetszőleges $x, y, z \in U$ esetén. Ez azt jelenti, hogy $\mu_R(x, y) > 0$ és $\mu_R(y, z) > 0$. Ha R egy $\mathcal{T}$ -hasonlóság, akkor következik, hogy: $\mu_R(x, z) \geq \mathcal{T}(\mu_R(x, y), \mu_R(y, z)) > 0$. Ebből adódik, hogy $\mu_R(x, z) > 0$, vagyis $(x, z) \in S$, tehát S ekvivalenciareláció. A korábbiakhoz hasonlóan az $x \in U$ elem S -ekvivalenciaosztályát $[x]_S$ jelöli, és nyilvánvaló, hogy $S(x) = [x]_S$.

A fent definiált $E \subseteq U \times U$ és $S \subseteq U \times U$ éles relációk segítségével bármely $A \subseteq U$ referencialhalmazhoz hozzárendelhetünk (éles) durva halmazokat, az alsó és felső közelítésük meghatározásával E vagy S szerint:

$$A_E = \{x \in U \mid [x]_E \subseteq A\}, \quad A^E = \{x \in U \mid [x]_E \cap A \neq \emptyset\},$$

$$A_S = \{x \in U \mid S(x) \subseteq A\}, \quad A^S = \{x \in U \mid S(x) \cap A \neq \emptyset\}.$$

3.2. Lemma. *Bármely $A \subseteq U$ halmazra teljesül, hogy*

$$(i) \quad A^E = \{x \in U \mid \mu_{[A]^R}(x) = 1\},$$

$$(ii) \quad A_E = \{x \in U \mid \mu_{[A]^R}(x) > 0\},$$

$$(iii) A^S = \{x \in U \mid \mu_{[A]_R}(x) > 0\},$$

$$(iv) A_S = \{x \in U \mid \mu_{[A]_R}(x) = 1\}.$$

Más szavakkal, az (i) és (ii) állítások szerint az A^E halmaz a $\mu_{[A]_R}$ fuzzy halmaz magjával, míg A_E a $\mu_{[A]_R}$ fuzzy halmaz tartójával egyenlő. Hasonlóan, a (iii) és (iv) állítások szerint A^S a $\mu_{[A]_R}$ fuzzy halmaz tartójával, míg A_S a $\mu_{[A]_R}$ fuzzy halmaz magjával egyenlő.

Bizonyítás. (i) Ha $x \in A^E$, akkor létezik olyan $y \in A$, amelyre $(x, y) \in E$, azaz $\mu_R(x, y) = 1$. Ekkor $\mu_{[A]_R}(x) = \sup\{\mu_R(x, y) \mid y \in A\} = 1$. Fordítva, tegyük fel, hogy $\mu_{[A]_R}(x) = 1$ valamely $x \in U$ esetén. Mivel R spektruma duálisan jólrendezett, ez azt jelenti, hogy $\max\{\mu_R(x, y) \mid y \in A\} = 1$, azaz létezik $y_x \in A$, amelyre $\mu_R(x, y_x) = 1$. Ekkor $(x, y_x) \in E$, így $[x]_E \cap A \neq \emptyset$, vagyis $x \in A^E$.

(ii) Ha $x \in A_E$, akkor $[x]_E \subseteq A$. Ez azt jelenti, hogy nem létezik olyan $y \notin A$, amelyre $(x, y) \in E$, azaz amelyre $\mu_R(x, y) = 1$. Mivel R spektruma duálisan jólrendezett, a $\{\mu_R(x, y) \mid y \notin A\}$ halmaznak van (legalább egy) maximális eleme, jelöljük ezt $\mu_R(x, y_m)$ -mel, ahol $y_m \notin A$. Ekkor $\mu_R(x, y_m) < 1$, így adódik, hogy $\mu_{[A]_R}(x) = 1 - \max\{\mu_R(x, y) \mid y \notin A\} = 1 - \mu_R(x, y_m) > 0$. Fordítva, tegyük fel, hogy $\mu_{[A]_R}(x) > 0$ valamely $x \in U$ esetén. Ekkor bármely $y \notin A$ esetén $1 - \mu_R(x, y) \geq \inf\{1 - \mu_R(x, y) \mid y \notin A\} = \mu_{[A]_R}(x) > 0$. Ez azt jelenti, hogy $\mu_R(x, y) < 1$ minden $y \notin A$ esetén. Így nem létezik olyan $y \notin A$, amelyre $\mu_R(x, y) = 1$, azaz amelyre $(x, y) \in E$. Ebből következik, hogy $[x]_E \subseteq A$, tehát $x \in A_E$.

(iii) Tegyük fel, hogy $x \in A^S$. Ez csak akkor lehetséges, ha létezik $y_m \in A$, amelyre $\mu_R(x, y_m) > 0$. Ekkor $\mu_{[A]_R}(x) = \sup\{\mu_R(x, y) \mid y \in A\} \geq \mu_R(x, y_m) > 0$, vagyis x benne van $\mu_{[A]_R}$ tartójában. Fordítva, ha x benne van $\mu_{[A]_R}$ tartójában, akkor $\mu_{[A]_R}(x) = \sup\{\mu_R(x, y) \mid y \in A\} > 0$. Ez csak úgy lehetséges, ha létezik $y_m \in A$, amelyre $\mu_R(x, y_m) > 0$, ami azt jelenti, hogy $x \in A^S$.

(iv) Legyen $x \in A_S$, azaz $S(x) \subseteq A$. Ekkor S definíciója szerint minden $y \notin A$ esetén $\mu_R(x, y) = 0$. Így $\mu_{[A]_R}(x) = \inf\{1 - \mu_R(x, y) \mid y \notin A\} = 1 - 0 = 1$, azaz x benne van $\mu_{[A]_R}(x)$ magjában. A fordított implikáció, miszerint $S(x) \subseteq A$ teljesül, ha x benne van $\mu_{[A]_R}(x)$ magjában, könnyen ellenőrizhető. $\square$

A következő állítás tartalma implicit módon megtalálható a [14] műben. Valójában az alábbi megfigyelésen alapul:

Ha adott E és R két fuzzy (vagy éles) ekvivalenciareláció, ahol $E \subseteq R$, akkor ha először kiszámítjuk egy μ fuzzy (vagy éles) halmaz felső közelítését E szerint, majd az így kapott fuzzy halmaz felső közelítését R szerint, akkor

megkapjuk μ felső közelítését R szerint. Hasonlóan járunk el az alsó közelítések esetén is (ld. [53]).

3.3. Állítás. *Legyen R egy fuzzy $\mathcal{T}$ -hasonlóság U -n, amelynek spektruma duálisan jólrendezett, és legyen $E := \{(x, y) \in U^2 \mid \mu_R(x, y) = 1\}$. Ekkor bármely $A \subseteq U$ esetén fennáll, hogy*

$$\mu_{[A]^R} = \mu_{[A^E]^R} \text{ és } \mu_{[A]_R} = \mu_{[A^E]_R}.$$

3.1. Teljesen disztributív reguláris dupla Stone-háló tulajdonság szükséges és elégséges feltétele

A továbbiakban a szokásos módon $(\mathcal{RS}(U, E), \leq)$ jelöli az E ekvivalenciareláció által meghatározott durva halmazok hálóját.

3.4. Tétel. *Legyen R egy fuzzy $\mathcal{T}$ -ekvivalencia U -n, duálisan jólrendezett spektrummal. Ekkor $(\mathcal{RS}(U, R), \leq)$ egy teljes háló, ami izomorf $(\mathcal{RS}(U, E), \leq)$ -vel.*

Bizonyítás. Minden $(A_E, A^E) \in \mathcal{RS}(U, E)$ éles durva halmazhoz hozzárendeljük az A éles halmazhoz tartozó fuzzy durva halmazt, azaz a $(\mu_{[A]_R}, \mu_{[A]^R})$ párt. Vegyük észre, hogy az $f: \mathcal{RS}(U, E) \rightarrow \mathcal{RS}(U, R)$,

$$f((A_E, A^E)) = (\mu_{[A]_R}, \mu_{[A]^R}), \text{ ahol } (A_E, A^E) \in \mathcal{RS}(U, E),$$

függvény jól definiált, mert ha $(A_E, A^E) = (B_E, B^E)$ valamely $A, B \subseteq U$ esetén, akkor $A_E = B_E$ és $A^E = B^E$, és így a 3.3. Állítás alapján következik, hogy

$$\begin{aligned} f((A_E, A^E)) &= (\mu_{[A]_R}, \mu_{[A]^R}) = (\mu_{[A_E]_R}, \mu_{[A^E]^R}) = \\ &= (\mu_{[B_E]_R}, \mu_{[B^E]^R}) = (\mu_{[B]_R}, \mu_{[B]^R}) = f((B_E, B^E)). \end{aligned}$$

Továbbá, f rendezésőrző, mert $(A_E, A^E) \leq (B_E, B^E)$ teljesülése esetén $A_E \subseteq B_E$ és $A^E \subseteq B^E$, ami miatt $\mu_{[A_E]_R} \leq \mu_{[B_E]_R}$ és $\mu_{[A^E]^R} \leq \mu_{[B^E]^R}$. Így:

$$f((A_E, A^E)) = (\mu_{[A_E]_R}, \mu_{[A^E]^R}) \leq (\mu_{[B_E]_R}, \mu_{[B^E]^R}) = f((B_E, B^E)).$$

Egyértelmű, hogy f szürjektív, mert minden $(\mu_{[X]_R}, \mu_{[X]^R}) \in \mathcal{RS}(U, R)$ esetén $X \subseteq U$ egy éles halmaz, tehát $f((X_E, X^E)) = (\mu_{[X]_R}, \mu_{[X]^R})$.

Ahhoz, hogy igazoljuk, hogy f egy rendezésizomorfizmus, elegendő belátni, hogy $f((A_E, A^E)) \leq f((B_E, B^E))$ esetén teljesül $(A_E, A^E) \leq (B_E, B^E)$ minden $(A_E, A^E), (B_E, B^E) \in \mathcal{RS}(U, E)$ esetén. Valóban, $f((A_E, A^E)) \leq f((B_E, B^E))$ azt jelenti, hogy $(\mu_{[A]_R}(x), \mu_{[A]^R}(x)) \leq (\mu_{[B]_R}(x), \mu_{[B]^R}(x))$ minden $x \in U$ esetén. Tehát:

$$A^E = \{x \in U \mid \mu_{[A]^R}(x) = 1\} \subseteq \{x \in U \mid \mu_{[B]^R}(x) = 1\} = B^E, \text{ és}$$

$$A_E = \{x \in U \mid \mu_{[A]_R}(x) > 0\} \subseteq \{x \in U \mid \mu_{[B]_R}(x) > 0\} = B_E.$$

Tehát $(A_E, A^E) \leq (B_E, B^E)$, így f valóban egy rendezésizomorfizmus. Mivel $(\mathcal{RS}(U, E), \leq)$ egy teljes háló, így $(\mathcal{RS}(U, R), \leq)$ is egy teljes háló, ami izomorf $(\mathcal{RS}(U, E), \leq)$ -vel. $\square$

Azonnali következményként, [92] [13] [30] alapján, kapjuk az alábbi állítást:

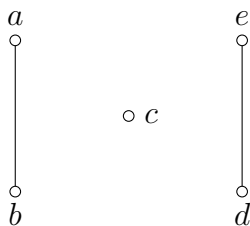
3.5. Következmény. *Ha R egy fuzzy hasonlóság az U halmazon, amelynek spektruma duálisan jólrendezett, akkor $(\mathcal{RS}(U, R), \leq)$ egy teljesen disztributív reguláris dupla Stone-háló.*

Bizonyítás. Ismert, hogy a durva halmazok hálójá, $(\mathcal{RS}(U, E), \leq)$ egy teljesen disztributív reguláris dupla Stone-háló. Ezért az állítás közvetlenül adódik az 3.4. Tételben bizonyított izomorfizmus alkalmazásával. $\square$

3.6. Példa. *Legyen az alaphalmaz $U = \{a, b, c, d, e\}$, az R fuzzy hasonlósági reláció pedig legyen az 3.1. táblázat szerint adott. Az ennek megfelelő $E = \{(x, y) \in U^2 \mid \mu_R(x, y) = 1\}$ reláció a 3.1. ábrán látható (az egyszerűség kedvéért a hurokélek nincsenek feltüntetve). A 3.2. táblázat mutatja az R fuzzy hasonlósági reláció és az E (éles) ekvivalenciareláció alsó és felső közelítéseit. A 3.2. ábra a $(\mathcal{RS}(U, R), \leq)$ háló Hasse-diagramját ábrázolja. Itt a csomópontok táblázatokként szerepelnek, ahol a felső sor az R felső közelítésének tagsági függvényértékét, az alsó sor pedig az R alsó közelítésének tagsági függvényértékét mutatja rendre az $a, b, c, d, e \in U$ elemekre.*

R	a	b	c	d	e
a	1	1	0.5	0	0
b	1	1	0.5	0	0
c	0.5	0.5	1	0	0
d	0	0	0	1	1
e	0	0	0	1	1

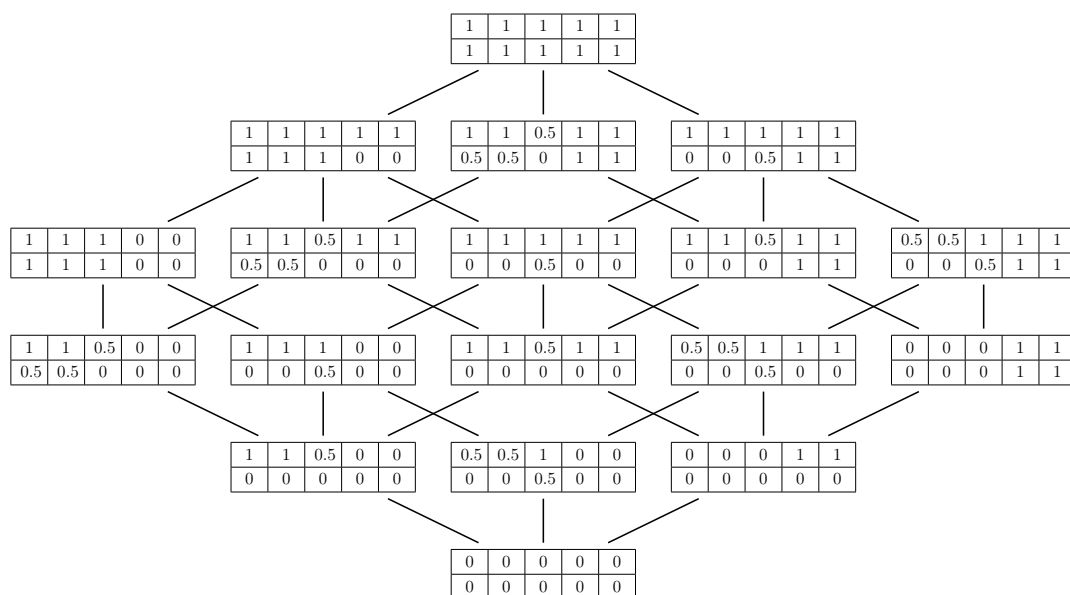
3.1. táblázat. Példa egy R fuzzy hasonlósági relációra.



3.1. ábra. Az R fuzzy relációhoz tartozó E ekvivalenciareláció.

A	A_E	A^E	$\mu_{[A]_R}(x)$					$\mu_{[A]^R}(x)$				
			a	b	c	d	e	a	b	c	d	e
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
a	$\emptyset$	ab	0	0	0	0	0	1	1	0.5	0	0
b	$\emptyset$	ab	0	0	0	0	0	1	1	0.5	0	0
c	c	c	0	0	0.5	0	0	0.5	0.5	1	0	0
d	$\emptyset$	de	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
e	$\emptyset$	de	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
ab	ab	ab	0.5	0.5	0	0	0	1	1	0.5	0	0
ac	c	abc	0	0	0.5	0	0	1	1	1	0	0
ad	$\emptyset$	abde	0	0	0	0	0	1	1	0.5	1	1
ae	$\emptyset$	abde	0	0	0	0	0	1	1	0.5	1	1
bc	c	abc	0	0	0.5	0	0	1	1	1	0	0
bd	$\emptyset$	abde	0	0	0	0	0	1	1	0.5	1	1
be	$\emptyset$	abde	0	0	0	0	0	1	1	0.5	1	1
cd	c	cde	0	0	0.5	0	0	0.5	0.5	1	1	1
ce	c	cde	0	0	0.5	0	0	0.5	0.5	1	1	1
de	de	de	0	0	0	1	1	0	0	0	1	1
abc	abc	abc	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0
abd	ab	abde	0.5	0.5	0	0	0	1	1	0.5	1	1
abe	ab	abde	0.5	0.5	0	0	0	1	1	0.5	1	1
acd	c	U	0	0	0.5	0	0	1	1	1	1	1
ace	c	U	0	0	0.5	0	0	1	1	1	1	1
ade	de	abde	0	0	0	1	1	1	1	0.5	1	1
bcd	c	U	0	0	0.5	0	0	1	1	1	1	1
bce	c	U	0	0	0.5	0	0	1	1	1	1	1
bde	de	abde	0	0	0	1	1	1	1	0.5	1	1
cde	cde	cde	0	0	0.5	1	1	0.5	0.5	1	1	1
abcd	abc	U	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1
abce	abc	U	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1
abde	abde	abde	0.5	0.5	0	1	1	1	1	0.5	1	1
acde	cde	U	0	0	0.5	1	1	1	1	1	1	1
bcde	cde	U	0	0	0.5	1	1	1	1	1	1	1
U	U	U	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

3.2. táblázat. Az E ekvivalencia és az R fuzzy reláció által adott approximációk az U alaphalmazon.



3.2. ábra. Az $(\mathcal{RS}(U, R), \leq)$ háló a 3.6. Példa alapján.

3.2. Egzakt halmazok vizsgálata

Egy durva halmazt *egzaktnak* (*definiálhatónak*) nevezzük, ha az adott halmaz alsó és felső közelítése megegyezik. Ez a fogalom kiterjeszthető fuzzy durva halmazokra is: az U alaphalmazon értelmezett R fuzzy hasonlósági relációval meghatározott fuzzy durva halmaz akkor *egzakt*, ha minden $x \in U$ elemre teljesül, hogy $\mu_{[A]_R}(x) = \mu_{[A]^R}(x)$.

A következő állítás írja le az egzakt fuzzy durva halmazok és a fuzzy hasonlósági reláció tartóhalmaza közötti kapcsolatot (éles referenciahalmaz esetén).

3.7. Állítás. *Legyen A az U alaphalmaz egy (éles) részhalmaza. Ekkor*

$$\mu_{[A]_R}(x) = \mu_{[A]^R}(x) \text{ minden } x \in U \Leftrightarrow A_S = A^S.$$

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $x \in A_S = A^S = A$. Ez azt jelenti, hogy

$$\mu_{[A]^R}(x) = \sup\{\mu_R(x, y) \mid y \in A\} = \mu_R(x, x) = 1,$$

mivel R reflexív.

Most vizsgáljuk meg az alsó közelítést. Ha $y \notin A$, akkor $y \notin S(x)$ sem lehetséges, mert $S(x) \subseteq A$. Mivel $y \notin S(x)$, az S definíciója alapján következik, hogy $\mu_R(x, y) = 0$. Ez minden $y \notin A$ esetén igaz, így

$$\mu_{[A]_R}(x) = \inf\{1 - \mu_R(x, y) \mid y \notin A\} = 1.$$

Tehát ebben az esetben azt kaptuk, hogy $\mu_{[A]_R}(x) = \mu_{[A]^R}(x) = 1$.

Most tegyük fel, hogy $x \notin A_S = A^S = A$. Ekkor $\mu_R(x, y) = 0$ minden $y \in A$ esetén, és így

$$\mu_{[A]^R}(x) = \sup\{\mu_R(x, y) \mid y \in A\} = 0, \text{ és}$$

$$\mu_{[A]_R}(x) = \inf\{1 - \mu_R(x, y) \mid y \notin A\} = 1 - \mu_R(x, x) = 0.$$

Így ebben az esetben $\mu_{[A]_R}(x) = \mu_{[A]^R}(x) = 0$ adódik.

Tehát bebizonyítottuk, hogy ha $A_S = A^S$, akkor minden $x \in U$ elemre $\mu_{[A]_R}(x) = \mu_{[A]^R}(x)$.

Fordítva, tegyük fel, hogy $\mu_{[A]_R}(x) = \mu_{[A]^R}(x)$ minden $x \in U$ esetén. Legyen $x \in A$ tetszőleges. Ekkor

$$\sup\{\mu_R(x, y) \mid y \in A\} = \inf\{1 - \mu_R(x, y) \mid y \notin A\} = 1,$$

mivel $\mu_R(x, x) = 1$ és $\mu_R(x, y) \leq 1$ minden $y \in A$ esetén. Következik, hogy $\mu_R(x, y) = 0$ minden $y \notin A$ esetén, különben a jobb oldali infimum szigorúan kisebb lenne, mint 1.

Tegyük fel, hogy $(x, y) \in S$, azaz $y \in S(x)$. Ekkor $\mu_R(x, y) > 0$ az S definíciója szerint, tehát $y \notin A$ nem lehetséges. Így $y \in A$, amiből $x \in A_S$. Ebből következik, hogy $A = A_S$. Mivel $A^S = (A_S)^S \subseteq A$, ezért $A^S = A = A_S$ teljesül. $\square$

3.8. Példa. Legyen $U = \{a, b, c, d\}$, és legyen R egy fuzzy hasonlósági reláció a 3.3. táblázat szerint. A 3.4. táblázat azt a négy halmazt mutatja, amelyekre ez a reláció egzakt halmazokat eredményez.

R	a	b	c	d
a	1	1	0.3	0
b	1	1	0.3	0
c	0.3	0.3	1	0
d	0	0	0	1

3.3. táblázat. A példához tartozó R fuzzy hasonlósági reláció

A	$A_S = A^S$	$\mu_{[A]_R} = \mu_{[A]^R}$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\{(a, 0), (b, 0), (c, 0), (d, 0)\}$
$\{d\}$	$\{d\}$	$\{(a, 0), (b, 0), (c, 0), (d, 1)\}$
$\{a, b, c\}$	$\{a, b, c\}$	$\{(a, 1), (b, 1), (c, 1), (d, 0)\}$
$\{a, b, c, d\}$	$\{a, b, c, d\}$	$\{(a, 1), (b, 1), (c, 1), (d, 1)\}$

3.4. táblázat. A 3.3. táblázatban szereplő R reláció egzakt fuzzy halmazai.

Könnyen belátható, hogy egy A referenciahalmaz és annak fuzzy durva közelítései közötti tartalmazási kapcsolat hasonló a referenciahalmaz és éles durva közelítései közötti tartalmazási kapcsolathoz, nevezetesen:

$$\text{mag}(\mu_{[A]_R}) \subseteq \text{tartó}(\mu_{[A]_R}) \subseteq A \subseteq \text{mag}(\mu_{[A]^R}) \subseteq \text{tartó}(\mu_{[A]^R}).$$

3.9. Megjegyzés. Meg kell vitatnunk egy fontos egyszerű esetet is: amikor tökéletlen információval rendelkezünk, és bizonytalanok vagyunk a reláció felállításában. Ebben az egyszerű esetben két elem közötti kapcsolatnak három lehetősége van: az elemek biztosan kapcsolatban állnak; az elemek biztosan nem állnak kapcsolatban; az elemek kapcsolatban állhatnak, de bizonytalanok vagyunk. Ezt egy olyan R fuzzy relációval modellezhetjük, amelyre

$$\mu_R(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \text{ és } y \text{ biztosan kapcsolatban állnak} \\ 0, & \text{ha } x \text{ és } y \text{ biztosan nem állnak kapcsolatban} \\ \frac{1}{2}, & \text{ha } x \text{ és } y \text{ kapcsolatban állhatnak, de bizonytalanok vagyunk} \end{cases}.$$

Egyszerűen ellenőrizhető, hogy egy $A \subseteq U$ éles halmaz esetén az alsó és felső közelítések tagsági függvényei az alábbiak szerint adhatók meg:

$$(i) \quad \mu_{[A]_R}(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \notin A_E \\ \frac{1}{2}, & \text{ha } x \in A_E \setminus A_S, \\ 1, & \text{ha } x \in A_S \end{cases}$$

$$(ii) \quad \mu_{[A]^R}(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \notin A^S \\ \frac{1}{2}, & \text{ha } x \in A^S \setminus A^E. \\ 1, & \text{ha } x \in A^E \end{cases}$$

4. DURVA L -FUZZY HALMAZOK

A fuzzy halmazok elméletének és a durva halmazok elméletének egy másik kombinációját tárgyalom ebben a fejezetben, mégpedig a durva L -fuzzy halmazok modelljét. Bemutatok egy reprezentációs tételt, amely meghatározza, hogy mikor tekinthető egy L -fuzzy halmazpár durva L -fuzzy halmaznak, továbbá kapcsolatot létesítek a durva fuzzy halmazok hálójá és a durva relációk hálójá között. Ezenfelül vizsgálom a durva L -fuzzy halmazok hálójának tulajdonságait, és jellemzem azt az esetet, amikor háromértékű Łukasiewicz-algebra definiálható rajta. Az előző fejezettől eltérően a továbbiakban egy fuzzy halmazra csak a tagsági függvényével fogok hivatkozni, azokat a latin ábécé kisbetűivel fogom jelölni.

A durva fuzzy halmazok fogalmát Dubois és Prade vezette be [24]. Legyen U egy nemüres alaphalmaz, $f: U \rightarrow [0, 1]$ egy fuzzy halmaz és $E \subseteq U \times U$ egy ekvivalenciareláció U felett. Az f alsó közelítését $\underline{f}: U \rightarrow [0, 1]$ és felső közelítését $\bar{f}: U \rightarrow [0, 1]$ az alábbiak szerint definiáljuk:

$$\underline{f}(x) := \bigwedge \{f(y) \mid y \in [x]_E\}, \quad x \in U, \quad (\text{RF1})$$

$$\bar{f}(x) := \bigvee \{f(y) \mid y \in [x]_E\}, \quad x \in U, \quad (\text{RF2})$$

ahol $\bigwedge$ és $\bigvee$ jelöli rendre az infimumot és a szuprémumot a $([0, 1], \leq)$ teljes hálóban. Az $(\underline{f}, \bar{f})$ párt az E által indukált durva fuzzy halmaznak nevezzük. Tekintsük ennek a fogalomnak a kiterjesztését is az L -fuzzy halmazokra, amelyeket J. Goguen vezetett be [33]. Számos kutató vizsgálta az L -fuzzy durva halmazokat, ld. például [101], [118], [107], [123], [69], [117]. A továbbiakban legyen $(L, \vee, \wedge)$ egy teljes háló, amelynek legkisebb eleme 0, legnagyobb eleme pedig 1. Az U alaphalmazon értelmezett L -fuzzy halmazon egy $f: U \rightarrow L$ leképezést értünk. Az L -fuzzy halmazok összességét $\mathcal{F}(U, L)$ jelöli, amit az alábbi módon rendezhetünk:

$$f \leq g \Leftrightarrow f(x) \leq g(x), \quad \forall x \in U, \quad (1)$$

és így egy teljes hálót kapunk. Nyilvánvaló, hogy $\mathbf{0}(x) = 0$, $x \in U$ és $\mathbf{1}(x) = 1$, $x \in U$ rendre az $\mathcal{F}(U, L)$ legkisebb és legnagyobb elemei. Bármely $f_i \in \mathcal{F}(U, L)$, $i \in I$ fuzzy halmazrendszer infimuma és szuprémuma az alábbi módon adható meg:

$$\left(\bigwedge_{i \in I} f_i \right) (x) = \bigwedge_{i \in I} f_i(x), \quad \left(\bigvee_{i \in I} f_i \right) (x) = \bigvee_{i \in I} f_i(x). \quad (1')$$

Ha az eredeti definíció [129] szerint $L = [0, 1]$, akkor az U feletti "szokásos" fuzzy halmazok teljesen disztributív hálóját kapjuk, amelyet $\mathcal{F}(U)$ jelöl. Most az $E \subseteq U \times U$ ekvivalenciareláció és egy $f: U \rightarrow L$ L -fuzzy halmaz esetén az f alsó és felső közelítését az $\underline{f}: U \rightarrow L$ és $\bar{f}: U \rightarrow L$ leképezések adják, amelyeket ugyanúgy az (RF1) és (RF2) képletekkel definiálunk. Az E által

indukált durva L -fuzzy halmaz pedig az $(\underline{f}, \overline{f})$ pár. Nyilvánvalóan $\underline{f} \leq \overline{f}$. A durva L -fuzzy halmazok komponensenként rendezhetők:

$$(\underline{f}, \overline{f}) \leq (\underline{g}, \overline{g}) \Leftrightarrow \underline{f} \leq \underline{g} \text{ és } \overline{f} \leq \overline{g} \quad (2)$$

amivel az $\mathcal{RF}(U, L)$ teljes hálót kapjuk. Ebben az infimumot és a szupréumot a következőképpen kapjuk:

$$\bigwedge_{i \in I} (\underline{f}_i, \overline{f}_i) = \left(\bigwedge_{i \in I} \underline{f}_i, \bigwedge_{i \in I} \overline{f}_i \right), \quad \bigvee_{i \in I} (\underline{f}_i, \overline{f}_i) = \left(\bigvee_{i \in I} \underline{f}_i, \bigvee_{i \in I} \overline{f}_i \right). \quad (2')$$

Ha $L = [0, 1]$, akkor [68] alapján ezzel a rendezéssel egy Stone-hálót kapunk. Ebben a fejezetben célom vizsgálni az $\mathcal{RF}(U, L)$ lehetséges reprezentációit és a rajta definiálható algebrákat. Mivel a durva fuzzy halmazok a Pawlak által bevezetett durva halmazok általánosításai [81], így várható, hogy tulajdonságaik ezt tükrözzék.

A *definiálható (egzakt)* halmazok meghatározására a korábbtól eltérő, de ekvivalens megközelítést is alkalmazhatunk. Azt mondjuk, hogy az (U, E) approximációs térben az $A \subseteq U$ halmaz *definiálható*, ha minden $a \in A$ esetén $[a]_E \subseteq A$. Más szavakkal a definiálható halmazok az E ekvivalenciareláció néhány osztályának uniójaként állnak elő. A definiálható halmazok halmazát szokták $D(U, E)$ módon is jelölni. Legyen az E egytagú (singleton) ekvivalenciaosztályainak halmaza $S := \{s \in U \mid [s]_E = \{s\}\}$.

Az (U, E) approximációs tér egy-egy durva halmazát leírhatjuk egy olyan (A, B) definiálható halmazpárként is, ahol $A \subseteq B$ és minden $s \in S$ esetén teljesül, hogy $s \in B \Leftrightarrow s \in A$. Ezt a következőképpen írhatjuk fel (ld. például [54]):

$$RS(U, E) = \{(A, B) \in D(U, E)^2 \mid A \subseteq B, A \cap S = B \cap S\}. \quad (\text{RR})$$

Egy másik, a durva fuzzy halmazokhoz szorosan kapcsolódó fogalom az *intervallummértékű fuzzy halmaz*. Ezek $\mu: U \rightarrow L^{[2]}$ alakú L -fuzzy halmazokként definiálhatók, a hozzá tartozó $L^{[2]}$ teljes háló pedig a következő:

$$\begin{aligned} L^{[2]} &:= \{(x_1, x_2) \in L^2 \mid x_1 \leq x_2\}, \\ (x_1, x_2) &\leq (y_1, y_2) \Leftrightarrow x_1 \leq y_1 \text{ \& } x_2 \leq y_2 \end{aligned} \quad (\text{IL})$$

Az intervallummértékű L -fuzzy halmazok összességét $\mathcal{IF}(U, L)$ jelöli, amit az (IL) képletben megadott módon lehet rendezni. Az $(x_1, x_2) \in L^2$, $x_1 \leq x_2$ párokat az $[x_1, x_2] = \{y \in L \mid x_1 \leq y \leq x_2\}$ intervallumokkal azonosítjuk.

Legyen $\mathbb{A} = \prod_{i \in I} \mathbb{A}_i$ az azonos típusú $\mathbb{A}_i = (A_i, F)$, $i \in I$ algebrák direkt szorzata, ahol F a műveletek egy véges halmaza. A $\prod_{i \in I} A_i$ Descartes-szorzat egy $x \in \prod_{i \in I} A_i$ elemének i -edik koordinátája $x_i \in A_i$. Nyilvánvalóan $x = (x_i)_{i \in I}$. Legyen $A = \bigcup_{i \in I} A_i$, és vegyük észre, hogy x -et azonosíthatjuk az

$x: I \rightarrow A$, $x(i) = x_i$, $i \in I$ leképezéssel. Ha $A_i = A$ minden $i \in I$ esetén, akkor az $A^I = (A^I, F)$ direkt hatvány megegyezik a $\mu: I \rightarrow A$ alakú leképezések $\mathcal{F}(I, A)$ halmazán definiált algebrával a következő szerint: minden n -áris $p \in F$ művelet, valamint $\mu_1, \dots, \mu_n \in \mathcal{F}(I, A)$ leképezés esetén

$$p(\mu_1, \dots, \mu_n)(i) := p(\mu_1(i), \dots, \mu_n(i)) \in A.$$

Mivel $\mathcal{IF}(U, L)$ megegyezik az $\mu: U \rightarrow L^{[2]}$ leképezések rendezett halmazával, azonosítható az $L^{[2]}$ teljes háló $(L^{[2]})^U$ direkt hatványával. Így $\mathcal{IF}(U, L)$ szintén teljes háló – ha $L = [0, 1]$, akkor teljesen disztributív háló is. Mivel minden $u \in U$ esetén $\mu(u) = ((\mu(u))_1, (\mu(u))_2) \in L^2$ és $(\mu(u))_1 \leq (\mu(u))_2$, bármely $\mu \in \mathcal{IF}(U, L)$ azonosítható az $f_1, f_2: U \rightarrow L$, $f_1 \leq f_2$ L -fuzzy halmazpárokkal, ahol $f_1(u) = (\mu(u))_1$ és $f_2(u) = (\mu(u))_2$. Ezért $\mathcal{IF}(U, L)$ teljes részhalóként beágyazható a $\mathcal{F}(U, L) \times \mathcal{F}(U, L)$ hálóba. Az (RF1) és (RF2) alapján minden durva L -fuzzy halmaz egy intervallummértékű L -fuzzy halmaz is egyben, azaz $\mathcal{RF}(U, L) \subseteq \mathcal{IF}(U, L)$. Az $\mathcal{IF}(U, L)$ ($\mathcal{IF}(U, [0, 1])$) felett definiált algebrák tulajdonságait tárgyalják pl. a [25], [15], [23], [29] cikkek.

Legyen $\triangle_L := \{(x, x) \mid x \in L\}$. Ekkor $\triangle_L$ az $L^{[2]}$ teljes részhalója, $L^{[2]}$ pedig az L^2 teljes részhalója. Nyilvánvalóan L és $\triangle_L$ izomorf hálók.

4.1. Lemma. *Legyen $\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge, \sim, 0, 1)$ egy De Morgan-algebra. Ekkor $a \simeq: L^2 \rightarrow L^2$, $\simeq(x_1, x_2) = (\sim x_2, \sim x_1)$ művelet minden $(x_1, x_2) \in L^2$ esetén De Morgan-algebrát határoz meg L^2 -en és annak $L^{[2]}$ és $\triangle_L$ részhalóin.*

Bizonyítás. Nyilvánvaló, hogy $(L^2, \vee, \wedge, \simeq, (0, 0), (1, 1))$ egy De Morgan-algebra. A szakirodalomban ismert tény, hogy L^2 korlátos részhalói, $L^{[2]}$ és $\triangle_L$ zártak $a \simeq$ műveletre (ld. például [71]). $\square$

4.2. Következmény. (i) *Ha $L = [0, 1]$, akkor $a \simeq(x_1, x_2) := (1 - x_2, 1 - x_1)$, $(x_1, x_2) \in [0, 1]^2$ művelet De Morgan-algebrát határoz meg a $([0, 1]^{[2]}, \vee, \wedge)$ és $(\triangle_{[0, 1]}, \vee, \wedge)$ hálókön. Továbbá $(\triangle_{[0, 1]}, \vee, \wedge, \simeq, (0, 0), (1, 1))$ izomorf a $([0, 1], \vee, \wedge, \sim, 0, 1)$ Kleene-algebrával.*

(ii) *$(\mathcal{IF}(U, L), \vee, \wedge, \simeq, (\mathbf{0}, \mathbf{0}), (\mathbf{1}, \mathbf{1}))$ egy De Morgan-algebra, ahol*

$$\simeq(f_1, f_2)(x) = \simeq(f_1(x), f_2(x)) = (\sim f_2(x), \sim f_1(x)), \text{ minden } x \in U \text{ esetén,} \quad (\text{IFDM})$$

amikor $(L, \vee, \wedge, \sim, 0, 1)$ is egy De Morgan-algebra. Abban az esetben, amikor $L = [0, 1]$, akkor $\simeq(f_1, f_2)(x) = (1 - f_2(x), 1 - f_1(x))$.

Bizonyítás. (i) Mivel $([0, 1], \vee, \wedge, \sim, 0, 1)$ egy De Morgan-algebra, ahol $\sim x = 1 - x$, $x \in [0, 1]$, az első állítás nyilvánvaló következménye a 4.1. Lemmának. A $\varphi(x) = (x, x)$, $x \in [0, 1]$ leképezés izomorfizmus az említett algebrák között. A (ii) állítás nyilvánvaló, mivel az $\mathcal{IF}(U, L)$ háló izomorf az $(L^{[2]})^U$ hálóval. $\square$

4.1. Reprezentációs tétel

Legyen U egy nemüres alaphalmaz, és legyen $E \subseteq U \times U$ egy rajta értelmezett ekvivalenciareláció. Azt mondjuk, hogy az $\alpha: U \rightarrow L$ leképezés *konstans az E ekvivalenciaosztályain*, (röviden *E -konstans*), ha minden $x, y \in U$ elempárra teljesül, hogy $(x, y) \in E$ esetén $\alpha(x) = \alpha(y)$.

4.3. Tétel. *Legyen U egy nemüres alaphalmaz, és legyen L egy teljes háló. Az (f, g) L -fuzzy halmazpár, ahol $f, g: U \rightarrow L$, pontosan akkor az $E \subseteq U \times U$ ekvivalenciareláció által származtatott durva L -fuzzy halmaz, ha az alábbi feltételek teljesülnek:*

- (a) f és g konstans az E osztályain;
- (b) $f \leq g$;
- (c) $f(s) = g(s)$, minden $s \in S$ esetén.

Bizonyítás. Legyen $(\underline{f}, \bar{f})$ az $f: U \rightarrow L$ leképezésnek megfelelő durva L -fuzzy halmaz, és legyen $(x, y) \in E$. Ekkor $[x]_E = [y]_E$, tehát $\underline{f}(x) = \underline{f}(y)$, $\bar{f}(x) = \bar{f}(y)$ (RF1) és (RF2) szerint. Ez azt jelenti, hogy (a) teljesül $\underline{f}$ és $\bar{f}$ esetén. (b) és (c) nyilvánvaló következményei (RF1)-nek és (RF2)-nek.

Fordítva, tegyük fel, hogy (a), (b) és (c) teljesülnek az $f, g: U \rightarrow L$ leképezésekre. A kiválasztási axióma szerint minden $u \in U \setminus S$ elemhez válasszunk egy $a_u \in [u]_E$ elemet, majd definiáljuk a $h: U \rightarrow L$ leképezést az alábbiak szerint:

$$h(x) := \begin{cases} g(x), & \text{ha } x = a_x; \\ f(x), & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Megmutatjuk, hogy $\underline{h} = f$ és $\bar{h} = g$. Ha $x = s \in S$, akkor (RF1) és (RF2) szerint $[x]_E = \{s\}$ teljesül, így $\underline{h}(x) = f(s) = g(s) = \bar{h}(x)$. Ha $x \in U \setminus S$, akkor $[x]_E$ legalább két elemet tartalmaz, és bármely $y \in [x]_E$ esetén $f(y) = f(x) \leq g(x) = g(a_x)$, amiből adódik, hogy:

$$\underline{h}(x) = \bigwedge \{h(y) \mid y \in [x]_E\} = \bigwedge \{f(y) \mid y \in [x]_E \setminus \{a_x\}\} \wedge g(a_x) = f(x),$$

$$\begin{aligned} \bar{h}(x) &= \bigvee \{h(y) \mid y \in [x]_E\} = \bigvee \{f(y) \mid y \in [x]_E \setminus \{a_x\}\} \vee g(a_x) \\ &= g(a_x) = g(x). \end{aligned}$$

Tehát $(f, g) = (\underline{h}, \bar{h}) \in \mathcal{RF}(U, L)$. □

Durván fogalmazva ez azt jelenti, hogy a durva L -fuzzy halmazokat tekinthetjük az $\mathcal{F}(U, L^{[2]})$ olyan speciális leképezéseinek, amelyek az E ekvivalenciaosztályain konstansak. Részletesebb értelmezésben: legyen $\mathcal{C}_E(U, L)$ az E -konstans leképezések osztálya. (RF1) és (RF2) szerint $\underline{h}, \bar{h} \in \mathcal{C}_E(U, L)$,

bármely $h: U \rightarrow L$ leképezés esetén. Nyilvánvaló, hogy $\mathcal{C}_E(U, L) = \{f \in \mathcal{F}(U, L) \mid \underline{f} = \overline{f}\}$, és könnyen belátható, hogy $\mathcal{C}_E(U, L)$ teljes részhalója $\mathcal{F}(U, L)$ -nek. Ezért a durva L -fuzzy halmazok 4.3. Tételben szereplő reprezentációja tökéletesen analóg a durva halmazok reprezentációjával. Itt az E -konstans leképezések az U alaphalmaz E -definiálható részhalmazainak felelnek meg, és a durva L -fuzzy halmazokat egy (f, g) E -konstans leképezéspár reprezentálja, ahol f fuzzy részhalmaza g -nek (azaz $f \leq g$), és teljesítik az egytagú halmazokra vonatkozó (c) feltételt.

4.4. Következmény. (i) $\mathcal{RF}(U, L)$ teljes részhalója a $\mathcal{IF}(U, L) \cong (L^{[2]})^U$ hálónak.

(ii) $(\mathcal{RF}(U, L), \vee, \wedge, \simeq, (\mathbf{0}, \mathbf{0}), (\mathbf{1}, \mathbf{1}))$ részalgebrája az $(\mathcal{IF}(U, L), \vee, \wedge, \simeq, (\mathbf{0}, \mathbf{0}), (\mathbf{1}, \mathbf{1}))$ De Morgan-algebrának, ha $(L, \vee, \wedge, \sim, 0, 1)$ egy De Morgan-algebra.

Bizonyítás. Legyen $(\underline{g}_i, \overline{g}_i) \in \mathcal{RF}(U, L) \subseteq \mathcal{IF}(U, L)$, $i \in I$. Mivel $\mathcal{IF}(U, L)$ teljes részhalója $\mathcal{F}(U, L) \times \mathcal{F}(U, L)$ -nek, a $(\underline{g}_i, \overline{g}_i)$, $i \in I$ elemek $\mathcal{IF}(U, L)$ -beli szuprémuma és infimuma:

$$\bigvee_{i \in I} (\underline{g}_i, \overline{g}_i) = \left(\bigvee_{i \in I} \underline{g}_i, \bigvee_{i \in I} \overline{g}_i \right),$$

$$\bigwedge_{i \in I} (\underline{g}_i, \overline{g}_i) = \left(\bigwedge_{i \in I} \underline{g}_i, \bigwedge_{i \in I} \overline{g}_i \right).$$

Nyilvánvalóan teljesül, hogy $\bigvee_{i \in I} \underline{g}_i \leq \bigvee_{i \in I} \overline{g}_i$ és $\bigwedge_{i \in I} \underline{g}_i \leq \bigwedge_{i \in I} \overline{g}_i$. Mivel minden $i \in I$ -re teljesül, hogy $\underline{g}_i, \overline{g}_i \in \mathcal{C}_E(U, L)$, és $\mathcal{C}_E(U, L)$ teljes részhalója $\mathcal{F}(U, L)$ -nek, ezáltal $\bigvee_{i \in I} \underline{g}_i, \bigvee_{i \in I} \overline{g}_i \in \mathcal{C}_E(U, L)$ és $\bigwedge_{i \in I} \underline{g}_i, \bigwedge_{i \in I} \overline{g}_i \in \mathcal{C}_E(U, L)$. Tehát $\bigvee_{i \in I} \underline{g}_i$ és $\bigvee_{i \in I} \overline{g}_i$, valamint $\bigwedge_{i \in I} \underline{g}_i$ és $\bigwedge_{i \in I} \overline{g}_i$ teljesíti a 4.3. Tétel (a) és (b) feltételeit. Továbbá teljesítik (c)-t is, mivel minden $s \in S$ esetén:

$$\left(\bigvee_{i \in I} \underline{g}_i \right) (s) = \bigvee_{i \in I} \underline{g}_i(s) = \bigvee_{i \in I} \overline{g}_i(s) = \left(\bigvee_{i \in I} \overline{g}_i \right) (s),$$

és hasonlóan kapjuk, hogy

$$\left(\bigwedge_{i \in I} \underline{g}_i \right) (s) = \left(\bigwedge_{i \in I} \overline{g}_i \right) (s).$$

A 4.3. Tétel alapján tehát:

$$\bigvee_{i \in I} (\underline{g}_i, \overline{g}_i), \bigwedge_{i \in I} (\underline{g}_i, \overline{g}_i) \in \mathcal{RF}(U, L).$$

Mivel $\mathcal{IF}(U, L)$ azonosítható $(L^{[2]})^U$ -val, így bizonyítottuk az (i) állítást.

(ii) Az (i) állítás értelmében $(\mathbf{0}, \mathbf{0}), (\mathbf{1}, \mathbf{1}) \in \mathcal{RF}(U, L)$. Legyen $(f_1, f_2) \in \mathcal{RF}(U, L)$. Ekkor f_1 és f_2 kielégíti az (a), (b) és (c) feltételeket. A 4.2. Következmény (ii) pontja miatt $(\mathcal{IF}(U, L), \vee, \wedge, \simeq, (\mathbf{0}, \mathbf{0}), (\mathbf{1}, \mathbf{1}))$ egy De Morgan-algebra, ahol $\simeq (f_1, f_2) = (\sim f_2, \sim f_1)$. Ezért $\sim f_2 \leq \sim f_1$, azaz (b) teljesül $(\sim f_2, \sim f_1)$ esetén. Mivel $\sim f_2$ és $\sim f_1$ konstans az E osztályain, (a) is teljesül. Mivel (c) nyilvánvalóan teljesül $\sim f_2, \sim f_1$ esetén, így $(\sim f_2, \sim f_1) \in \mathcal{RF}(U, L)$. Ezzel (ii) is bizonyítást nyert. $\square$

Legyen $\mathbb{A} = \prod_{i \in I} \mathbb{A}_i$ az $\mathbb{A}_i = (A_i, F)$, $i \in I$ algebrák direkt szorzata, és legyenek a $\pi_k: \prod_{i \in I} \mathbb{A}_i \rightarrow A_k$, $\pi_k((x_i)_{i \in I}) = x_k$ ($k \in I$) leképezések az $\mathbb{A}$ természetes projekciói. Az $\mathbb{A}$ algebra egy $\mathbb{B} = (B, F)$ részalgebráját az $\mathbb{A}_i$, $i \in I$ algebrák szubdirekt szorzatának nevezzük, ha minden $i \in I$ esetén $\pi_i(B) = A_i$. Bármely $E \subseteq I \times I$ ekvivalenciarelációra, ha $A_i = A_j$ minden $(i, j) \in E$ esetén, akkor definiáljuk az $\prod_{i \in I}^{[E]} A_i := \{(x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} A_i \mid x_i = x_j, \text{ minden } (i, j) \in E\}$ halmazt. Ismert, hogy $\left(\prod_{i \in I}^{[E]} A_i, F\right)$ az $\mathbb{A}_i$, $i \in I$ algebrák szubdirekt szorzata, ld. például [8]; ezt $\prod_{i \in I}^{[E]} \mathbb{A}_i$ módon fogjuk jelölni. Ha $\mathbb{A}_i$, $i \in I$ teljes hálók, akkor nyilvánvaló, hogy $\prod_{i \in I}^{[E]} \mathbb{A}_i$ teljes részhálója a $\prod_{i \in I} \mathbb{A}_i$ szorzatnak. Most tekintsük a $\prod_{u \in U} \mathcal{L}_u$ direkt szorzatot az alábbi módon definiált $\mathcal{L}_u$ hálókra:

$$\mathcal{L}_u := \begin{cases} L^{[2]}, & \text{ha } u \in U \setminus S; \\ \triangle_L, & \text{ha } u \in S. \end{cases} \quad (\text{Lu})$$

Ekkor a következő állítást kapjuk:

4.5. Állítás. $\mathcal{RF}(U, L)$ izomorf a $\prod_{u \in U}^{[E]} \mathcal{L}_u$ szubdirekt szorzattal.

Bizonyítás. Vizsgáljuk meg a $\Upsilon: \mathcal{RF}(U, L) \rightarrow \prod_{u \in U}^{[E]} \mathcal{L}_u$ leképezést, amelyet az alábbi módon adunk meg:

$$\Upsilon(\underline{g}, \bar{g}) := (\underline{g}(u), \bar{g}(u))_{u \in U}, \quad \text{minden } (\underline{g}, \bar{g}) \in \mathcal{RF}(U, L) \text{ esetén.}$$

Az Υ leképezés jól definiált. Valóban, hiszen $\Upsilon(\underline{g}, \bar{g})(u) = (\underline{g}(u), \bar{g}(u)) \in L^{[2]}$, mert $\underline{g}(u) \leq \bar{g}(u)$. Ha $u \in S$, akkor $\underline{g}(u) = \bar{g}(u)$ miatt $\Upsilon(\underline{g}, \bar{g})(u) \in \triangle_L$. Mivel minden $u, v \in U$, $(u, v) \in E$ esetén $(\underline{g}(u), \bar{g}(u)) = (\underline{g}(v), \bar{g}(v))$, ezért $\Upsilon(\underline{g}, \bar{g}) = (x_u)_{u \in U} \in \prod_{u \in U}^{[E]} \mathcal{L}_u$.

Továbbá $(\underline{g}, \bar{g}) \leq (\underline{h}, \bar{h}) \Leftrightarrow (\underline{g}(u), \bar{g}(u)) \leq (\underline{h}(u), \bar{h}(u)), \forall u \in U$. Ezért Υ rendezésőrző beágyazás. Ezenfelül, legyen $(z_u)_{u \in U} \in \prod_{u \in U}^{[E]} \mathcal{L}_u$. Mivel $\triangle_L \subseteq L^{[2]}$,

$z_u = (z_{u,1}, z_{u,2}) \in L^{[2]}$ mindig fennáll. Definiáljuk az $\underline{f}: U \rightarrow L$, $\bar{f}: U \rightarrow L$ leképezéseket úgy, hogy $\underline{f}(u) := z_{u,1}$, $\bar{f}(u) := z_{u,2}$, minden $u \in U$ esetén. Ekkor $\underline{f} \leq \bar{f}$, és ha $s \in S$, akkor $z_s \in \Delta_L$ miatt $\underline{f}(s) = \bar{f}(s)$. Mivel minden $u, v \in U$ esetén, ahol $(u, v) \in E$, teljesül $z_u = z_v$, ezért $\underline{f}(u) = z_{u,1} = z_{v,1} = \underline{f}(v)$ és $\bar{f}(u) = z_{u,2} = z_{v,2} = \bar{f}(v)$. Mivel $\underline{f}$ és $\bar{f}$ egyaránt E -konstansok, $(\underline{f}, \bar{f}) \in \mathcal{RF}(U, L)$ és $\Upsilon(\underline{f}, \bar{f}) := ((z_u)_1, (z_u)_2)_{u \in U} = (z_u)_{u \in U}$. Tehát Υ bijektív és rendezésizomorfizmus. $\square$

4.6. Állítás. Az L háló izomorf $\mathcal{RF}(U, L)$ egy főideáljával.

Bizonyítás. Először megmutatjuk, hogy bármely $\mathcal{L}_u$ izomorf $\prod_{u \in U}^{[E]} \mathcal{L}_u \cong \mathcal{RF}(U, L)$ egy főideáljával. Legyen $s \in S$, ekkor $\mathcal{L}_s = \Delta_L$. Bármely $y \in L$ esetén legyen $a^{(s,y)} := (a_u^{(s,y)})_{u \in U}$, ahol

$$a_u^{(s,y)} := \begin{cases} (y, y), & \text{ha } u = s; \\ (0, 0), & \text{egyébként} \end{cases}$$

Definíció szerint $a^{(s,y)} \in \prod_{u \in U}^{[E]} \mathcal{L}_u$, valamint az $a^{(s,1)}$ főideálja ebben a hálóban

$$(a^{(s,1)}) = \{(x_u)_{u \in U} \in \prod_{u \in U}^{[E]} \mathcal{L}_u \mid (x_u)_{u \in U} \leq a^{(s,1)}\} = \{(a_u^{(s,y)})_{u \in U} \mid y \in L\}$$

Nyilvánvalóan ez a részháló izomorf a Δ_L -lel, és $\Delta_L \cong L$. Most legyen $v \in U \setminus S$. Ekkor $\mathcal{L}_v = L^{[2]}$. Bármely $(y_1, y_2) \in L^{[2]}$ esetén definiáljuk a következőt:

$$b^{(v,y_1,y_2)} := (b_u^{(v,y_1,y_2)})_{u \in U},$$

ahol

$$b_u^{(v,y_1,y_2)} := \begin{cases} (y_1, y_2), & \text{ha } u \in [v]_E; \\ (0, 0), & \text{egyébként} \end{cases}$$

Definíció szerint $b^{(v,y_1,y_2)} \in \prod_{u \in U}^{[E]} \mathcal{L}_u$, és $b^{(v,1,1)}$ főideálja:

$$\begin{aligned} (b^{(v,1,1)}) &= \{(x_u)_{u \in U} \in \prod_{u \in U}^{[E]} \mathcal{L}_u \mid (x_u)_{u \in U} \leq b^{(v,1,1)}\} \\ &= \{(b_u^{(v,y_1,y_2)})_{u \in U} \mid (y_1, y_2) \in L^{[2]}\} \end{aligned}$$

Könnyen belátható, hogy ez a háló izomorf az $L^{[2]}$ hálóval. Mivel L izomorf $L^{[2]}$ egy főideáljával, így L izomorf $\mathcal{RF}(U, L)$ egy főideáljával. $\square$

Ennek közvetlen következményeként kapjuk az alábbi ismert állítást.

4.7. Következmény. $\mathcal{RF}(U, L)$ akkor és csakis akkor (teljesen) disztributív háló, ha L is (teljesen) disztributív. Speciális esetben: $\mathcal{RF}(U, [0, 1])$ egy teljesen disztributív háló.

Bizonyítás. $L^{[2]}$ egy (teljes) részhálójára L^2 -nek. Mivel $\mathcal{RF}(U, L)$ izomorf $(L^{[2]})^U$ egy teljes részhálójával, ezért disztributív (teljesen disztributív), ha L disztributív (teljesen disztributív). Tekintettel a 4.6. Állításra, L disztributív (teljesen disztributív), ha $\mathcal{RF}(U, L)$ disztributív (teljesen disztributív). Mivel $([0, 1], \leq)$ egy teljesen disztributív háló, ezért $\mathcal{RF}(U, [0, 1])$ teljesen disztributív. $\square$

4.2. Reprezentáció durva relációkkal

A teljes L háló egy $x \neq 0$ eleme *teljesen egyesítés-irreducibilis*, ha bármely $T \subseteq L$ -re $x = \bigvee T$ esetén $x \in T$. A teljesen egyesítés-irreducibilis elemek halmazát J -vel jelöljük. Azokat az $a \in L$ elemeket, amelyek a 0-nak rákövetkezői, a háló *atomjainak* nevezzük. Az atomok halmazát A -val jelöljük, és nyilvánvalóan $A \subseteq J$.

Bármely $x \in L$ esetén legyen $J(x) = \{j \in J \mid j \leq x\}$ és $A(x) = \{a \in A \mid a \leq x\}$. Az L háló *térszerű*, ha bármely $x \in L$ esetén $x = \bigvee J(x)$. Hasonlóan, az L háló *atomisztikus*, ha bármely $x \in L$ esetén $x = \bigvee A(x)$. A teljes L háló *végtelen egyesítésre disztributív*, ha bármely $x \in L$ és $x_i \in L, i \in I$ esetén:

$$x \wedge \left(\bigvee_{i \in I} x_i \right) = \bigvee_{i \in I} (x \wedge x_i). \quad (\text{JID})$$

Ismert, hogy minden végtelen egyesítésre disztributív háló disztributív. Továbbá minden teljes hálóban

$$J(\bigwedge \{x_i \mid i \in I\}) = \bigcap \{J(x_i) \mid i \in I\}. \quad (\text{J1})$$

Ha L térszerű háló, akkor bármely $x, y \in L$ esetén $x \leq y \Leftrightarrow J(x) \subseteq J(y)$. Ha emellett L disztributív, akkor $J(x_1 \vee x_2) = J(x_1) \cup J(x_2)$, ha pedig L végtelen egyesítésre disztributív, akkor

$$J(\bigvee \{x_i \mid i \in I\}) = \bigcup \{J(x_i) \mid i \in I\}. \quad (\text{J2})$$

Két bináris reláció, $R_1 \subseteq U_1^2$ és $R_2 \subseteq U_2^2$ *direkt szorzata* egy olyan $R := R_1 \times R_2$ bináris reláció, amely bármely $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in U_1 \times U_2$ esetén a következőképpen definiálható:

$$((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \in R \Leftrightarrow (x_1, y_1) \in R_1 \text{ és } (x_2, y_2) \in R_2.$$

Az $(U_1 \times U_2, R)$ approximációs teret a (U_1, R_1) és (U_2, R_2) approximációs terek *direkt szorzatának* nevezzük. Bármely $\varrho \subseteq U_1 \times U_2$ reláció alsó és felső approximációja $(U_1 \times U_2, R)$ -ben:

$$\varrho_R := \{(x, y) \in U_1 \times U_2 \mid [(x, y)]_R \subseteq \varrho\},$$

$$\varrho^R := \{(x, y) \in U_1 \times U_2 \mid [(x, y)]_R \cap \varrho \neq \emptyset\}.$$

A (ϱ_R, ϱ^R) pár a ϱ -hoz tartozó *durva reláció*, ld. [82] vagy [127], ahol alternatív definíció is található. Mivel a durva relációk megegyeznek az $(U_1 \times U_2, R)$ durva halmazokkal, összességüket $RS(U_1 \times U_2, R)$ módon jelöljük. A durva relációkat a komponensenkénti tartalmazás szerint rendezhetjük, így kapjuk az $(RS(U_1 \times U_2, R), \leq)$ disztributív hálót, amelyet az $U_1 \times U_2$ -n értelmezett durva relációk hálójaként is értelmezünk. Defináljuk a következő leképezést:

$$\approx (\varrho_R, \varrho^R) := ((\varrho^R)^c, (\varrho_R)^c) = ((\varrho^c)_R, (\varrho^c)^R),$$

így egy $(RS(U_1 \times U_2, R), \cap, \cup, \approx, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ Kleene-algebrát kapunk, ahol $\mathbf{0} = (\emptyset, \emptyset)$ és $\mathbf{1} = (U_1 \times U_2, U_1 \times U_2)$. Bármely $\varrho \subseteq U_1 \times U_2$ reláció esetén definiáljuk annak egy *szeletét* a következőképpen: $\varrho(x) := \{y \in U_2 \mid (x, y) \in \varrho\}$. Megfigyelhető, hogy bármely $x \in U_1$ esetén

$$\{(x, y) \in U_1 \times U_2 \mid (x, y) \in \varrho\} = \{x\} \times \varrho(x),$$

$$\text{és így } \varrho = \bigcup_{x \in U_1} (\{x\} \times \varrho(x)).$$

Legyen E egy ekvivalenciareláció U -n, és tekintsük az $(U \times J, R)$ approximációs teret, ahol J az L teljesen egyesítés-irreducibilis elemeinek halmaza, és $R = E \times \triangle_J$. Az $X \subseteq J$ halmazt L -zártnak nevezzük, ha $X = J(x)$ valamilyen $x \in L$ esetén. Az $\emptyset$ halmaz L -zárt, mivel $\emptyset = J(0)$. Egy $(T, V) \in RS(U \times J, R)$ durva halmazt *zártnak* nevezünk, ha minden $y \in U$ esetén $T(y)$ és $V(y)$ L -zárt. Jelölje $CRS(U \times J, R)$ az $(U \times J, R)$ zárt durva halmazait.

4.8. Lemma. *Ha L egy teljes térszerű disztributív háló, akkor az $(U \times J, R)$ zárt durva halmazai egy részhálóját alkotják $(RS(U \times J, R), \leq)$ -nek. Ha ezenfelül L kielégíti a (JID) tulajdonságot, akkor ez a részháló teljes részhálója is $(RS(U \times J, R), \leq)$ -nek.*

Bizonyítás. Legyen a $(U \times J, R)$ zárt durva halmazainak egy (nemüres) rendszere $(T_i, V_i) \in CRS(U \times J, R)$, $i \in I$. Ekkor:

$$\bigwedge \{(T_i, V_i) \mid i \in I\} = \left(\bigcap \{T_i \mid i \in I\}, \bigcap \{V_i \mid i \in I\} \right) \in RS(U \times J, R);$$

$$\bigvee \{(T_i, V_i) \mid i \in I\} = \left(\bigcup \{T_i \mid i \in I\}, \bigcup \{V_i \mid i \in I\} \right) \in RS(U \times J, R).$$

Például ha $I = \{1, 2\}$, akkor $(T_1, V_1) \vee (T_2, V_2) = (T_1 \cup T_2, V_1 \cup V_2)$.

Megmutatjuk, hogy az így kapott durva halmazok zártak. Valóban, minden $x \in U$ esetén $\bigcap \{T_i \mid i \in I\}(x) = \bigcap \{T_i(x) \mid i \in I\}$ és $\bigcap \{V_i \mid i \in I\}(x) = \bigcap \{V_i(x) \mid i \in I\}$.

Mivel $T_i(x)$ és $V_i(x)$ L -zárt halmazok, léteznek olyan $y_i, z_i \in L$, $i \in I$ elemek, amire $T_i(x) = J(y_i)$ és $V_i(x) = J(z_i)$. Tehát

$$\bigcap \{T_i \mid i \in I\}(x) = \bigcap \{J(y_i) \mid i \in I\} = J\left(\bigwedge \{y_i \mid i \in I\}\right),$$

$$\bigcap \{V_i \mid i \in I\}(x) = \bigcap \{J(z_i) \mid i \in I\} = J\left(\bigwedge \{z_i \mid i \in I\}\right),$$

vagyis $\bigcap \{T_i \mid i \in I\}$ és $\bigcap \{V_i \mid i \in I\}$ is L -zárt halmazok, így:

$$\left(\bigcap \{T_i \mid i \in I\}, \bigcap \{V_i \mid i \in I\}\right) \in CRS(U \times J, R).$$

Továbbá, ha $T_i(x) = J(y_i)$ és $V_i(x) = J(z_i)$ valamilyen $y_i, z_i \in L, i \in \{1, 2\}$ esetén, akkor $(T_1 \cup T_2)(x) = T_1(x) \cup T_2(x) = J(y_1) \cup J(y_2) = J(y_1 \vee y_2)$. Hasonlóan igazolható, hogy $(V_1 \cup V_2)(x) = J(z_1 \vee z_2)$. Tehát $(T_1 \cup T_2, V_1 \cup V_2)$ egy zárt halmaz, és $(T_1 \cup T_2, V_1 \cup V_2) \in CRS(U \times J, R)$, ami azt bizonyítja, hogy $CRS(U \times J, R)$ egy részhálójára $(RS(U \times J, R), \leq)$ -nek. Ha ezenfelül L kielégíti a (JID) tulajdonságot, akkor $(\bigcup \{T_i \mid i \in I\}, \bigcup \{V_i \mid i \in I\}) \in CRS(U \times J, R)$ hasonlóan bizonyítható a (J2) tulajdonság alkalmazásával. Így kapjuk, hogy $CRS(U \times J, R)$ egy teljes részhálójára $RS(U \times J, R)$ -nek. $\square$

4.9. Tétel. *Legyen E egy ekvivalenciareláció az $U \neq \emptyset$ alaphalmazon, és legyen L egy teljes, térszerű, disztributív háló. Ekkor $\mathcal{RF}(U, L)$ izomorf az $(U \times J, R)$ approximációs tér zárt durva halmazainak hálójával, ahol $R = E \times \Delta_J$.*

Bizonyítás. Bármely L -fuzzy halmazra, azaz bármely $f \in \mathcal{F}(U, L)$ leképezésre definiáljuk a következő relációt:

$$\varrho(f) := \bigcup_{x \in U} \{x\} \times J(f(x)) \subseteq U \times J.$$

Mivel $\varrho(f)(x) = J(f(x))$, $\varrho(f)(x)$ egy L -zárt halmaz minden $x \in U$ esetén. Továbbá bármely $(f_1, f_2) \in \mathcal{RF}(U, L)$ esetén definiáljuk a következőt:

$$\Phi(f_1, f_2) := (\varrho(f_1), \varrho(f_2)).$$

Be fogjuk látni, hogy $(\varrho(f_1), \varrho(f_2))$ egy zárt durva halmaz. Valóban, minden $x \in U$ esetén $f_1(x) \leq f_2(x)$ miatt $J(f_1(x)) \subseteq J(f_2(x))$, tehát $\varrho(f_1) \subseteq \varrho(f_2)$. Annak igazolására, hogy $\varrho(f_1)$ és $\varrho(f_2)$ R -definiálható halmazok, vegyünk egy tetszőleges $(x, y) \in \varrho(f_1)$ elemet, és legyen $(u, v) \in [(x, y)]_R$. Ekkor $(x, u) \in E$ és $v = y \in J(f_1(x))$. Mivel $f_1(u) = f_1(x)$, így $v \in J(f_1(u))$, amiből

$$(u, v) \in u \times J(f_1(u)) \subseteq \varrho(f_1).$$

Ez azt jelenti, hogy $[(x, y)]_R \subseteq \varrho(f_1)$, azaz $\varrho(f_1)$ egy definiálható halmaz. Hasonlóan bizonyítható, hogy $\varrho(f_2)$ is definiálható.

Most legyen R -nek egy singletonja $(s, y) \in U$, és tegyük fel, hogy $(s, y) \in \varrho(f_2)$. Ekkor $(s, y) \in \{s\} \times J(f_2(s))$, és $[(s, y)]_R = \{(s, y)\}$ miatt $[s]_E = \{s\}$, azaz $s \in S$. Most a 4.3. Tétel alapján $f_2(s) = f_1(s)$, és így $(s, y) \in \{s\} \times$

$J(f_1(s)) \subseteq \varrho(f_1)$. Ezért $(s, y) \in \varrho(f_2) \Leftrightarrow (s, y) \in \varrho(f_1)$, és így $(\varrho(f_1), \varrho(f_2))$ egy durva halmaz $(U \times J, R)$ -ből. Mivel $\varrho(f_1)(x)$ és $\varrho(f_2)(x)$ L -zárt halmazok minden $x \in U$ esetén, azt kapjuk, hogy $(\varrho(f_1), \varrho(f_2)) \in CRS(U \times J, R)$. Így definiálhatjuk a következő leképezést:

$$\Phi: \mathcal{RF}(U, L) \rightarrow CRS(U \times J, R), \quad \Phi(f_1, f_2) = (\varrho(f_1), \varrho(f_2)).$$

Bebizonyítjuk, hogy Φ egy hálózomorfizmus. Valóban, ha $(f_1, f_2) \leq (g_1, g_2)$, akkor $f_1 \leq g_1$ és $f_2 \leq g_2$, így $\Phi(f_1, f_2) = (\varrho(f_1), \varrho(f_2)) \leq (\varrho(g_1), \varrho(g_2)) = \Phi(g_1, g_2)$.

Fordítva, tegyük fel, hogy $\Phi(f_1, f_2) \leq \Phi(g_1, g_2)$. Ekkor definíció szerint

$$\begin{aligned} \bigcup_{x \in U} \{x\} \times J(f_1(x)) &\subseteq \bigcup_{x \in U} \{x\} \times J(g_1(x)), \text{ és} \\ \bigcup_{x \in U} \{x\} \times J(f_2(x)) &\subseteq \bigcup_{x \in U} \{x\} \times J(g_2(x)). \end{aligned}$$

Ezekből következik, hogy $J(f_1(x)) \subseteq J(g_1(x))$ és $J(f_2(x)) \subseteq J(g_2(x))$ minden $x \in U$ esetén. Ebből azt kapjuk, hogy $f_1(x) = \bigvee J(f_1(x)) \leq \bigvee J(g_1(x)) = g_1(x)$ és $f_2(x) = \bigvee J(f_2(x)) \leq \bigvee J(g_2(x)) = g_2(x)$ minden $x \in U$ esetén. Ezért $f_1 \leq g_1$ és $f_2 \leq g_2$, tehát Φ egy hálóbeágyazás. Így már csak azt kell megmutatni, hogy Φ szűrjektív. Ennek bizonyításához vegyünk egy tetszőleges $(T, V) \in CRS(U \times J, R)$ zárt durva halmazt. Mivel $T(x)$ és $V(x)$ L -zárt halmazok, így $T(x) = J(z_1(x))$ és $V(x) = J(z_2(x))$ bármely $x \in U$ esetén, ahol $z_1(x), z_2(x) \in L$ x -től függő elemek. Így a $z_1: U \rightarrow L$ és $z_2: U \rightarrow L$ leképezések, azaz $z_1, z_2 \in \mathcal{F}(U, L)$. Tehát annak bizonyításához, hogy $(z_1, z_2) \in \mathcal{RF}(U, L)$, ellenőriznünk kell a 4.3. Tétel (a), (b), (c) feltételeit.

(a) Mivel $T \subseteq V$, ezért $J(z_1(x)) = T(x) \subseteq V(x) = J(z_2(x))$, amiből következik, hogy $z_1(x) = \bigvee J(z_1(x)) \leq \bigvee J(z_2(x)) = z_2(x)$, azaz $z_1 \leq z_2$.

(b) Legyen $(x, y) \in E$. Mivel T és V R -definiált halmazok és $R = E \times \Delta_J$, minden $j, k \in J$ esetén $(x, j) \in T \Leftrightarrow (y, j) \in T$ és $(x, k) \in V \Leftrightarrow (y, k) \in V$. Ezért $T(x) = T(y)$ és $V(x) = V(y)$, így $J(z_1(x)) = T(x) = T(y) = J(z_1(y))$ és $J(z_2(x)) = V(x) = V(y) = J(z_2(y))$. Ebből kapjuk, hogy $z_1(x) = \bigvee J(z_1(x)) = \bigvee J(z_1(y)) = z_1(y)$ és $z_2(x) = \bigvee J(z_2(x)) = \bigvee J(z_2(y)) = z_2(y)$, ami bizonyítja (b)-t.

(c) Legyen $s \in S$. Ekkor bármely $y \in L$ esetén (s, y) egy singletonja R -nek. Így $y \in T(s) \Leftrightarrow (s, y) \in T \Leftrightarrow (s, y) \in V \Leftrightarrow y \in V(s)$, azaz $T(s) = V(s)$. Ebből következik, hogy $J(z_1(s)) = T(s) = V(s) = J(z_2(s))$, és így $z_1(s) = \bigvee J(z_1(s)) = \bigvee J(z_2(s)) = z_2(s)$. Ez bizonyítja (c)-t, tehát $(z_1, z_2) \in$

$\mathcal{RF}(U, L)$ a 4.3. Tétel szerint. Végül megfigyelhetjük, hogy

$$T = \bigcup_{x \in U} \{x\} \times T(x) = \bigcup_{x \in U} \{x\} \times J(z_1(x)) = \varrho(z_1), \text{ és}$$

$$V = \bigcup_{x \in U} \{x\} \times V(x) = \bigcup_{x \in U} \{x\} \times J(z_2(x)) = \varrho(z_2).$$

Így azt kapjuk, hogy $\Phi(z_1, z_2) = (\varrho(z_1), \varrho(z_2)) = (T, V)$. Ez bizonyítja, hogy $\Phi: \mathcal{RF}(U, L) \rightarrow CRS(U \times J, R)$ szürjektív, így Φ egy hálózomorfizmus. $\square$

Legyen $\mathcal{L}[0, 1]$ a $([0, 1], \leq)$ rendezésideáljainak teljes hálója. Mivel $\mathcal{L}[0, 1]$ teljesen disztributív, ez egy végtelen egyesítésre disztributív háló is. Vegyük észre, hogy $J = I := \{[0, x], x \in [0, 1]\}$. Mivel minden $O \in \mathcal{L}[0, 1]$ esetén $O = \bigcup \{[0, x], x \in [0, 1]\}$, a $\mathcal{L}[0, 1]$ háló térszerű. Használjuk a $(x) := [0, x]$ jelölést. A 4.9. Tételt alkalmazva kapjuk a következőt.

4.10. Következmény. *Legyen E egy ekvivalenciareláció $U \neq \emptyset$ halmazon. Ekkor az $\mathcal{RF}(U, [0, 1])$ fuzzy durva halmazok hálója izomorf a durva relációk $RS(U \times I, E \times \Delta_I)$ részhálójával.*

Bizonyítás. A 4.9. Tétel és a 4.8. Lemma alapján $\mathcal{RF}(U, \mathcal{L}[0, 1])$ izomorf az $RS(U \times I, E \times \Delta_I)$ egy teljes részhálójával. Megmutatjuk, hogy $\mathcal{RF}(U, [0, 1])$ részhálóként beágyazható az $\mathcal{RF}(U, \mathcal{L}[0, 1])$ hálóba. Ismert, hogy a $\psi: [0, 1] \rightarrow \mathcal{L}[0, 1]$, $\psi(x) = (x)$ leképezés hálóbeágyazás. Definiáljuk most a következő leképezést:

$$\Psi: \mathcal{RF}(U, [0, 1]) \rightarrow \mathcal{RF}(U \times \mathcal{L}[0, 1]), \Psi(f_1, f_2)(x) := ((f_1(x)), (f_2(x))).$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy Ψ is hálóbeágyazás, tehát $\mathcal{RF}(U, [0, 1])$ izomorf a $\mathcal{RF}(U, \mathcal{L}[0, 1])$ valamely $\mathcal{K}$ részhálójával. Következésképpen $\mathcal{RF}(U, [0, 1])$ izomorf az $RS(U \times [0, 1], E \times \Delta_{[0, 1]})$ egy részhálójával is. $\square$

4.3. Hálótulajdonságok

Ha L egy pszeudokomplementumos háló, akkor bármely $a \in L$ esetén az $(a]$ főideál is pszeudokomplementumos háló. Az $(L, \vee, \wedge, *, 0, 1)$ algebrát *p-algebrának* nevezzük (a $*$ jelöli a pszeudokomplementum-képzés műveletét). Az

$$(x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_n)^* \vee (x_1^* \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_n)^* \vee \cdots \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_n^*)^* = 1 \quad (L_n)$$

azonosság minden $n \in \mathbb{N}$ esetén a p -algebrák egy egyenletosztályát határozza meg. A disztributív p -algebrák bármely valódi egyenletosztálya – a Boole-algebrák varietását kivéve – egybeesik ezen osztályok valamelyikével [61]. Az

(L_n) azonosságot kielégítő pszeudokomplementumos hálót (L_n) -hálónak nevezzük [97]. Például $n = 1$ és $x_1 := x$ esetén az úgynevezett Stone-azonosságot kapjuk, amivel már az 1. fejezetben is találkoztunk:

$$x^* \vee x^{**} = 1. \quad (\text{S})$$

Az (S) azonosságot kielégítő disztributív p -algebrát Stone-algebrának nevezzük. Ismert, hogy ha L egy disztributív (L_n) -háló, akkor bármely $a \in L$ esetén $[a]$ is (L_n) -háló.

4.11. Példák. (a) Legyen $(B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$ egy Boole-algebra. Ekkor ha $(a, b) \in B^{[2]}$ esetén $(a, b)^* = (\neg b, \neg a)$, akkor a [30] alapján a $(B^{[2]}, \vee, \wedge, *, (0, 0), (1, 1))$ Stone-algebrát kapjuk.

(b) $([0, 1], \max, \min, *, 0, 1)$ egy Stone-algebra, ahol bármely $x \in [0, 1]$ esetén

$$x^* = \begin{cases} 1, & \text{ha } x = 0; \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$$

(c) A [92] cikkben bizonyították, hogy $RS(U, E)$ is Stone-algebra, ahol $(A, B)^* = (B^c, A^c)$.

4.12. Lemma. (i) $\mathbb{L} = (L, \vee, \wedge, *, 0, 1)$ akkor és csak akkor p -algebra, ha $\mathbb{L}^{[2]} = (L^{[2]}, \vee, \wedge, \otimes, (0, 0), (1, 1))$ is p -algebra, ahol bármely $(x_1, x_2) \in L^{[2]}$ esetén $(x_1, x_2)^\otimes = (x_2^*, x_1^*)$.

(ii) $\mathbb{L}$ egyrészt akkor és csak akkor (L_n) -háló, ha $\mathbb{L}^{[2]}$ is (L_n) -háló, másrészt pedig akkor és csak akkor, ha $(\triangle_L, \vee, \wedge, \otimes, (0, 0), (1, 1))$ is egy (L_n) -háló.

Bizonyítás. Legyen $\mathbb{L}$ egy p -algebra, és $(x_1, x_2) \in L^{[2]}$. Mivel $x_1 \leq x_2$, ezért $x_1 \wedge x_2^* \leq x_2 \wedge x_2^* = 0$, így $(x_1, x_2) \wedge (x_2^*, x_1^*) = (0, 0)$. Fordítva, ha $(x_1, x_2) \wedge (y_1, y_2) = (x_1 \wedge y_1, x_2 \wedge y_2) = (0, 0)$, akkor $y_1 \leq y_2 \leq x_2^*$. Ezért $(x_1, x_2) \wedge (y_1, y_2) = (0, 0) \Leftrightarrow (y_1, y_2) \leq (x_2^*, x_1^*)$.

Így (x_1, x_2) pszeudokomplementuma $L^{[2]}$ -ben $(x_1, x_2)^\otimes = (x_2^*, x_1^*)$, és $\mathbb{L}^{[2]}$ egy p -algebra. Fordítva, tegyük fel, hogy $\mathbb{L}^{[2]}$ egy p -algebra. Mivel L izomorf a $((0, 1])$ főideállal $L^{[2]}$ -ben, ezért pszeudokomplementumos, vagyis $\mathbb{L}$ p -algebra.

(ii) Tegyük fel, hogy $\mathbb{L}$ kielégíti az (L_n) azonosságot, és legyenek $x_1 = (a_1, b_1)$, $x_2 = (a_2, b_2)$, ..., $x_n = (a_n, b_n)$ tetszőleges elemei $L^{[2]}$ -nek. Ekkor

$$\begin{aligned} & (x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n)^* \vee (x_1^* \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n)^* \vee \dots \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n^*)^* = \\ & (a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_n, b_1 \wedge b_2 \wedge \dots \wedge b_n)^* \vee (b_1^* \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_n, b_1^* \wedge b_2 \wedge \dots \wedge b_n)^* \vee \dots \\ & \vee (a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge b_n^*, b_1 \wedge b_2 \wedge \dots \wedge b_n^*)^* = \\ & ((b_1 \wedge b_2 \wedge \dots \wedge b_n)^*, (b_1 \wedge b_2 \wedge \dots \wedge b_n)^*) \vee ((b_1^* \wedge b_2 \wedge \dots \wedge b_n)^*, (b_1^* \wedge b_2 \wedge \dots \wedge b_n)^*) \vee \dots \\ & \vee ((b_1 \wedge b_2 \wedge \dots \wedge b_n^*)^*, (b_1 \wedge b_2 \wedge \dots \wedge b_n^*)^*) = \end{aligned}$$

$((b_1 \wedge b_2 \wedge \dots \wedge b_n)^* \vee (b_1^* \wedge b_2 \wedge \dots \wedge b_n)^* \vee \dots \vee (b_1 \wedge b_2 \wedge \dots \wedge b_n^*)^*,$
 $(b_1 \wedge b_2 \wedge \dots \wedge b_n)^* \vee (b_1^* \wedge b_2 \wedge \dots \wedge b_n)^* \vee \dots \vee (b_1 \wedge b_2 \wedge \dots \wedge b_n^*)^*) = (1, 1)$
 Ez azt jelenti, hogy $\mathbb{L}^{[2]}$ kielégíti az (L_n) azonosságot. Mivel $(\triangle_L, \vee, \wedge, \otimes, (0, 0), (1, 1))$ részalgebraja $\mathbb{L}^{[2]}$ -nek, ezért pontosan akkor elégíti ki az (L_n) azonosságot, amikor $\mathbb{L}^{[2]}$ is. Végül, mivel $\mathbb{L}$ és $(\triangle_L, \vee, \wedge, \otimes, (0, 0), (1, 1))$ egymással izomorf p -algebrák, kész vagyunk a bizonyítással. $\square$

4.13. Állítás. (i) A $\mathcal{RF}(U, L)$ háló akkor és csak akkor pseudokomplementumos, ha L pseudokomplementumos.

(ii) $\mathcal{RF}(U, L)$ akkor és csak akkor (L_n) -háló, ha L (L_n) -háló.

(iii) Ha $L = (B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$ egy Boole-háló, vagy $L = ([0, 1], \max, \min)$, akkor $\mathcal{RF}(U, L)$ egy Stone-algebra, ahol $(f, g)^*(x) = (\neg g(x), \neg g(x))$, illetve $(f, g)^*(x) = (g(x)^*, g(x)^*)$.

Bizonyítás. (i) Tegyük fel, hogy L pseudokomplementumos. Ekkor $\triangle_L \cong L$ pseudokomplementumos, és a 4.12. Lemma (i) pontjára tekintettel $L^{[2]}$ is pseudokomplementumos. Ezért az (L_u) -ban szereplő $\prod_{u \in U} \mathcal{L}_u$ direkt szorzat is egy pseudokomplementumos háló, amiben $(f, g) \in \prod_{u \in U} \mathcal{L}_u$ esetén $(f, g)^*(x) = (g(x)^*, g(x)^*)$. Megmutatjuk, hogy $\prod_{u \in U}^{[E]} \mathcal{L}_u$ rész- p -algebrája $\prod_{u \in U} \mathcal{L}_u$ -nak. Legyen $(\underline{g}, \bar{g}) \in \prod_{u \in U}^{[E]} \mathcal{L}_u$. Ekkor $\underline{g}(u) = \underline{g}(v)$ és $\bar{g}(u) = \bar{g}(v)$ bármely $(u, v) \in E$ esetén. Ezért $\underline{g}(u)^* = \underline{g}(v)^*$ és $\bar{g}(u)^* = \bar{g}(v)^*$. Így $(\underline{g}, \bar{g})^*(u) = (\underline{g}(u)^*, \bar{g}(u)^*) = (\underline{g}(v)^*, \bar{g}(v)^*) = (\underline{g}, \bar{g})^*(v)$. Ezért $(\underline{g}, \bar{g})^* \in \prod_{u \in U}^{[E]} \mathcal{L}_u$. Ezáltal $\mathcal{RF}(U, L)$ egy pseudokomplementumos háló, mert izomorf $\prod_{u \in U}^{[E]} \mathcal{L}_u$ -val.

Fordítva, tegyük fel, hogy $\mathcal{RF}(U, L)$ pseudokomplementumos. Mivel a 4.6. Állítás szerint L izomorf az $\mathcal{RF}(U, L)$ egy főideáljával, így L pseudokomplementumos.

(ii) Tegyük fel, hogy $\mathbb{L} = (L, \vee, \wedge, *, 0, 1)$ egy (L_n) -háló. Ekkor a 4.12. Lemma (ii) pontjára tekintettel $\mathbb{L}^{[2]}$ és $\triangle_L$ is (L_n) -hálók. Mivel $\mathcal{RF}(U, L)$ ezek szubdirekt szorzata, így (L_n) -háló. Fordítva, legyen $\mathcal{RF}(U, L)$ egy (L_n) -háló. Mivel L izomorf az $\mathcal{RF}(U, L)$ egy főideáljával, $\mathbb{L}$ is (L_n) -háló.

(iii) Ha $(L, \vee, \wedge, *, 0, 1)$ egy p -algebra, akkor $(f, g)^*(x) = (g(x)^*, g(x)^*)$ az (i) bizonyítása alapján. Ezért a Boole-háló esetében $(f, g)^*(x) = (\neg g(x), \neg g(x))$ bármely $x \in B$ esetén. Ekkor $(f, g)^{**}(x) = (g(x), g(x))$, és $(f, g)^*(x) \vee (f, g)^{**}(x) = (1, 1)$, tehát az (S) azonosság teljesül. Mivel $([0, 1], \max, \min, *, 0, 1)$ egy Stone-algebra, ezért a (ii) alapján $\mathcal{RF}(U, L)$. $\square$

Egy $(L, \vee, \wedge, *, +, 0, 1)$ algebra *dupla p -algebra*, ha $\mathbb{L} = (L, \vee, \wedge, *, 0, 1)$ p -algebra és $(L, \vee, \wedge, +, 0, 1)$ *duális p -algebra*, azaz $z \geq x \Leftrightarrow x \vee z = 1$ minden $x, z \in L$ esetén. Az x^+ elem $x \in L$ *duális pseudokomplementuma*.

Megfigyelhetjük, hogy bármely pszeudokomplementumos De Morgan-algebra $(L, \vee, \wedge, \sim, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ dupla p -algebra $x^+ = \sim(\sim x)^*$ definícióval, minden $x \in L$ -re (ld. [99]), mert

$$x \vee z = 1 \Leftrightarrow (\sim x) \wedge (\sim z) = 0 \Leftrightarrow \sim z \leq (\sim x)^* \Leftrightarrow z \geq \sim(\sim x)^*.$$

Egy *dupla Stone-algebra* olyan disztributív dupla p -algebra $(L, \vee, \wedge, *, +, 0, 1)$, amely minden $x \in L$ elemre kielégíti az (S) azonosságot, és annak duálisát:

$$x^+ \wedge x^{++} = 1.$$

Ismert, hogy ha egy De Morgan-algebra Stone-algebra, akkor dupla Stone-algebra is. Így a következő eredményt kapjuk:

4.14. Következmény. *Ha $(L, \vee, \wedge, *, 0, 1)$ egy Stone-De Morgan-algebra, akkor $\mathcal{RF}(U, L)$ egy dupla Stone-algebra. Abban a specifikus esetben, ha $L = ([0, 1], \max, \min)$, akkor $\mathcal{RF}(U, L)$ egy dupla Stone-algebra.*

A *topologikus kvázi-Boole-algebra* (ld. [4]) egy $(A, \vee, \wedge, \sim, l, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ De Morgan-algebra egy további $l: A \rightarrow A$ egyváltozós művelettel, amely kielégíti az alábbi feltételeket:

$$(T1) \quad l(x) \leq x;$$

$$(T2) \quad l(l(x)) = l(x);$$

$$(T3) \quad l(x \wedge y) = l(x) \wedge l(y);$$

$$(T4) \quad l(\mathbf{1}) = \mathbf{1};$$

$$(T5) \quad u(l(x)) = l(x),$$

minden $x, y \in A$ esetén, ahol $x \in A$ -ra $u(x) = \sim(l(\sim x))$, azaz u az l duálisa. Az első négy feltétel azt jelenti, hogy l egy *topologikus belső operátor* az A hálón (ld. [6]). Az $u: A \rightarrow A$ leképezés pedig, amely l duálisa, egy úgynevezett *topologikus lezárási operátor*.

4.15. Állítás. $(\mathcal{RF}(U, L), \vee, \wedge, \simeq, l, (\mathbf{0}, \mathbf{0}), (\mathbf{1}, \mathbf{1}))$ egy *topologikus kvázi-Boole-algebra*, ha $(L, \vee, \wedge, \sim, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ egy De Morgan-algebra, és $\simeq(f_1, f_2) := (\sim f_2, \sim f_1)$, $l(f_1, f_2) = (f_1, f_1)$.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $(L, \vee, \wedge, \sim, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ egy De Morgan-algebra. Ekkor a 4.4. Következmény (ii) pontja alapján $((RFU, L), \vee, \wedge, \simeq, (\mathbf{0}, \mathbf{0}), (\mathbf{1}, \mathbf{1}))$ egy De Morgan-algebra. Könnyű belátni (T1)-(T4) teljesülését:

$$l(f_1, f_2) = (f_1, f_1) \leq (f_1, f_2);$$

$$l(l(f_1, f_2)) = l(f_1, f_1) = (f_1, f_1);$$

$$\begin{aligned} l((f_1, f_2) \wedge (g_1, g_2)) &= l(f_1 \wedge g_1, f_2 \wedge g_2) = (f_1 \wedge g_1, f_1 \wedge g_1) = \\ &= (f_1, f_1) \wedge (g_1, g_1) = l(f_1, f_2) \wedge l(g_1, g_2); \\ l(\mathbf{1}, \mathbf{1}) &= (\mathbf{1}, \mathbf{1}), \end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy $u(f_1, f_2) = \sim(l(\sim(f_1, f_2))) = \sim(l(\sim f_2, \sim f_1)) = \sim(\sim f_2, \sim f_2) = (f_2, f_2)$, ezért $u(l(f_1, f_2)) = u(f_1, f_1) = (f_1, f_1) = l(f_1, f_1)$, tehát (T5) is teljesül. Így $(\mathcal{RF}(U, L), \vee, \wedge, \simeq, l, (\mathbf{0}, \mathbf{0}), (\mathbf{1}, \mathbf{1}))$ egy topologikus kvázi-Boole-algebra. $\square$

Az L Heyting-algebra egy korlátos háló, amelyben minden $a, b \in L$ esetén létezik legnagyobb $x \in L$ elem, amelyre $a \wedge x \leq b$ teljesül. Ezt az elemet nevezzük *a relatív pszeudokomplementumának b-re nézve*, és így jelöljük: $a \Rightarrow b$. Ismert, hogy bármely teljesen disztributív háló egy $(L, \vee, \wedge, \Rightarrow, 0, 1)$ Heyting-algebra, ahol a relatív pszeudokomplementumot a következőképpen értelmezzük:

$$x \Rightarrow y = \bigvee \{z \in L \mid x \wedge z \leq y\}. \quad (\text{RP})$$

Bármely $x \in L$ elem pszeudokomplementuma ezek szerint $x^* := x \Rightarrow 0$, tehát minden Heyting-algebra alaphálója pszeudokomplementumos, és az is ismert, hogy disztributív. Ha $(L, \vee, \wedge, \sim, 0, 1)$ egy De Morgan-algebra, akkor az $(L, \vee, \wedge, \sim, \Rightarrow, 0, 1)$ struktúrát *szimmetrikus Heyting-algebrának* nevezzük [74].

4.16. Következmény. Ha $\mathbb{L} = (L, \vee, \wedge, \sim, 0, 1)$ egy teljesen disztributív De Morgan-algebra, akkor az (RP)-ben megadott $\Rightarrow$ implikáció és $a \simeq (f_1, f_2) := (\sim f_2, \sim f_1)$ leképezés a $\mathbb{H} = (\mathcal{RF}(U, L), \vee, \wedge, \simeq, (\mathbf{0}, \mathbf{0}), (\mathbf{1}, \mathbf{1}))$ szimmetrikus Heyting-algebrát határozza meg $\mathcal{RF}(U, L)$ -en.

Bizonyítás. A 4.7. Következmény szerint $\mathcal{RF}(U, L)$ egy teljesen disztributív háló. Ezért (RP) felhasználásával Heyting-algebrát konstruálhatunk rajta az alábbi módon:

$$(f_1, f_2) \Rightarrow (g_1, g_2) := \bigvee \{(h_1, h_2) \in \mathcal{RF}(U, L) \mid (f_1, f_2) \wedge (h_1, h_2) \leq (g_1, g_2)\},$$

minden $(f_1, f_2), (g_1, g_2) \in \mathcal{RF}(U, L)$ esetén. A 4.4. Következmény (ii) pontja alapján $(\mathcal{RF}(U, L), \vee, \wedge, \simeq, (\mathbf{0}, \mathbf{0}), (\mathbf{1}, \mathbf{1}))$ egy De Morgan-algebra, így $\mathbb{H}$ egy szimmetrikus Heyting-algebra. $\square$

A [11] alapján egy *Nelson-algebra* egy olyan $\mathcal{N} = (N, \vee, \wedge, \sim, 0, 1)$ Kleene-algebra, amelyben minden $a, b \in N$ esetén létezik az $a \mapsto b$ relatív pszeudokomplementuma a -nak $\sim a \vee b$ szerint, és minden $c \in N$ esetén teljesül az alábbi egyenlőség:

$$(a \wedge b) \mapsto c = a \mapsto (b \mapsto c). \quad (\text{N})$$

A definíció szerint tehát $a \mapsto b = a \Rightarrow (\sim a \vee b)$. Minden Nelson-algebrában definiálhatunk egy $\neg$ gyenge negációt a következőképpen:

$$\neg a := a \rightarrow 0, \text{ minden } a \in N \text{ esetén.}$$

Mivel $\mathbb{RS}$ egy teljesen disztributív háló, definiálható rajta egy $(RS, \vee, \wedge, \Rightarrow)$ Heyting-algebra. Továbbá bebizonyították a [79] munkában, hogy $\mathbb{RS}$ egy Nelson-algebra, ahol $\sim (X_E, X^E) = (U \setminus X^E, U \setminus X_E)$ minden $(X_E, X^E) \in RS$ esetén.

A háromértékű Łukasiewicz-algebra egy olyan $(L, \vee, \wedge, \sim, \nabla, 0, 1)$ algebra, amelyre $(L, \vee, \wedge, \sim, 0, 1)$ egy De Morgan-algebra, és ∇ egy egyváltozós művelet, az úgynevezett *lehetőségoperátor*, amely kielégíti az alábbi azonosságokat:

$$(L1) \quad \sim x \vee \nabla x = 1,$$

$$(L2) \quad \sim x \wedge x = \sim x \wedge \nabla x,$$

$$(L3) \quad \nabla(x \wedge y) = \nabla x \wedge \nabla y.$$

Ismert, hogy minden háromértékű Łukasiewicz-algebra egyben (féligegyszerű) Nelson-algebra és Heyting-algebra is (ld. [73], [74]), ahol

$$x \Rightarrow y = \sim \nabla x \vee y \vee (\nabla \sim x \wedge \nabla y) \text{ és } x \mapsto y = \nabla \sim x \vee y.$$

Triviálisan minden $(B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$ Boole-algebra egy háromértékű Łukasiewicz-algebra, ahol $\nabla x = x$. Megjegyezzük, hogy a [3] alapján $\mathbb{RS}$ -en definiálható egy háromértékű Łukasiewicz-algebra (ld. még [98]) az alábbi módon:

$$\nabla(X_E, X^E) = (X^E, X^E), \text{ minden } (X_E, X^E) \in RS \text{ esetén.}$$

4.17. Tétel. *Tegyük fel, hogy $E \subseteq U \times U$ különbözik az identitásrelációtól. Ekkor a következő állítások ekvivalensek:*

- (i) $\mathcal{RF}(U, L)$ egy háromértékű Łukasiewicz-algebra, ahol $\nabla(f_1, f_2) := (f_2, f_2)$, $(f_1, f_2) \in \mathcal{RF}(U, L)$.
- (ii) $\mathcal{RF}(U, L)$ egy Nelson-algebra
- (iii) $\mathcal{RF}(U, L)$ egy Kleene-algebra
- (iv) L egy Boole-háló.

Bizonyítás. (iv) $\Rightarrow$ (i). Tegyük fel, hogy L egy Boole-háló. Ekkor ismert, hogy $(L^{[2]}, \vee, \wedge, \sim, \nabla, (0, 0), (1, 1))$, ahol $\sim(x, y) = (\neg y, \neg x)$ és $\nabla(x, y) = (y, y)$, egy háromértékű Łukasiewicz-algebra, amelynek részalgebrája $(\Delta_L, \vee, \wedge, \sim, \nabla, (0, 0), (1, 1))$. Ezért $\mathcal{RF}(U, L)$, amely ezek egy szubdirekt szorzatával izomorf, szintén háromértékű Łukasiewicz-algebra, ahol $\nabla(f_1, f_2)(x) = \nabla(f_1(x), f_2(x)) = (f_2(x), f_2(x))$, minden $x \in U$ és minden $(f_1, f_2) \in \mathcal{RF}(U, L)$ esetén.

Az (i) $\Rightarrow$ (ii) és (ii) $\Rightarrow$ (iii) implikációk nyilvánvalóak.

(iii) $\Rightarrow$ (iv). Tudjuk, hogy $\mathcal{RF}(U, L) \cong \prod_{u \in U}^{[E]} \mathcal{L}_u$. Mivel E nem az identitás-reláció, létezik $u_0 \in U$, amelyre u_0 nem egy singleton, így $\mathcal{L}_{u_0} = L^{[2]}$. Ekkor $L^{[2]}$ – mint $\mathcal{RF}(U, L)$ egyik szubdirekt tényezője – szintén Kleene-algebra, ahol $\simeq (x_1, x_2) = (\sim x_2, \sim x_1)$, minden $(x_1, x_2) \in L^{[2]}$ esetén, a 4.1. Lemma értelmében. A [71] alapján ekkor L egy Boole-háló, amelyben minden $x \in L$ esetén $\sim x$ az x komplementuma L -ben. $\square$

Legyen L egy teljes atomisztikus Boole-háló. Ekkor L teljesen egyesítés-irreducibilis elemeinek halmaza, J , egybeesik az atomok halmazával, A -val. Mivel bármely $B \subseteq A$ halmaz esetén $B = A(b)$, ahol $b := \bigvee B$, minden A -beli részhalmaz L -zárt. Jelölje $x \in L$ komplementumát $\neg x$. Ismert, hogy $A(\neg x) = A(x)^c$. Ezeket a tényeket felhasználva bizonyítjuk a következő tételt.

4.18. Állítás. *Legyen E egy ekvivalenciareláció az $U \neq \emptyset$ alaphalmazon, és legyen L egy teljes, atomisztikus Boole-háló. Ekkor a $(\mathcal{RF}(U, L), \vee, \wedge, \simeq, \nabla, (\mathbf{0}, \mathbf{0}), (\mathbf{1}, \mathbf{1}))$ háromértékű Łukasiewicz-algebra izomorf az $(U \times A, R)$ approximációs térbeli $(RS(U \times A, R), \vee, \wedge, \sim, \nabla, (\emptyset, \emptyset), (U, U))$ durvahalmaz-algebrájával, ahol $R = E \times \triangle_A$.*

Bizonyítás. Először vegyük észre, hogy bármely $(T, V) \in RS(U \times A, R)$ durva halmaz zárt, mivel bármely $x \in U$ esetén a $T(x), V(x) \subseteq A$ halmazok L -zártak. Mivel minden teljes, atomisztikus Boole-háló egy térszerű háló, amely kielégíti a (JID) tulajdonságot, így a 4.9. Tétel alapján azt kapjuk, hogy a $\Phi: \mathcal{RF}(U, L) \rightarrow RS(U \times J, R)$, $\Phi(f_1, f_2) = (\varrho(f_1), \varrho(f_2))$, $(f_1, f_2) \in \mathcal{RF}(U, L)$ leképezés egy hálózomorfizmus. Bebizonyítjuk, hogy Φ egy izomorfizmus a háromértékű Łukasiewicz-algebrára nézve is.

Vegyük észre, hogy bármely $f \in \mathcal{F}(U, L)$ esetén $A((\sim f)(x)) = A(\neg f(x)) = A(f(x))^c$ miatt $\varrho(\sim f) = \bigcup_{x \in U} \{x\} \times A((\sim f)(x)) = \bigcup_{x \in U} \{x\} \times A(f(x))^c$. Ekkor $(x, y) \in \varrho(\sim f) \Leftrightarrow (x, y) \notin \bigcup_{x \in U} \{x\} \times A(f(x)) = \varrho(f)$, ami azt jelenti, hogy $\varrho(\sim f) = \varrho(f)^c$. Ezt felhasználva:

$$\begin{aligned} \Phi(\simeq (f_1, f_2)) &= \Phi(\sim f_2, \sim f_1) = (\varrho(\sim f_2), \varrho(\sim f_1)) = (\varrho(f_2)^c, \varrho(f_1)^c) \\ &= \sim (\varrho(f_1), \varrho(f_2)). \end{aligned}$$

Továbbá:

$$\Phi(\nabla(f_1, f_2)) = \Phi(f_2, f_2) = (\varrho(f_2), \varrho(f_2)) = \nabla((\varrho(f_1), \varrho(f_2))) = \nabla\Phi(f_1, f_2),$$

és ezzel a bizonyítás kész. $\square$

5. FUZZY DURVA HALMAZOK FUZZY REFERENCIA-HALMAZZAL

Ebben a fejezetben az alsó és felső fuzzy approximációk segítségével kvázi-rendezéseket definiálok, amit arra fogok felhasználni, hogy a fő eredményeket bizonyítsam. Először jellemzem azokat a fuzzy halmazpárokat, amelyek fuzzy durva halmazokat alkotnak egy U alaphalmazon értelmezett θ t -hasonlósági relációra nézve bizonyos t -normák és implikátorok esetén.

Bemutatom, hogy milyen feltételek szükségesek ahhoz, hogy a fuzzy durva halmazok hálót alkossanak, amennyiben U véges, vagy θ , illetve a fuzzy halmazok értékkészlete egy rögzített véges lánc. Megmutatom továbbá, hogy ezek a feltételek teljesülnek a min t -norma és bármely involutív negátorral és a max konormával definiált S -implikátor esetén.

A két fő elmélet integrálásának első lépései Del Cerro és Prade [10], Nakamura [77], valamint Dubois és Prade [24] munkáihoz kapcsolódnak. A [24] cikkben a fuzzy durva halmazokat az $(\underline{f}, \overline{f}) \in \mathcal{F}(U) \times \mathcal{F}(U)$ párokkal definiálják, amelyek egy $f \in \mathcal{F}(U)$ fuzzy halmaz alsó és felső approximációi. Ezeket a fuzzy approximációkat a min t -norma, a max t -konorma és egy hasonlósági reláció segítségével határozták meg. A megközelítésüket több cikk is általánosította, például [21, 35, 49, 50, 87, 100, 119, 120] és [22], ahol a fuzzy durva halmazokat különböző t -normák (más néven konjunktorkok) és kapcsolódó implikátorok alapján definiálták. Ezeknek a közelítő operátoroknak a részletes vizsgálatát a [22], [100], valamint [69], [102] cikkekben dolgozták ki, ahol az L -fuzzy halmazok alsó és felső közelítéseinek struktúráját is tanulmányozták. Ezen tulajdonságok axiomatikus megközelítését többek között a [7], [67], [70] és [75] tartalmazza.

5.1. Implikátorok

Negátornak nevezzük az $n: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ csökkenő leképezést, amelyre $n(0) = 1$ és $n(1) = 0$. Az n negátor *involutív*, ha teljesül, hogy $n(n(x)) = x$, minden $x \in [0, 1]$ esetén (ld. például [28]). Az úgynevezett *szokásos negátor* $n(x) := 1 - x$, $x \in [0, 1]$ egy involutív negátor.

Legyen adott egy n involutív negátor, egy $\odot$ t -norma és egy $\oplus$ t -konorma. Azt mondjuk, hogy $\odot$ és $\oplus$ egy n -*duális* párt alkotnak [100], ha minden $x, y \in [0, 1]$ esetén

$$n(x \oplus y) = n(x) \odot n(y).$$

Nyilvánvalóan ebből az azonosságból következik az is, hogy

$$n(x \odot y) = n(x) \oplus n(y).$$

Például a $\min(x, y)$ és a $\max(x, y)$ jól ismert n -duális párt alkotnak bármely involutív negátorral $[0, 1]$ -en.

Az *implikátor* egy bináris művelet (leképezés) $\triangleright: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$, amely az első változó szerint csökkenő, a második szerint növekvő, és kielégíti a következő határfeltételeket:

$$0 \triangleright 0 = 0 \triangleright 1 = 1 \triangleright 1 = 1 \text{ és } 1 \triangleright 0 = 0.$$

A $\triangleright$ egy *határimplikátor*, ha minden $x \in [0, 1]$ esetén teljesül, hogy $1 \triangleright x = x$. A $\triangleright$ határimplikátoroknak két fontos osztálya van (ld. például [22]). Az egyik egy adott $\odot$ t -normához tartozó úgynevezett *R-implikátor*, amelyet a következőképpen határozzunk meg:

$$x \triangleright y := \bigvee \{z \in [0, 1] \mid x \odot z \leq y\}, \text{ minden } x, y \in [0, 1] \text{ esetén.}$$

Ha $\odot$ egy folytonos t -norma, akkor az $([0, 1], \vee, \wedge, \odot, \triangleright, 0, 1)$ algebra egy úgynevezett *kommutatív reziduált háló* (ld. [34]). A $\oplus$ t -konormához és az n negátorhoz tartozó *S-implikátort* az alábbi módon definiáljuk:

$$x \triangleright y := n(x) \oplus y$$

A $\triangleright_L$ *Lukasiewicz implikátor* egyszerre *R-implikátor* és *S-implikátor*, amelyet így definiálunk: $x \triangleright_L y := \min(1, 1 - x + y)$, $\forall x \in [0, 1]$. A $\triangleright_{KD}$ *Kleene-Dienes (KD) implikátor* egy *S-implikátor*, amelyet úgy definiálunk, hogy $x \triangleright_{KD} y := \max(1 - x, y)$, $\forall x \in [0, 1]$ esetén. Ha $\triangleright$ egy implikátor, akkor az ehhez tartozó negátor a következőképpen definiált: $n(x) = x \triangleright 0$. Ha n egy involutív negátor, és $\triangleright$ egy balról folytonos t -norma alapján definiált *R-implikátor*, akkor azt mondjuk, hogy $\triangleright$ egy *ITML-implikátor* [22].

5.2. Fuzzy durva halmazok

Legyen (U, θ) egy fuzzy approximációs tér, ahol $\theta: U \times U \rightarrow [0, 1]$ egy reláció. Ekkor a $f \in \mathcal{F}(U)$ fuzzy halmazhoz definiálták annak *alsó közelítését* $\underline{\theta}(f)$ és *felső közelítését* $\bar{\theta}(f)$ egy *hasonlósági reláció* θ alapján az alábbi képletekkel:

$$\underline{\theta}(f)(x) := \bigwedge \{\max(1 - \theta(x, y), f(y)) \mid y \in U\}, \text{ minden } x \in U \text{ esetén;}$$

$$\bar{\theta}(f)(x) := \bigvee \{\min(\theta(x, y), f(y)) \mid y \in U\}, \text{ minden } x \in U \text{ esetén.}$$

Az f referencialhalmazhoz tartozó *fuzzy durva halmazt* az $(\underline{\theta}(f), \bar{\theta}(f)) \in \mathcal{F}(U) \times \mathcal{F}(U)$ párral azonosíthatjuk [24]. Ezt a definíciót több cikkben általánosították is általánosították, jelen munkában az [22] és [100] által javasolt, implikátorokon és t -normákon alapuló megközelítést használom. A továbbiakban tehát legyen $\odot$ egy t -norma, és $\triangleright$ egy határimplikátor a $[0, 1]$ intervallumon.

5.1. Definíció. Ha (U, θ) egy fuzzy approximációs tér, akkor bármely $f \in \mathcal{F}(U)$ fuzzy halmazhoz rendelt $\underline{\theta}(f)$ fuzzy alsó approximációt és $\bar{\theta}(f)$ fuzzy felső approximációt a következőképpen definiáljuk:

$$\underline{\theta}(f)(x) := \bigwedge \{\theta(x, y) \triangleright f(y) \mid y \in U\}, \text{ minden } x \in U \text{ esetén.}$$

$$\bar{\theta}(f)(x) := \bigvee \{\theta(x, y) \odot f(y) \mid y \in U\}, \text{ minden } x \in U \text{ esetén.}$$

Az $(\underline{\theta}(f), \bar{\theta}(f)) \in \mathcal{F}(U) \times \mathcal{F}(U)$ párt az (U, θ) approximációs térben definiált fuzzy durva halmaznak nevezzük.

Ez a definíció magában foglalja a Dubois és Prade által adott definíciót is, ahol $\odot$ a minimum t -norma, $\triangleright$ pedig a Kleene–Dienes implikátor, azaz $x \triangleright_{KD} y = \max(1 - x, y)$.

Vegyük észre, hogy $\underline{\theta}$ és $\bar{\theta}$ rendezésőrző operátorok, azaz ha $f \leq g$, akkor $\underline{\theta}(f) \leq \underline{\theta}(g)$ és $\bar{\theta}(f) \leq \bar{\theta}(g)$. Továbbá, ha θ egy reflexív fuzzy reláció, akkor $\underline{\theta}(f) \leq f \leq \bar{\theta}(f)$ teljesül minden $f \in \mathcal{F}(U)$ esetén [22, 100]. A következő tulajdonságok különös jelentőséggel bírnak a későbbi bizonyítások során:

(D) Legyen $\odot$ egy olyan balról folytonos t -norma, amelyből származó $\triangleright$ R -implikátor egy $ITML$ -implikátor, azaz $n(x) := x \triangleright 0$, $x \in U$ egy involutív negátor; vagy legyen n egy involutív negátor, $\oplus$ egy t -konorma, amely n -duálisa $\odot$ -nak, és $\triangleright$ az ezek által meghatározott S -implikátor (azaz $x \triangleright y = n(x) \oplus y$). Ekkor teljesül, hogy $n(\bar{\theta}(f)) = \underline{\theta}(n(f))$ és $n(\underline{\theta}(f)) = \bar{\theta}(n(f))$ (ld. például [22], [69] vagy [100]).

(ID) Legyen $\odot$ egy balról folytonos t -norma és $\triangleright$ a belőle származó R -implikátor; vagy legyen n egy involutív negátor, $\oplus$ egy t -konorma, amely n -duálisa $\odot$ -nak, és $\triangleright$ az általuk meghatározott S -implikátor. Ha θ egy $\odot$ -tranzitív fuzzy reláció, akkor bármely $f, g \in \mathcal{F}(U)$ esetén teljesül, hogy $\bar{\theta}(\bar{\theta}(f)) = \bar{\theta}(f)$ és $\underline{\theta}(\underline{\theta}(g)) = \underline{\theta}(g)$ (ld. [22], [69], [100]).

5.2. Lemma. *Legyen (U, θ) egy fuzzy approximációs tér úgy, hogy a θ reláció véges értékkészletű. Ha $f \in \mathcal{F}(U)$ véges értékkészletű, akkor a fuzzy halmazok $\underline{\theta}(f)$ és $\bar{\theta}(f)$ is véges értékkészletűek.*

Bizonyítás. Mivel $\{\theta(x, y) \mid x, y \in U\}$ és $\{f(y) \mid y \in U\}$ véges halmazok, ezért a Descartes-szorzatuk $\{(\theta(x, y), f(y)) \mid x, y \in U\}$ is véges, így a $\mathcal{C} = \{\theta(x, y) \odot f(y) \mid x, y \in U\}$ és $\mathcal{I} = \{\theta(x, y) \triangleright f(y) \mid x, y \in U\}$ halmazok is végesek. Ez pedig azt jelenti, hogy a $\mathcal{C}$ és $\mathcal{I}$ halmazokban csak véges sok (különböző) halmaz van $\{\theta(x, y) \triangleright f(y) \mid y \in U\}$ vagy $\{\theta(x, y) \odot f(y) \mid y \in U\}$ alakban, amiből azonnal következik, hogy $\underline{\theta}(f)$ és $\bar{\theta}(f)$ is véges sok különböző értéket vehetnek fel, azaz véges értékkészletűek. $\square$

5.3. Alsó és felső approximációkból származtatott kvázi-rendezések

A következőkben tételezzük fel, hogy az (ID)-ben szereplő feltételek teljesülnek, és $n(x) := x \triangleright 0$. Tetszőleges $f, g \in \mathcal{F}(U)$ esetén legyen $F = \bar{\theta}(f)$ és $G = \underline{\theta}(g)$. F és G felhasználásával két bináris relációt definiálhatunk $R(F)$ és $\varrho(G)$ jelöléssel U felett az alábbi módon:

5.3. Definíció. *Legyen (U, θ) egy fuzzy approximációs tér, $a, b \in U$ és $F = \bar{\theta}(f)$, $G = \underline{\theta}(g)$. Ekkor*

(i) $(a, b) \in R(F) \Leftrightarrow F(a) = \theta(a, b) \odot F(b)$;

(ii) $(a, b) \in \varrho(G) \Leftrightarrow G(a) = \theta(a, b) \triangleright G(b)$.

5.4. Állítás. (i) $(a, b) \in R(F)$ esetén $F(a) \leq \theta(a, b)$, és $(a, b) \in \varrho(G)$ esetén $G(a) \geq n(\theta(a, b))$.

(ii) Ha θ reflexív, akkor bármely $f, g \in \mathcal{F}(U)$ esetén $R(F)$ és $\varrho(G)$ reflexívek.

(iii) Ha θ egy $\odot$ -kvázirendezés, akkor $R(F)$ és $\varrho(G)$ éles kvázirendezések, továbbá

$F(a) \geq \theta(a, y) \odot F(y)$, $G(a) \leq \theta(a, y) \triangleright G(y)$ minden $a, y \in U$ esetén.

(iv) Ha n involutív, akkor $R(F) = \varrho(n(F))$ és $\varrho(G) = R(n(G))$.

(v) Legyen $\odot$ a minimum t -norma, n egy involutív negátor, és $x \triangleright y := \max(n(x), y)$. Ha θ hasonlósági reláció, akkor $(a, b) \in R(F) \Leftrightarrow F(a) \leq \theta(a, b)$ és $(a, b) \in \varrho(G) \Leftrightarrow G(a) \geq n(\theta(a, b))$.

Bizonyítás. (i) Definíció szerint $(a, b) \in R(F)$ esetén $F(a) = \theta(a, b) \odot F(b) \leq \theta(a, b)$, és $(a, b) \in \varrho(G)$ esetén $G(a) = \theta(a, b) \triangleright G(b) \geq \theta(a, b) \triangleright 0 = n(\theta(a, b))$.

(ii) Ha θ reflexív, akkor $\theta(a, a) = 1$ miatt $F(a) = \theta(a, a) \odot F(a)$ és $G(a) = \theta(a, a) \triangleright G(a)$, azaz $(a, a) \in R(F)$ és $(a, a) \in \varrho(G)$ teljesül minden $a \in U$ esetén. Így $R(F)$ és $\varrho(G)$ reflexívek.

(iii) Legyen θ egy $\odot$ -kvázirendezés. Ekkor $R(F)$ és $\varrho(G)$ reflexívek, az (ID) tulajdonság teljesül, és ezért $F(a) = \bar{\theta}(F)(a)$, $G(a) = \underline{\theta}(G)(a)$ miatt $F(a) = \bigvee \{\theta(x, y) \odot F(y) \mid y \in U\} \geq \theta(a, y) \odot F(y)$ és $G(a) = \bigwedge \{\theta(x, y) \triangleright G(y) \mid y \in U\} \leq \theta(a, y) \triangleright G(y)$ minden $y \in U$ esetén.

Legyen $a, b, c \in U$ úgy, hogy $(a, b), (b, c) \in R(F)$. Ekkor $F(a) = \theta(a, b) \odot F(b)$ és $F(b) = \theta(b, c) \odot F(c)$ miatt $F(a) = (\theta(a, b) \odot \theta(b, c)) \odot F(c) \leq \theta(a, c) \odot F(c)$, mivel θ $\odot$ -tranzitív. Innen $F(a) \geq \theta(a, c) \odot F(c)$ adódik, így $F(a) = \theta(a, c) \odot F(c)$, azaz $(a, c) \in R(F)$. Tehát $R(F)$ tranzitív is, vagyis kvázirendezés.

Legyen $(a, b), (b, c) \in \varrho(G)$. Ekkor $G(a) = \theta(a, b) \triangleright G(b)$ és $G(b) = \theta(b, c) \triangleright G(c)$ miatt $G(a) = \theta(a, b) \triangleright (\theta(b, c) \triangleright G(c))$. Ha $\triangleright$ R -implikátor, akkor $\theta(a, b) \triangleright (\theta(b, c) \triangleright G(c)) = (\theta(a, b) \odot \theta(b, c)) \triangleright G(c)$. Ha $\triangleright$ S -implikátor $x \triangleright y = n(x) \oplus y$, akkor

$$\theta(a, b) \triangleright (\theta(b, c) \triangleright G(c)) = n(\theta(a, b)) \oplus (n(\theta(b, c)) \oplus G(c)) =$$

$$n(\theta(a, b) \odot \theta(b, c)) \oplus G(c) = (\theta(a, b) \odot \theta(b, c)) \triangleright G(c).$$

Így mindkét esetben $G(a) = (\theta(a, b) \odot \theta(b, c)) \triangleright G(c)$. Mivel θ $\odot$ -tranzitív (és $\triangleright$ csökkenő az első változóra nézve), ezért $G(a) \geq \theta(a, c) \triangleright G(c)$. Mivel $G(a) \leq \theta(a, c) \triangleright G(c)$ is teljesül, így $G(a) = \theta(a, c) \triangleright G(c)$, azaz $(a, c) \in \varrho(G)$. Így $\varrho(G)$ is kvázirendezés.

(iv) Vegyük észre, hogy ebben az esetben a (D) tulajdonság teljesül, azaz $n(\bar{\theta}(f)) = \underline{\theta}(n(f))$. Ebből következik, hogy $n(F) = \underline{\theta}(n(f))$, és $(a, b) \in R(F)$ azt jelenti, hogy $F(a) = \theta(a, b) \odot F(b)$. Mivel n involutív, ez ekvivalens azzal, hogy $n(F(a)) = n(\theta(a, b) \odot F(b))$. Ha $\triangleright$ egy *ITML*-implikátor, akkor $n(\theta(a, b) \odot F(b)) = (\theta(a, b) \odot F(b)) \triangleright 0 = \theta(a, b) \triangleright (F(b) \triangleright 0) = \theta(a, b) \triangleright n(F(b))$. Ha $\triangleright$ *S*-implikátor, akkor $n(\theta(a, b) \odot F(b)) = n(\theta(a, b)) \oplus n(F(b)) = \theta(a, b) \triangleright n(F(b))$. Mindkét esetben teljesül, hogy $n(F(a)) = n(\theta(a, b) \odot F(b)) \Leftrightarrow n(F)(a) = \theta(a, b) \triangleright n(F)(b)$. A jobb oldal azt jelenti, hogy $(a, b) \in \varrho(n(F))$. Így $(a, b) \in R(F) \Leftrightarrow (a, b) \in \varrho(n(F))$, vagyis $R(F) = \varrho(n(F))$.

Legyen $g = n(h)$ valamilyen $h \in \mathcal{F}(U)$ esetén. Ekkor $n(G) = n(\underline{\theta}(g)) = \bar{\theta}(n(g)) = \bar{\theta}(h)$, és $G = n(\bar{\theta}(h))$. Így $(a, b) \in \varrho(G) \Leftrightarrow (a, b) \in \varrho(n(\bar{\theta}(h))) \Leftrightarrow (a, b) \in R(\bar{\theta}(h)) = R(n(G))$, ami bizonyítja, hogy $\varrho(G) = R(n(G))$.

(v) (i) alapján $(a, b) \in R(F)$ esetén $F(a) \leq \theta(a, b)$, míg $(a, b) \in \varrho(G)$ esetén $G(a) \geq n(\theta(a, b))$. Már csak az implikációk megfordítását kell bizonyítanunk. Tegyük fel, hogy $F(a) \leq \theta(a, b)$. Mivel θ $\odot$ -kvázirendezés is, (iii) alapján $F(b) \geq \theta(b, a) \odot F(a) = \min(\theta(b, a), F(a)) = \min(\theta(a, b), F(a)) = F(a)$. Ezért $F(a) \leq \min(\theta(a, b), F(b))$. Ugyanakkor $F(a) \geq \theta(a, b) \odot F(b) = \min(\theta(a, b), F(b))$ is teljesül, így $F(a) = \min(\theta(a, b), F(b))$, azaz $(a, b) \in R(F)$.

Most legyen $G(a) \geq n(\theta(a, b))$. Mivel $\theta(b, a) = \theta(a, b)$, és (iii) alapján $G(b) \leq \theta(b, a) \triangleright G(a) = \max(n(\theta(a, b)), G(a)) = G(a)$, azt kapjuk, hogy $G(a) \geq \max(n(\theta(a, b)), G(b))$. Mivel $G(a) \leq \theta(a, b) \triangleright G(b) = \max(n(\theta(a, b)), G(b))$ is fennáll, következik, hogy $G(a) = \max(n(\theta(a, b)), G(b)) = \theta(a, b) \triangleright G(b)$, azaz $(a, b) \in \varrho(G)$.

□

5.5. Következmény. Ha az 5.4. Állítás (v) pontjában szereplő feltételek teljesülnek, akkor $(a, b) \notin R(F) \Leftrightarrow F(a) > \theta(a, b)$ és $(a, b) \notin \varrho(G) \Leftrightarrow G(a) < n(\theta(a, b))$.

5.6. Állítás. Legyen θ egy $\odot$ -kvázirendezés és $F = \bar{\theta}(f)$, $G = \underline{\theta}(g)$ valamilyen $f, g \in \mathcal{F}(U)$ esetén, továbbá $a, b \in U$. Ekkor a következők igazak:

(i) Ha $(a, b) \in R(F)$, akkor bármely $h \in \mathcal{F}(U)$ esetén, amelyre $h \leq F$ és $h(b) = F(b)$ teljesül, az is fennáll, hogy $\bar{\theta}(h)(a) = F(a)$.

(ii) Ha $(a, b) \in \varrho(G)$, akkor bármely $h \in \mathcal{F}(U)$ esetén, amelyre $h \geq G$ és $h(b) = G(b)$ teljesül, az is fennáll, hogy $\underline{\theta}(h)(a) = G(a)$.

Bizonyítás. (i) Definíció szerint $F(a) = \theta(a, b) \odot F(b)$. Ebből következik, hogy:

$$\begin{aligned} \bar{\theta}(h)(a) &= \bigvee \{ \theta(a, y) \odot h(y) \mid y \in U \} \geq \\ &\theta(a, b) \odot h(b) = \theta(a, b) \odot F(b) = F(a) \end{aligned}$$

Másrészt $\bar{\theta}(h) \leq \bar{\theta}(F) = F$ miatt $\bar{\theta}(h)(a) \leq F(a)$. Így tehát $\bar{\theta}(h)(a) = F(a)$.

(ii) Hasonlóan, most $G(a) = \theta(a, b) \triangleright G(b)$. Ebből következik:

$$\begin{aligned}\underline{\theta}(h)(a) &= \bigwedge \{ \theta(a, y) \triangleright h(y) \mid y \in U \} \leq \\ \theta(a, b) \triangleright h(b) &= \theta(a, b) \triangleright G(b) = G(a).\end{aligned}$$

Mivel $\underline{\theta}(h) \geq \underline{\theta}(G) = G$ miatt $\underline{\theta}(h)(a) \geq G(a)$, így $\underline{\theta}(h)(a) = G(a)$. $\square$

5.4. A $R(F)$ és $\varrho(G)$ kvázirendezések által indukált ekvivalenciák

Ebben a szakaszban tételezzük fel, hogy az (ID) feltételei teljesülnek, azaz hogy $\odot$ egy balról folytonos t -norma, $\triangleright$ pedig a belőle származtatott R -implikátor, valamint $n(x) = x \triangleright 0$ vagy pedig n egy involutív negátor, $\oplus$ az $\odot$ -hoz n -duális t -konorma, és $\triangleright$ a belőlük származtatott S -implikátor. Tegyük fel továbbá, hogy (U, θ) egy approximációs tér a $\theta \odot$ -hasonlósági relációval, valamint hogy $F = \bar{\theta}(f)$ és $G = \underline{\theta}(g)$ valamilyen $f, g \in \mathcal{F}(U)$ esetén. Az 5.4. Állítás (iii) pontja alapján $R(F), \varrho(G) \subseteq U \times U$ (éles) kvázirendezések. Ismert, hogy bármely $q \subseteq U \times U$ kvázirendezés esetén az $\varepsilon_q := q \cap q^{-1}$ reláció ekvivalencia, és q egy *természetes részenrendezést* indukál az U/ε_q faktorhalmazon a következő módon: Azt mondjuk, hogy az $A, B \in U/\varepsilon_q$ osztályokra $A \leq_q B$ akkor teljesül, ha van olyan $a \in A$ és $b \in B$, amelyre $(a, b) \in q$. Ez ekvivalens azzal, hogy $(x, y) \in q$ minden $x \in A$ és $y \in B$ esetén teljesül.

Ennek megfelelően bevezethetjük a következő két ekvivalenciarelációt, $E(F)$ és $\varepsilon(G)$ néven:

$$E(F) := R(F) \cap R(F)^{-1} \text{ és } \varepsilon(G) := \varrho(G) \cap \varrho(G)^{-1}.$$

Az $U/E(F)$ és $U/\varepsilon(G)$ faktorhalmazokon értelmezett megfelelő (természetes) részenrendezések a következőképpen definiálhatók:

Bármely $E_1, E_2 \in U/E(F)$ esetén $E_1 \leq_{R(F)} E_2 \Leftrightarrow (a_1, a_2) \in R(F)$ valamely $a_1 \in E_1$ és $a_2 \in E_2$ elemre. Hasonlóan, bármely $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2 \in U/\varepsilon(G)$ esetén $\mathcal{E}_1 \leq_{\varrho(G)} \mathcal{E}_2 \Leftrightarrow (b_1, b_2) \in \varrho(G)$ valamely $b_1 \in \mathcal{E}_1$ és $b_2 \in \mathcal{E}_2$ elemre.

Egy E osztályt *maximális $E(F)$ -osztálynak* nevezzük, ha az $(U/E(F), \leq_{R(F)})$ részenrendezett halmazstruktúrájának maximális eleme, és $\mathcal{E}$ egy *maximális $\varepsilon(G)$ -osztály*, ha maximális elem az $(U/\varepsilon(G), \leq_{\varrho(G)})$ részenrendezett halmazban. Az $a \in U$ elemhez tartozó $E(F)$ - és $\varepsilon(G)$ -osztályokat rendre $[a]_{E(F)}$ és $[a]_{\varepsilon(G)}$ jelöli.

Most több olyan tulajdonságot is bizonyítok ezekre az osztályokra, amelyek segítségével jellemezhetők azok a fuzzy halmazpárok, amelyek fuzzy durva halmazt alkotnak.

5.7. Lemma. *A következő állítások érvényesek:*

- (i) Ha $E \subseteq U$ egy $E(F)$ -osztály, akkor $F(a) = F(b) \leq \theta(a, b)$ minden $a, b \in E$ esetén;
- (ii) Ha $\mathcal{E} \subseteq U$ egy $\varepsilon(G)$ -osztály, akkor $G(a) = G(b) \geq n(\theta(a, b))$ minden $a, b \in \mathcal{E}$ esetén;
- (iii) Ha $E \subseteq U$ egy maximális $E(F)$ -osztály, akkor $\theta(a, z) \odot F(z) < F(a) = F(b) \leq \theta(a, b)$ és $\theta(a, z) < \theta(a, b)$ minden $a, b \in E$ és $z \notin E$ esetén;
- (iv) Ha $\mathcal{E} \subseteq U$ egy maximális $\varepsilon(G)$ -osztály, akkor $n(\theta(a, b)) \leq G(a) = G(b) < \theta(a, z) \triangleright G(z)$ és $\theta(a, z) < \theta(a, b)$ minden $a, b \in \mathcal{E}$ és $z \notin \mathcal{E}$ esetén;
- (v) Tegyük fel, hogy $n(x) = x \triangleright 0$ involutív. Ekkor az $E(F)$ -osztályok és a $\varepsilon(n(F))$ -osztályok megegyeznek, és $E \subseteq U$ akkor és csak akkor maximális $E(F)$ -osztály, ha egyben maximális $\varepsilon(n(F))$ -osztály is.

Bizonyítás. (i) Ha $E \subseteq U$ egy $E(F)$ -osztály, akkor $(a, b), (b, a) \in R(F)$ teljesül minden $a, b \in E$ esetén. Ebből következik, hogy $F(a) = \theta(a, b) \odot F(b) \leq \theta(a, b)$, $F(b)$ és $F(b) = \theta(b, a) \odot F(a) \leq F(a)$. Így $F(b) = F(a) \leq \theta(a, b)$ adódik.

(ii) Ha $\mathcal{E} \subseteq U$ egy $\varepsilon(G)$ -osztály, akkor $(a, b), (b, a) \in \varrho(G)$ teljesül. Ebből következik, hogy $G(a) = \theta(a, b) \triangleright G(b) \geq 1 \triangleright G(b) = G(b)$ és $G(b) \geq \theta(b, a) \triangleright G(a) \geq 1 \triangleright G(a) = G(a)$, minden $a, b \in \mathcal{E}$ esetén. Tehát $G(a) = G(b)$. Az 5.4. Állítás (i) pontja alapján $G(a) = G(b) \geq n(\theta(a, b))$ adódik minden $a, b \in \mathcal{E}$ esetén.

(iii) Legyen E egy maximális $E(F)$ -osztály. Ekkor $F(a) = \theta(a, b) \odot F(b)$, $F(b) = \theta(a, b) \odot F(a)$, és az (i) pont alapján $F(a) = F(b) \leq \theta(a, b)$. Az 5.4. Állítás (iii) pontja szerint $F(a) \geq \theta(a, z) \odot F(z)$. Mivel $E \not\subseteq [z]_{E(F)}$ azt jelenti, hogy $(a, z) \notin R(F)$ minden $z \notin E$ esetén, ezért $F(a) > \theta(a, z) \odot F(z)$ minden $z \notin E$ -re. Tegyük fel, hogy $\theta(a, c) \geq \theta(a, b)$ valamely $c \notin E$ esetén. Ekkor $F(c) \geq \theta(c, a) \odot F(a) = \theta(a, c) \odot F(b) \geq \theta(a, b) \odot F(b) = F(a)$. Ez viszont azt eredményezi, hogy $F(a) > \theta(a, c) \odot F(c) \geq \theta(a, b) \odot F(a) = F(b)$, ami ellentmondás. Ezért $\theta(a, z) < \theta(a, b)$ minden $z \notin E$ esetén.

(iv) Ha $\mathcal{E} \subseteq U$ egy maximális $\varepsilon(G)$ -osztály, akkor $G(a) = \theta(a, b) \triangleright G(b)$, $G(b) = \theta(a, b) \triangleright G(a)$, és az (i) pont alapján $n(\theta(a, b)) \leq G(a) = G(b)$ teljesül minden $a, b \in \mathcal{E}$ esetén, valamint $\mathcal{E} \not\subseteq [z]_{\varepsilon(G)}$ minden $z \notin \mathcal{E}$ esetén. Az 5.4. Állítás (iii) pontja szerint $G(a) \leq \theta(a, z) \triangleright G(z)$, tehát $(a, z) \notin \varrho(G)$ esetén $G(a) < \theta(a, z) \triangleright G(z)$. Indirekt módon tegyük fel, hogy $\theta(a, c) \geq \theta(a, b)$ valamely $c \notin E$ esetén. Ekkor $G(c) \leq \theta(a, c) \triangleright G(a) \leq \theta(a, b) \triangleright G(b) = G(a)$. Ez viszont azt eredményezi, hogy $G(a) < \theta(a, c) \triangleright G(c) \leq \theta(a, b) \triangleright G(a) = G(b)$, ami ismét ellentmondás.

(v) Ha $n(x) = x \triangleright 0$ involutív, akkor a (D) tulajdonság szerint $n(F) = n(\bar{\theta}(f)) = \underline{\theta}(n(f))$. Ebből következik, hogy a $\varrho(n(F)) = R(F)$ jól definiált, és $E(F) = R(F) \cap R(F)^{-1} = \varrho(n(F)) \cap \varrho(n(F))^{-1} = \varepsilon(n(F))$. Tehát

az $E(F)$ - és $\varepsilon(n(F))$ -osztályok megegyeznek. Mivel $R(F) = \varrho(n(F))$, ezért $\leq_{R(F)} = \leq_{\varrho(n(F))}$, azaz az $(U/E(F), \leq_{R(F)})$ és az $(U/\varepsilon(n(F)), \leq_{\varrho(n(F))})$ részbenrendezett halmazok azonosak. Ezért a maximális $E(F)$ - és $\varepsilon(n(F))$ -osztályok is megegyeznek. $\square$

5.8. Következmény. Legyen E egy $E(F)$ -osztály és $\mathcal{E}$ egy $\varepsilon(G)$ -osztály úgy, hogy $E \cap \mathcal{E} \neq \emptyset$. Ekkor a következő állítások érvényesek:

- (i) Ha $E \subseteq U$ egy maximális $E(F)$ -osztály és $\mathcal{E} \subseteq U$ egy maximális $\varepsilon(G)$ -osztály, akkor $E \subseteq \mathcal{E}$ vagy $\mathcal{E} \subseteq E$ teljesül.
- (ii) Ha θ egy fuzzy hasonlósági reláció, akkor $(x, y) \in R(F)$ vagy $(y, x) \in \varrho(G)$ teljesül minden $x \in E$ és $y \in \mathcal{E}$ esetén.

Bizonyítás. Legyen $a \in E \cap \mathcal{E}$. (i) Tegyük fel, hogy sem $E \subseteq \mathcal{E}$, sem $\mathcal{E} \subseteq E$ nem teljesül. Ekkor léteznek $b \in E \setminus \mathcal{E}$, $c \in \mathcal{E} \setminus E$ elemek. Mivel $a, b \in E$, de $c \notin E$, az 5.7. Lemma (iii) pontja alapján $\theta(a, c) < \theta(a, b)$. Hasonlóan, $a, c \in \mathcal{E}$ és $b \notin \mathcal{E}$ esetén $\theta(a, b) < \theta(a, c)$, ami ellentmond az előző eredménynek.

(ii) Ha $\mathcal{E} \subseteq E$ vagy $E \subseteq \mathcal{E}$, akkor (ii) nyilvánvalóan teljesül. Így feltételezhetjük, hogy $\mathcal{E} \setminus E \neq \emptyset$ és $E \setminus \mathcal{E} \neq \emptyset$. Tegyük fel, hogy létezik $x \in E$ és $y \in \mathcal{E}$ úgy, hogy $(x, y) \notin R(F)$. Azt fogjuk belátni, hogy $(y, x) \in \varrho(G)$. Tegyük fel indirekt módon, hogy $(y, x) \notin \varrho(G)$. Mivel $x, a \in E$, $y \notin E$ és $y, a \in \mathcal{E}$, $x \notin \mathcal{E}$, az 5.7. Lemma (iii) és (iv) pontjai alapján $\theta(x, y) < \theta(x, a)$ és $\theta(x, y) = \theta(y, x) < \theta(y, a) = \theta(a, y)$. Így $\theta(x, y) < \min(\theta(x, a), \theta(a, y)) \leq \theta(x, y)$ adódik, ami ellentmondás. Ezzel beláttuk, hogy $(y, x) \in \varrho(G)$. $\square$

5.9. Állítás. (i) Ha E_1, E_2 különböző $E(F)$ -osztályok és $E_1 \leq_{R(F)} E_2$, akkor bármely $a_1 \in E_1$ és $a_2 \in E_2$ esetén $F(a_1) < F(a_2)$.
 (ii) Ha $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ különböző $\varepsilon(G)$ -osztályok és $\mathcal{E}_1 \leq_{\varrho(G)} \mathcal{E}_2$, akkor bármely $b_1 \in \mathcal{E}_1$ és $b_2 \in \mathcal{E}_2$ esetén $G(b_1) > G(b_2)$.

Bizonyítás. (i) Tegyük fel, hogy $E_1 \leq_{R(F)} E_2$. Ekkor bármely $a_1 \in E_1$ és $a_2 \in E_2$ esetén $(a_1, a_2) \in R(F)$, azaz $F(a_1) = \theta(a_1, a_2) \odot F(a_2) \leq F(a_2)$. Vegyük észre, hogy $F(a_2) \neq F(a_1)$. Valóban, $F(a_2) = F(a_1)$ azt eredményezné, hogy $F(a_2) = \theta(a_1, a_2) \odot F(a_1) = \theta(a_2, a_1) \odot F(a_1)$, azaz $(a_2, a_1) \in R(F)$, ami azt jelentené, hogy $E_2 \leq_{R(F)} E_1$. Mivel $\leq_{R(F)}$ részbenrendezés, ebből $E_1 = E_2$ következne, ami ellentmondás. Tehát $F(a_1) < F(a_2)$.

(ii) Legyen $\mathcal{E}_1 \leq_{\varrho(G)} \mathcal{E}_2$. Ekkor bármely $b_1 \in \mathcal{E}_1$, $b_2 \in \mathcal{E}_2$ esetén $(b_1, b_2) \in \varrho(G)$, amiből $G(b_1) = \theta(b_1, b_2) \triangleright G(b_2) \geq G(b_2)$ következik. Azt fogjuk belátni, hogy $G(b_1) > G(b_2)$. Valóban, $G(b_2) = G(b_1)$ azt eredményezné, hogy $G(b_2) = \theta(b_1, b_2) \triangleright G(b_1) = \theta(b_2, b_1) \triangleright G(b_1)$, azaz $(b_2, b_1) \in \varrho(G)$, amiből $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2$ következne, ami ellentmondás. $\square$

Nyilvánvaló, hogy ha az $(U/E(F), \leq_{R(F)})$ és $(U/\varepsilon(G), \leq_{\varrho(G)})$ részbenrendezett halmazokban minden lánc véges, akkor bármely elem kisebb vagy egyenlő, mint egy maximális elem a megfelelő hálóban. Ezen megfigyelés felhasználásával belátható az alábbi állítás:

5.10. Következmény. *Tegyük fel, hogy a θ relációnak és az $f, g \in \mathcal{F}(U)$ fuzzy halmazoknak az értékkészlete véges, és legyen $F = \bar{\theta}(f)$, $G = \underline{\theta}(g)$. Ekkor bármely E $E(F)$ -osztály esetén létezik olyan maximális $E(F)$ -osztály E_M , amelyre $E \leq_{R(F)} E_M$, és bármely $\mathcal{E}$ $\varepsilon(G)$ -osztály esetén létezik olyan maximális $\varepsilon(G)$ -osztály $\mathcal{E}_M$, amelyre $\mathcal{E} \leq_{\varrho(G)} \mathcal{E}_M$.*

Bizonyítás. Ha a fenti feltételek teljesülnek, akkor az F és G fuzzy halmazok is véges értékkészletűek. Legyen most $\{E_i \mid i \in I\}$ egy tetszőleges (nemüres) lánc az $E(F)$ -osztályok között. Az 5.9. Állítás alapján bármely $a_i \in E_i$, $i \in I$ esetén az $\{F(a_i) \mid i \in I\}$ halmaz is láncot alkot, és ha $E_i \leq_{R(F)} E_j$, $E_i \neq E_j$, akkor $F(a_i) < F(a_j)$, és hasonlóan fordítva. Ez azt jelenti, hogy az $\{E_i \mid i \in I\}$ és az $\{F(a_i) \mid i \in I\}$ láncok rendezésizomorfak. Mivel F véges értékkészletű, az $\{F(a_i) \mid i \in I\}$ lánc véges hosszúságú. Ezért az $\{E_i \mid i \in I\}$ lánc is véges. Mivel a $(U/E(F), \leq_{R(F)})$ részbenrendezett halmazban minden lánc véges, annak bármely E eleme kisebb vagy egyenlő egy maximális E_M elemmel, azaz $E \leq_{R(F)} E_M$. A második állítás hasonló módon belátható. $\square$

A maximális osztályok szerepét ebben az esetben a következő kijelentés mutatja meg:

5.11. Állítás. *Tegyük fel, hogy θ és az $f, g \in \mathcal{F}(U)$ fuzzy halmazok értékkészlete véges, és legyen $F = \bar{\theta}(f)$, $G = \underline{\theta}(g)$. Ekkor a következő állítások igazak:*

- (i) *Ha $h \leq F$ valamely $h \in \mathcal{F}(U)$ esetén és bármely E_M maximális $E(F)$ -osztályhoz tartozik olyan $u \in E_M$, amelyre $h(u) = F(u)$, akkor $\bar{\theta}(h) = F$.*
- (ii) *Ha $h \geq G$ valamely $h \in \mathcal{F}(U)$ esetén és bármely $\mathcal{E}_M$ maximális $\varepsilon(G)$ -osztályhoz tartozik olyan $v \in \mathcal{E}_M$, amelyre $h(v) = G(v)$, akkor $\underline{\theta}(h) = G$.*

Bizonyítás. (i) Legyen $x \in U$ tetszőleges. Mivel θ és f véges értékkészletűek, az 5.10. Következmény szerint létezik E_M maximális $E(F)$ -osztály úgy, hogy $[x]_{E(F)} \leq_{R(F)} E_M$. Ekkor $(x, y) \in R(F)$ minden $y \in E_M$ esetén. Feltevés szerint létezik olyan $u \in E_M$, amelyre $h(u) = F(u)$. Mivel $h \leq F$ és $(x, u) \in R(F)$, a 5.6. Állítás (i) pontja alapján következik, hogy $\bar{\theta}(h)(x) = F(x)$. Ez bizonyítja, hogy $\bar{\theta}(h) = F$.

(ii) A bizonyítás hasonló módon történik, az 5.10. Következmény és az 5.6. Állítás (ii) pontjának felhasználásával. $\square$

5.12. Állítás. Tegyük fel, hogy a θ reláció és az $f, g \in \mathcal{F}(U)$ fuzzy halmazok véges értékészletűek, és legyen $F = \bar{\theta}(f)$, $G = \underline{\theta}(g)$.

(i) Ha E egy maximális $E(F)$ -osztály, akkor bármely $a \in E$ esetén

$$F(a) = \max\{f(y) \mid y \in E\}.$$

(ii) Ha $\mathcal{E}$ egy maximális $\varepsilon(G)$ -osztály, akkor bármely $a \in \mathcal{E}$ esetén

$$G(a) = \min\{g(y) \mid y \in \mathcal{E}\}.$$

Bizonyítás. (i) Definíció szerint $F(a) = \bar{\theta}(f)(a) = \bigvee\{\theta(a, y) \odot f(y) \mid y \in U\}$. Ha $y \notin E$, akkor $(a, y) \notin R(F)$, mivel E maximális $E(F)$ -osztály. Ez azt jelenti, hogy $F(a) = \theta(a, y) \odot F(y)$ nem lehetséges, tehát $F(a) > \theta(a, y) \odot F(y)$ az 5.4. Állítás (iii) pontja szerint. Mivel $f \leq \bar{\theta}(f) = F$, így azt kapjuk, hogy $F(a) > \theta(a, y) \odot f(y)$ minden $y \in U \setminus E$ esetén. Mivel θ és f véges értékészletűek, a $\{\theta(a, y) \odot f(y) \mid y \in U \setminus E\}$ halmaz is véges sok különböző elemet tartalmaz, így $\bigvee\{\theta(a, y) \odot f(y) \mid y \in U \setminus E\} < F(a)$. Ebből az következik, hogy

$$F(a) = \left(\bigvee\{\theta(a, y) \odot f(y) \mid y \in E\}\right) \vee \left(\bigvee\{\theta(a, y) \odot f(y) \mid y \in U \setminus E\}\right) = \bigvee\{\theta(a, y) \odot f(y) \mid y \in E\}.$$

Ha $y \in E$, akkor $F(y) = F(a)$. Mivel $\theta(a, y) \odot f(y) \leq f(y) \leq F(y) = F(a)$, így azt kapjuk, hogy:

$$F(a) = \bigvee\{\theta(a, y) \odot f(y) \mid y \in E\} \leq \bigvee\{f(y) \mid y \in E\} \leq F(a).$$

Ez pedig azt jelenti, hogy $F(a) = \bigvee\{f(y) \mid y \in E\}$. Mivel f véges értékészletű, a $\{f(y) \mid y \in E\}$ halmaz is véges, így $F(a) = \max\{f(y) \mid y \in E\}$.

(ii) Definíció szerint $G(a) = \underline{\theta}(g)(a) = \bigwedge\{\theta(a, y) \triangleright g(y) \mid y \in U\}$. Ha $y \notin \mathcal{E}$, akkor $(a, y) \notin \varrho(G)$, mivel $\mathcal{E}$ maximális $\varepsilon(G)$ -osztály, és így $G(a) \neq \theta(a, y) \triangleright G(y)$. Tehát $G(a) < \theta(a, y) \triangleright G(y)$ az 5.4. Állítás (iii) pontja szerint. Mivel $G = \underline{\theta}(g) \leq g$, ezért $G(a) < \theta(a, y) \triangleright g(y)$ minden $y \in U \setminus \mathcal{E}$ esetén. Mivel θ és g véges értékészletűek, a $\{\theta(a, y) \triangleright g(y) \mid y \in U \setminus \mathcal{E}\}$ halmaz véges, tehát $G(a) < \bigwedge\{\theta(a, y) \triangleright g(y) \mid y \in U \setminus \mathcal{E}\}$. Ebből következik, hogy

$$G(a) = \left(\bigwedge\{\theta(a, y) \triangleright g(y) \mid y \in \mathcal{E}\}\right) \wedge \left(\bigwedge\{\theta(a, y) \triangleright g(y) \mid y \in U \setminus \mathcal{E}\}\right) = \bigwedge\{\theta(a, y) \triangleright g(y) \mid y \in \mathcal{E}\}.$$

Ha $y \in \mathcal{E}$, akkor $G(y) = G(a)$. Mivel $\theta(a, y) \triangleright g(y) \geq 1 \triangleright g(y) = g(y) \geq G(y) = G(a)$, azt kapjuk, hogy

$$G(a) = \bigwedge\{\theta(a, y) \triangleright g(y) \mid y \in \mathcal{E}\} \geq \bigwedge\{g(y) \mid y \in \mathcal{E}\} \geq G(a),$$

és ebből adódik, hogy $G(a) = \bigwedge\{g(y) \mid y \in \mathcal{E}\}$. Mivel $\{g(y) \mid y \in \mathcal{E}\}$ véges halmaz, így $G(a) = \min\{g(y) \mid y \in \mathcal{E}\}$. $\square$

5.13. Következmény. Tegyük fel, hogy θ és $f, g \in \mathcal{F}(U)$ véges értékű fuzzi halmazok, továbbá legyen $a \in U$ és $F = \bar{\theta}(f)$, $G = \underline{\theta}(g)$.

(i) Ha $\{a\}$ egy maximális $E(F)$ -osztály, akkor $F(a) = f(a)$,

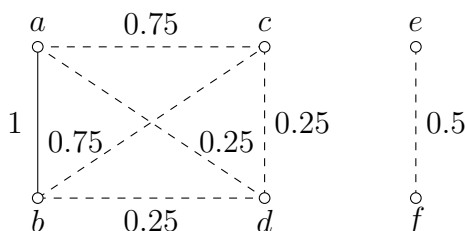
(ii) Ha $\{a\}$ egy maximális $\varepsilon(G)$ -osztály, akkor $G(a) = g(a)$.

5.14. Következmény. Tegyük fel, hogy θ és $f \in \mathcal{F}(U)$ véges értékű fuzzi halmazok, $F = \bar{\theta}(f)$, $G = \underline{\theta}(f)$, továbbá legyen E egy maximális $E(F)$ -osztály és $\mathcal{E}$ egy maximális $\varepsilon(G)$ -osztály. (i) Ha minden $\{x\} \subseteq E$ egy maximális $\varepsilon(G)$ -osztály, akkor létezik $u \in E$, amelyre $F(u) = G(u)$.

(ii) Ha minden $\{x\} \subseteq \mathcal{E}$ egy maximális $E(F)$ -osztály, akkor létezik $v \in \mathcal{E}$, amelyre $F(v) = G(v)$.

Bizonyítás. (i) Az 5.12. Állítás (i) pontja alapján minden $x \in E$ esetén teljesül, hogy $F(x) = \max\{f(y) \mid y \in E\}$, azaz $F(x) = f(u)$ valamely $u \in E$ elemre. Mivel $\{u\}$ egy maximális $\varepsilon(G)$ -osztály, az 5.13. Következmény (ii) pontjának alkalmazásával $g := f$ esetre adódik, hogy $G(u) = f(u)$. Ezért $F(u) = G(u)$. (ii) duális módon bizonyítható. $\square$

5.15. Példa. Vizsgáljuk meg a θ hasonlósági relációt, egy fuzzi halmazt h és annak közelítéseit: $F = \bar{\theta}(h)$, $G = \underline{\theta}(h)$, amelyek az 5.1. ábrán és az 5.1. táblázatban láthatók.

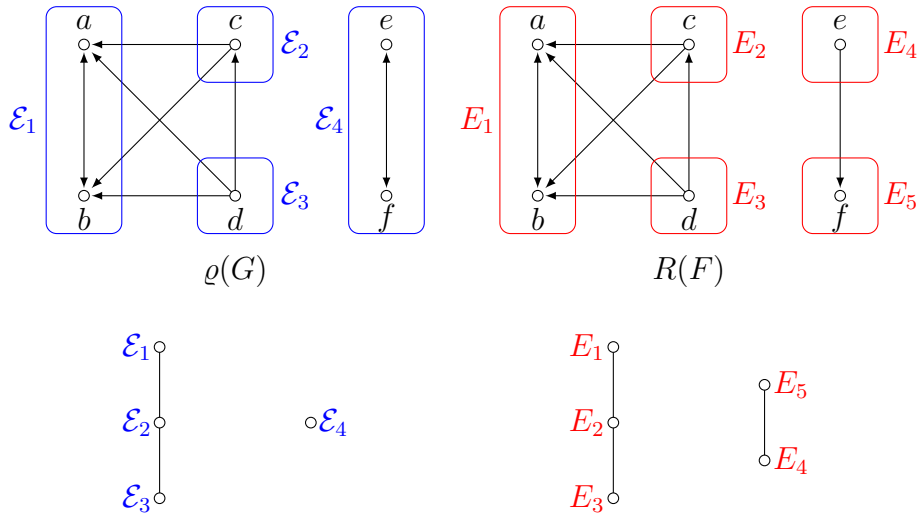


5.1. ábra. Az 5.15. Példában szereplő fuzzi θ hasonlósági reláció

u	a	b	c	d	e	f
$h(u)$	0	1	0.25	0.5	0.5	0.75
$F(u)$	1	1	0.75	0.5	0.5	0.75
$G(u)$	0	0	0.25	0.5	0.5	0.5

5.1. táblázat. Az 5.15. Példában szereplő h fuzzi halmaz

Az $R(F)$ és $\varrho(G)$ kvázirendezések, a hozzájuk tartozó $E(F)$ és $\varepsilon(G)$ ekvivalenciaosztályok, valamint a faktorhalmazokon indukált részbenrendezések az 5.2. ábrán láthatók.



5.2. ábra. A 5.15. Példához tartozó kvázirendezések, és a kapcsolódó faktorhalmazok a Hasse-diagramjaikkal.

Az ábrákon egyik relációnál sem szerepelnek a hurokélek az átláthatóság kedvéért. Mivel θ szimmetrikus, az az ábrán az élei irányítatlanok, továbbá a $\theta(x, y) = 0$ értékű éleket nem is tüntettem fel. A maximális $\varepsilon(G)$ -osztályok $\mathcal{E}_1$ és $\mathcal{E}_4$, míg a maximális $E(F)$ -osztályok E_1 és E_5 . A fejezet példáiban az approximációkat egy $\min$ t -normával és a KD -implikátorral határozzuk meg, tehát az implikátor $\max(1-x, y)$. Jól látható, hogy az 5.7., 5.8., 5.14. állításai mind teljesülnek.

5.5. Fuzzy durva halmazok jellemzése

A (U, θ) fuzzy approximációs tér esetén bevezetjük a következő jelöléseket:

$$\text{Fix}(\underline{\theta}) = \{f \in \mathcal{F}(U) \mid \underline{\theta}(f) = f\}, \text{Fix}(\bar{\theta}) = \{f \in \mathcal{F}(U) \mid \bar{\theta}(f) = f\}.$$

Sajnos egy $\odot$ -hasonlósági reláció esetén $\text{Fix}(\underline{\theta})$ és $\text{Fix}(\bar{\theta})$ csak akkor esik egybe, ha $\odot$ balról folytonos t -norma, és a belőle származtatott R -implikátort $\triangleright$ használjuk.

5.16. Tétel. Tegyük fel, hogy az (ID) feltételei teljesülnek, és legyen (U, θ) egy fuzzy approximációs tér, ahol θ egy véges értékészletű $\odot$ -hasonlósági reláció, valamint $F, G \in \mathcal{F}(U)$. Ekkor (F, G) pontosan akkor egy véges értékészletű fuzzy halmazból származtatott fuzzy durva halmaz, ha az alábbi feltételek teljesülnek:

- (1) $G \in \text{Fix}(\underline{\theta})$, $F \in \text{Fix}(\bar{\theta})$, $G \leq F$, továbbá F és G véges értékészletűek;
- (2) Ha $\mathcal{E}$ egy olyan maximális $\varepsilon(G)$ -osztály, amelynek minden $\{a\} \subseteq \mathcal{E}$ eleme egy maximális $E(F)$ -osztály, akkor létezik olyan $u \in \mathcal{E}$ elem, amire $G(u) = F(u)$;

(3) Ha E egy olyan maximális $E(F)$ -osztály, amelynek minden $\{a\} \subseteq E$ eleme egy maximális $\varepsilon(G)$ -osztály, akkor létezik olyan $v \in E$ elem, amire $G(v) = F(v)$.

Bizonyítás. Definíció szerint (F, G) fuzzy durva halmaz, ha létezik $f \in \mathcal{F}(U)$ leképezés úgy, hogy $F = \bar{\theta}(f)$, $G = \underline{\theta}(f)$. Tegyük fel, hogy f véges értékkészletű. Megmutatom, hogy ekkor teljesülnek az 5.16. Tétel feltételei.

(1) Az (ID) tulajdonság szerint $\bar{\theta}(F) = F$, $\underline{\theta}(G) = G$, tehát $F \in \text{Fix}(\bar{\theta})$ és $G \in \text{Fix}(\underline{\theta})$. Nyilvánvaló, hogy $G = \underline{\theta}(f) \leq \bar{\theta}(f) = F$. Mivel f véges értékkészletű, az 5.2. Lemmából következik, hogy F és G is véges értékkészletű. Az 5.14. Következmény szerint a (2) és (3) feltételek is teljesülnek.

Fordítva, tegyük fel, hogy F és G kielégítik az (1), (2) és (3) feltételeket. Annak igazolására, hogy (F, G) egy fuzzy durva halmaz, konstruálunk egy $f \in \mathcal{F}(U)$ fuzzy halmazt úgy, hogy $F = \bar{\theta}(f)$, $G = \underline{\theta}(f)$.

Mivel F és G véges értékkészletűek, az 5.10. Következmény szerint minden $E(F)$ -osztályhoz létezik E_M maximális $E(F)$ -osztály úgy, hogy $E \leq_{R(F)} E_M$, és minden $\varepsilon(G)$ -osztályhoz létezik $\mathcal{E}_M$ maximális $\varepsilon(G)$ -osztály úgy, hogy $\mathcal{E} \leq_{\varrho(G)} \mathcal{E}_M$. Jelöljük a maximális $\varepsilon(G)$ -osztályok családját a következőképp: $\{\mathcal{E}_t \mid t \in T\}$. Első lépésként minden $\mathcal{E}_t$ osztályból ($t \in T$) kiválasztunk pontosan egy $a_t \in \mathcal{E}_t$ elemet a következőképp:

- 1) Ha $\mathcal{E}_t$ tartalmaz egy olyan p_t elemet, amely nem tartozik egyetlen maximális $E(F)$ -osztályhoz sem, akkor ezt választjuk ki, vagyis $a_t := p_t$.
- 2) Ha $\mathcal{E}_t$ nem tartalmaz 1) típusú elemet, de van benne olyan $q_t \in \mathcal{E}_t$, amelyre $G(q_t) = F(q_t)$, akkor ezt választjuk ki, vagyis $a_t := q_t$.
- 3) Ha nincs 1) vagy 2) típusú elem $\mathcal{E}_t$ -ben, akkor kiválasztunk egy $r_t \in \mathcal{E}_t$ elemet úgy, hogy $\{r_t\}$ ne legyen maximális $E(F)$ -osztály, és beállítjuk $a_t := r_t$.

Először megmutatom, hogy ez a kiválasztás mindig elvégezhető: tegyük fel indirekt módon, hogy létezik olyan $\mathcal{E}_t$ osztály, amely nem tartalmaz 1), 2) vagy 3) típusú elemeket. Ez azt jelenti, hogy minden $a_t \in \mathcal{E}_t$ esetén a $\{a_t\}$ halmaz egy maximális $E(F)$ -osztály. Ekkor azonban az 5.14. Következmény (ii) pontja alapján létezik $v \in \mathcal{E}_t$ úgy, hogy $F(v) = G(v)$. Mivel ez azt jelenti, hogy v 2) típusú, ez ellentmondás.

A következő lépésben megkonstruáljuk az $f \in \mathcal{F}(U)$ fuzzy halmazt az alábbi módon:

$$f(x) = \begin{cases} G(x), & \text{ha } x \in \{a_t \mid t \in T\}; \\ F(x), & \text{ha } x \in U \setminus \{a_t \mid t \in T\}. \end{cases}$$

A konstrukció alapján f is véges értékkészletű. Most belátjuk, hogy bármely E maximális $E(F)$ -osztály esetén létezik benne olyan $u \in E$ elem, amelyre $f(u) = F(u)$. A konstrukció szerint ez azt jelentené, hogy minden ilyen E osztály tartalmaz vagy egy $x_0 \in U \setminus \{a_t \mid t \in T\}$ elemet, vagy egy 2) típusú $a_t = q_t \in E$ elemet, amelyre $f(q_t) = G(q_t) = F(q_t)$.

Tegyük fel indirekt módon, hogy létezik olyan E_M maximális $E(F)$ -osztály, amelyre $E_M \subseteq \{a_t \mid t \in T\}$ és minden $x \in E_M$ esetén $F(x) \neq f(x) = G(x)$. Ekkor $E_M = \{a_s \mid s \in S\}$ valamely nemüres $S \subseteq T$ részhalmazra. Vegyük észre, hogy ekkor E_M nem tartalmazhat 1) vagy 2) típusú elemeket. A konstrukció szerint tehát minden a_s ($s \in S$) esetén $\{a_s\}$ nem maximális $E(F)$ -osztály, tehát E_M nem egyelemű, azaz $|S| \geq 2$. Az is kizárható, hogy minden $a_s, s \in S$ egy egyelemű $\mathcal{E}_t$ osztályba tartozzon. Ugyanis ebben az esetben minden $\{a_s\} \subseteq E_M$ maximális $\varepsilon(G)$ -osztály lenne, és az 5.14. Következmény (i) pontja szerint létezne olyan $a_{s_0} \in E_M$, amelyre $G(a_{s_0}) = F(a_{s_0})$, ami ellentmond a feltevésünknek. Így létezik olyan $a_{s^*} \in E_M$, amelyet egy legalább két elemet tartalmazó $\mathcal{E}_{s^*}$ maximális $\varepsilon(G)$ -osztályból választottunk. Mivel $a_{s^*} \in E_M \cap \mathcal{E}_{s^*}$, az 5.8. Következmény (i) pontja szerint vagy $E_M \subseteq \mathcal{E}_{s^*}$, vagy $\mathcal{E}_{s^*} \subseteq E_M$. Mivel mindkét halmaz legalább két elemet tartalmaz, így mindkét eset azt eredményezné, hogy a $\mathcal{E}_{s^*}$ osztályból legalább két elem került az $\{a_t \mid t \in T\}$ halmazba, ami ellentmond $\{a_t \mid t \in T\}$ konstrukciójának.

Ezzel beláttuk, hogy minden E maximális $E(F)$ -osztály tartalmaz olyan $u \in E$ elemet, amelyre $f(u) = F(u)$. Az is nyilvánvaló, hogy minden $\mathcal{E}_t$ ($t \in T$) maximális $\varepsilon(G)$ -osztály esetén egy olyan $v = a_t \in \mathcal{E}_t$ elemet választottunk ki, amelyre $f(v) = G(v)$. Mivel definíció szerint $G \leq f \leq F$, az 5.11. Állítást alkalmazva azt kapjuk, hogy $F = \bar{\theta}(f)$, $G = \underline{\theta}(f)$, és ezzel a bizonyítás véget ért. $\square$

5.6. Az $E(F)$ - és $\varepsilon(G)$ -osztályok további tulajdonságai

Ebben a szakaszban további tulajdonságokat vezetek le az $E(F)$ - és $\varepsilon(G)$ -osztályokra vonatkozóan, amelyeket a fejezet főtételeinek (5.24. Tétel) a bizonyításához fogok használni. A teljes szakaszban feltesszük, hogy θ egy fuzzy hasonlósági reláció, és hogy minden $x, y \in [0, 1]$ esetén teljesül a következő:

$$x \odot y = \min(x, y), \quad x \triangleright y := \max(n(x), y), \quad n \text{ egy involutív negátor.} \quad (C)$$

Ekkor $\triangleright$ egy S -implikátor, és ha $n(x) = 1 - x$, akkor visszakapjuk a Kleene–Dienes implikátort, tehát ez a $\triangleright$ implikátor annak egy kiterjesztése. Nyilvánvaló, hogy ha (C) teljesül, akkor (D) és (ID) is teljesül.

5.17. Állítás. (i) $E \subseteq U$ pontosan akkor maximális $E(F)$ -osztály, ha $\theta(a, z) < F(a) = F(b) \leq \theta(a, b)$ minden $a, b \in E$ és $z \notin E$ esetén;

(ii) $\mathcal{E} \subseteq U$ pontosan akkor maximális $\varepsilon(G)$ -osztály, ha $n(\theta(a, b)) \leq G(a) = G(b) < n(\theta(a, z))$, minden $a, b \in \mathcal{E}$ és $z \notin \mathcal{E}$ esetén.

Bizonyítás. (i) Ha $E \subseteq U$ egy maximális $E(F)$ -osztály, akkor az 5.7. Lemma (i) és (iii) pontja alapján $F(a) = F(b) \leq \theta(a, b)$ és $\theta(a, z) < F(a)$ minden $a, b \in E$ és $z \notin E$ esetén.

Fordítva, legyen $E \subseteq U$ és tegyük fel, hogy teljesülnek az (i) pontban szereplő viszonyok. Ekkor $F(a) = \min(\theta(a, b), F(b))$ minden $a, b \in E$ esetén, azaz $(a, b) \in R(F)$ minden $a, b \in E$ esetén, és az 5.5. Következmény alapján $(a, z) \notin R(F)$ minden $z \notin E$ esetén. Ebből következik, hogy $(a, b) \in R(F) \cap R(F)^{-1} = E(F)$ minden $a, b \in E$ esetén, és $(a, z) \notin E(F)$ minden $z \notin E$ esetén. Ez azt jelenti, hogy E egy $E(F)$ -osztály. Továbbá $E \not\subseteq [z]_{E(F)}$ minden $z \notin E$ esetén, mert $(a, z) \notin R(F)$. Tehát E egy maximális $E(F)$ -osztály.

(ii) Ha $\mathcal{E} \subseteq U$ egy maximális $\varepsilon(G)$ -osztály, akkor az 5.7. Lemma (iv) pontja alapján $n(\theta(a, b)) \leq G(a) = G(b)$ minden $a, b \in \mathcal{E}$ esetén, és $\mathcal{E} \not\subseteq [z]_{\varepsilon(G)}$ minden $z \notin \mathcal{E}$ esetén. Ekkor $(a, z) \notin \varrho(G)$ miatt $G(a) < n(\theta(a, z))$ az 5.7. Lemma (iv) szerint. A megfordított állítást ugyanúgy bizonyítjuk, mint az (i) pontban. $\square$

5.18. Lemma. Legyen $F = \bar{\theta}(f)$, $G = \underline{\theta}(g)$ valamilyen $f, g \in \mathcal{F}(U)$ esetén, és legyen E egy $E(F)$ -osztály, $\mathcal{E}$ pedig egy $\varepsilon(G)$ -osztály úgy, hogy $E \cap \mathcal{E} \neq \emptyset$. Ekkor a következő állítások érvényesek:

(i) Ha $(x, y) \notin R(F)$ valamilyen $x \in E$ és $y \in \mathcal{E}$ esetén, akkor $(x, z) \in R(F)$ implikálja, hogy $(y, z) \in \varrho(G)$ minden $z \notin E \cup \mathcal{E}$ esetén.

(ii) Ha $(x, y) \notin \varrho(G)$ valamilyen $x \in \mathcal{E}$ és $y \in E$ esetén, akkor $(x, z) \in \varrho(G)$ implikálja, hogy $(y, z) \in R(F)$ minden $z \notin E \cup \mathcal{E}$ esetén.

Bizonyítás. Legyen $a \in E \cap \mathcal{E}$. (i) Vegyük észre, hogy $(x, y) \notin R(F)$ és $(x, a) \in R(F)$ kizárják $(a, y) \in R(F)$ lehetőségét. Tehát $(a, y) \notin R(F)$ azt jelenti, hogy $F(a) > \theta(a, y)$ az 5.5. Következmény szerint. Most legyen $(x, z) \in R(F)$, és tegyük fel indirekt módon, hogy $(y, z) \notin \varrho(G)$. Ekkor $a, y \in \mathcal{E}$ és $z \notin \mathcal{E}$ miatt $\theta(a, z) < \theta(a, y)$. Másrészt, $(a, x) \in R(F)$ és $(x, z) \in R(F)$ miatt $(a, z) \in R(F)$. Ekkor az 5.17. Állítás (i) pontja szerint $F(a) \leq \theta(a, z) < \theta(a, y)$, ami ellentmond annak, hogy $F(a) > \theta(a, y)$. Ez bizonyítja, hogy $(y, z) \in \varrho(G)$.

(ii) Az 5.4. Állítás (iv) pontja szerint $\varrho(G) = R(n(G))$, $R(F) = \varrho(n(F))$, továbbá az 5.7. Lemma (v) pontja szerint $\mathcal{E}$ egy $E(n(G))$ -osztály, míg E egy $\varepsilon(n(F))$ -osztály. Tehát $(x, y) \notin \varrho(G)$ valamilyen $x \in E$ és $y \in \mathcal{E}$ esetén, és $(x, z) \in \varrho(G)$ ekvivalens azzal, hogy $(x, y) \notin R(n(G))$ és $(x, z) \in R(n(G))$, tehát $n(G) = n(\underline{\theta}(g)) = \bar{\theta}(n(g))$ és $n(F) = n(\bar{\theta}(f)) = \underline{\theta}(n(f))$ párt kapjuk,

amely a (ii) pont kontextusában lép az (i) pontban az (F, G) pár helyére. Így $(y, z) \in \varrho(n(F)) = R(F)$ az (i) pont alapján. $\square$

5.19. Következmény. Legyen $F = \bar{\theta}(f)$, $G = \underline{\theta}(g)$, valamilyen $f, g \in \mathcal{F}(U)$ esetén, és legyen E egy $E(F)$ -osztály, valamint $\mathcal{E}$ egy $\varepsilon(G)$ -osztály úgy, hogy $E \cap \mathcal{E} \neq \emptyset$.

(i) Ha $\mathcal{E}$ egy maximális $\varepsilon(G)$ -osztály, akkor $(x, y) \in R(F)$ minden $x \in E$ és $y \in \mathcal{E}$ esetén, vagy $E \subseteq \mathcal{E}$ és nem létezik olyan $t \in E$, illetve $z \notin \mathcal{E}$, amelyre $(t, z) \in R(F)$.

(ii) Ha $\mathcal{E}$ egy maximális $\varepsilon(G)$ -osztály, $E \subsetneq \mathcal{E}$ és nem léteznek olyan $x \in E$, $y \in \mathcal{E} \setminus E$ elemekkel, amelyekre $(x, y) \in R(F)$, akkor E egy maximális $E(F)$ -osztály.

(iii) Ha E egy maximális $E(F)$ -osztály, akkor $(x, y) \in \varrho(G)$ minden $x \in \mathcal{E}$ és $y \in E$ esetén, vagy $\mathcal{E} \subseteq E$ és nem létezik olyan $t \in \mathcal{E}$ és $z \notin E$, amelyre $(t, z) \in \varrho(G)$.

(iv) Ha E egy maximális $E(F)$ -osztály és $\mathcal{E} \subsetneq E$, valamint nem létezik olyan $x \in \mathcal{E}$ és $y \in E \setminus \mathcal{E}$, amelyre $(x, y) \in \varrho(G)$, akkor $\mathcal{E}$ egy maximális $\varepsilon(G)$ -osztály.

Bizonyítás. (i) Tegyük fel, hogy $\mathcal{E}$ egy maximális $\varepsilon(G)$ -osztály, és $E \not\subseteq \mathcal{E}$. Ekkor létezik $a \in E \setminus \mathcal{E}$, és az $\mathcal{E}$ maximális voltából következik, hogy $(y, a) \notin \varrho(G)$ minden $y \in \mathcal{E}$ esetén. Ekkor az 5.8. Következmény (ii) pontja alapján $(a, y) \in R(F)$, és mivel $(x, a) \in R(F)$ minden $x \in E$ esetén, ezért $(x, y) \in R(F)$ minden $x \in E$, $y \in \mathcal{E}$ párra. Vizsgáljuk meg azt az esetet, amikor $E \subseteq \mathcal{E}$ és van olyan $x \in E$, $y \in \mathcal{E}$, amelyre $(x, y) \notin R(F)$. Ekkor $E \cup \mathcal{E} = \mathcal{E}$. Tegyük fel, hogy létezik olyan $t \in E$ és $z \notin \mathcal{E}$, amelyre $(t, z) \in R(F)$. Ekkor $(x, t) \in R(F)$ miatt $(x, z) \in R(F)$. Az 5.18. Lemma (i) pontját alkalmazva ekkor $(y, z) \in \varrho(G)$. Mivel $\mathcal{E}$ egy maximális $\varepsilon(G)$ -osztály, és $z \notin \mathcal{E}$, ez nem lehetséges, tehát az állítás (i) pontjának második része is teljesül.

(ii) Tegyük fel, hogy minden $x \in E$ és $y \in \mathcal{E} \setminus E$ esetén $(x, y) \notin R(F)$, és legyen $z \notin \mathcal{E}$. Az 5.18. Lemma (i) pontja alapján, ha $(x, z) \in R(F)$ valamely $x \in E$ esetén, akkor $(y, z) \in \varrho(G)$ minden $y \in \mathcal{E}$ esetén, ami ellentmond annak, hogy $\mathcal{E}$ egy maximális $\varepsilon(G)$ -osztály. Tehát arra jutottunk, hogy $(x, z) \notin R(F)$ minden $x \in E$ és $z \notin E$ esetén. Ez azt jelenti, hogy E egy maximális $E(F)$ -osztály.

A (iii) és (iv) bizonyítása az (i) és (ii) duális változata. $\square$

5.20. Állítás. Legyen θ egy hasonlósági reláció véges értékkészlettel, és $F = \bar{\theta}(f)$, $G = \underline{\theta}(g)$ valamilyen $f, g \in \mathcal{F}(U)$ esetén.

(i) Ha $\{a\} \subseteq U$ egy maximális $E(F)$ -osztály, akkor bármely $h \in \mathcal{F}(U)$ esetén, amelyre $\bar{\theta}(h)(a) \geq F(a)$, teljesül, hogy $\bar{\theta}(h)(a) = h(a)$.

(ii) Ha $\{b\} \subseteq U$ egy maximális $\varepsilon(G)$ -osztály, akkor bármely $h \in \mathcal{F}(U)$ esetén, amelyre $\underline{\theta}(h)(b) \leq G(b)$, teljesül, hogy $\underline{\theta}(h)(b) = h(b)$.

Bizonyítás. (i) Ha $\{a\} \subseteq U$ egy maximális $E(F)$ -osztály, akkor az 5.5. Következmény alapján $F(a) > \theta(a, y)$ minden $y \in U$, $y \neq a$ esetén. Ekkor

$$\begin{aligned} \bar{\theta}(h)(a) &= \bigvee \{\min(\theta(a, y), h(y)) \mid y \in U\} = \\ &h(a) \vee \left(\bigvee \{\min(\theta(a, y), h(y)) \mid y \in U \setminus \{a\}\} \right), \text{ és} \\ &\bigvee \{\min(\theta(a, y), h(y)) \mid y \in U \setminus \{a\}\} \leq \\ &\bigvee \{\theta(a, y) \mid y \in U \setminus \{a\}\} < F(a) \leq \bar{\theta}(h)(a), \end{aligned}$$

mivel θ értékkészlete véges. Ebből adódik, hogy $\bar{\theta}(h)(a) = h(a)$.

(ii) Ha $\{b\} \subseteq U$ egy maximális $\varepsilon(G)$ -osztály, akkor az 5.5. Következmény alapján $G(b) < n(\theta(b, y))$ minden $y \in U$, $y \neq b$ esetén. Ekkor

$$\begin{aligned} \underline{\theta}(h)(b) &= \bigwedge \{\max(n(\theta(b, y)), h(y)) \mid y \in U\} = \\ &h(b) \wedge \left(\bigwedge \{\max(n(\theta(b, y)), h(y)) \mid y \in U \setminus \{b\}\} \right), \text{ és} \\ &\bigwedge \{\max(n(\theta(b, y)), h(y)) \mid y \in U \setminus \{b\}\} \geq \\ &\bigwedge \{n(\theta(b, y)) \mid y \in U \setminus \{b\}\} > G(b) \geq \underline{\theta}(h)(b), \end{aligned}$$

mivel θ értékkészlete véges. Ebből adódik, hogy $\underline{\theta}(h)(b) = h(b)$. $\square$

5.7. Hálóelméleti vizsgálat

Nyilvánvaló, hogy az (U, θ) approximációs térhez tartozó fuzzy durva halmazok az alábbi módon rendezhetők:

$$(\underline{\theta}(f), \bar{\theta}(f)) \leq (\underline{\theta}(g), \bar{\theta}(g)) \Leftrightarrow \underline{\theta}(f) \leq \underline{\theta}(g) \text{ és } \bar{\theta}(f) \leq \bar{\theta}(g), \quad (4)$$

így kapjuk az $(\mathcal{FR}(U, \theta), \leq)$ részbenrendezett halmazt. Ha θ reflexív, akkor $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ és $(\mathbf{1}, \mathbf{1})$ ennek a legkisebb, illetve legnagyobb elemei. Ha a (D)-ben szereplő feltételek teljesülnek, akkor $n(\bar{\theta}(f)) = \underline{\theta}(n(f))$ és $n(\underline{\theta}(f)) = \bar{\theta}(n(f))$ miatt $(n(\bar{\theta}(f)), n(\underline{\theta}(f))) \in \mathcal{FR}(U, \theta)$ minden $f \in \mathcal{F}(U)$ esetén. Mivel n involutív negátor, a $\Phi: \mathcal{FR}(U, \theta) \rightarrow \mathcal{FR}(U, \theta)$, $\Phi((\underline{\theta}(f), \bar{\theta}(f))) = (n(\bar{\theta}(f)), n(\underline{\theta}(f)))$ egy involúció, azaz $\Phi(\Phi(\underline{\theta}(f), \bar{\theta}(f))) = (\underline{\theta}(f), \bar{\theta}(f))$. Mivel $(\underline{\theta}(f), \bar{\theta}(f)) \leq (\underline{\theta}(g), \bar{\theta}(g)) \Leftrightarrow (n(\bar{\theta}(g)), n(\underline{\theta}(g))) \leq (n(\bar{\theta}(f)), n(\underline{\theta}(f)))$, ezért

$$(\underline{\theta}(f), \bar{\theta}(f)) \leq (\underline{\theta}(g), \bar{\theta}(g)) \Leftrightarrow \Phi(\underline{\theta}(g), \bar{\theta}(g)) \leq \Phi(\underline{\theta}(f), \bar{\theta}(f)),$$

vagyis Φ egy duális rendezésizomorfizmus. Tehát ha a (D) feltételei teljesülnek, akkor $(\mathcal{FR}(U, \theta), \leq)$ egy önduális részbenrendezett halmaz. Ebben

a szakaszban olyan feltételeket vezetek le, amelyek mellett az $(\mathcal{FR}(U, \theta), \leq)$ egy háló.

Most legyen L a $[0, 1]$ egy teljes részhálój, és legyen $\mathcal{F}(U, L)$ az $f: U \rightarrow L$ fuzzy halmazok összessége. A véges értékkészletű $f \in \mathcal{F}(U, L)$ fuzzy halmazok összességét jelölje $\mathcal{F}_{fr}(U, L)$. $L = [0, 1]$, akkor egyszerűen jelölje $\mathcal{F}_{fr}(U)$. Mivel $0, 1 \in L$, így $\mathbf{0}, \mathbf{1} \in \mathcal{F}_{fr}(U, L)$. Nyilvánvaló, hogy bármely $f_1, f_2 \in \mathcal{F}_{fr}(U, L)$ esetén $f_1 \vee f_2 = \max(f_1, f_2)$ és $f_1 \wedge f_2 = \min(f_1, f_2)$ szintén véges értékkészletűek, és értékeik L -ben vannak, tehát $(\mathcal{F}_{fr}(U, L), \leq)$ egy korlátos disztributív háló. Az is könnyen adódik, hogy bármely véges értékkészletű $f \in \mathcal{F}(U, L)$ és bármely n negátor esetén az $n(f)$ fuzzy halmaz is véges értékkészletű, azaz $n(f) \in \mathcal{F}_{fr}(U, L)$. Továbbá ha a θ reláció véges értékkészletű, akkor az 5.2. Lemma értelmében bármely $f \in \mathcal{F}_{fr}(U)$ esetén $\underline{\theta}(f), \bar{\theta}(f) \in \mathcal{F}_{fr}(U)$. Tegyük fel a továbbiakban, hogy a (C) feltétel teljesül, $n(L) \subseteq L$, és $\theta: U \times U \rightarrow L$ egy hasonlósági reláció. Ekkor

$$\bar{\theta}(f)(x) = \bigvee \{\min(\theta(x, y), f(y)) \mid y \in U\},$$

$$\underline{\theta}(f)(x) = \bigwedge \{\max(n(\theta(x, y)), f(y)) \mid y \in U\},$$

minden $x \in U$ esetén. Mivel L zárt tetszőleges egyesítés és metszet műveletekre, és $n(L) \subseteq L$, ezért $\underline{\theta}(f), \bar{\theta}(f) \in \mathcal{F}_{fr}(U, L)$. Tekintsük most a következő halmazon értelmezett részbenrendezett halmazt:

$$\mathcal{H} := \{(\underline{\theta}(f), \bar{\theta}(f)) \mid f \in \mathcal{F}_{fr}(U, L)\}.$$

Megmutatom, hogy $(\mathcal{H}, \leq)$ egy háló, továbbá ha U vagy L véges, akkor teljes háló. Ezt a megközelítést az alábbi példák motiválják:

- 1) Ha U véges halmaz, akkor θ és minden $f \in \mathcal{F}(U)$ véges értékkészletű. Így $L = [0, 1]$ esetén $\mathcal{F}_{fr}(U, L) = \mathcal{F}(U)$, és $(\mathcal{H}, \leq)$ egybeesik $(\mathcal{FR}(U, \theta), \leq)$ -vel.
- 2) Ha L véges lánc, amelyre $0, 1 \in L$, akkor bármely $f \in \mathcal{F}(U, L)$ véges értékkészletű, így $\mathcal{F}_{fr}(U, L) = \mathcal{F}(U, L)$, továbbá $(\mathcal{H}, \leq)$ egybeesik $(\mathcal{FR}(U, L), \leq)$ -vel.

5.21. Megjegyzés. (a) Mindig érvényesek a $\underline{\theta}(f_1) \wedge \underline{\theta}(f_2) = \underline{\theta}(f_1 \wedge f_2)$ és $\bar{\theta}(f_1) \vee \bar{\theta}(f_2) = \bar{\theta}(f_1 \vee f_2)$ azonosságok bármely $f_1, f_2 \in \mathcal{F}(U)$ esetén (ld. például [22]). Tegyük fel most, hogy teljesül a (C) feltétel, vagy $\odot$ balról folytonos t -norma és $\triangleright$ a belőle származtatott R -implikátor. Ismert (ld. például [69]), hogy ebben az esetben az

$$\bigwedge \{\underline{\theta}(f_i) \mid i \in I\} = \underline{\theta} \left(\bigwedge \{f_i \mid i \in I\} \right), \bigvee \{\bar{\theta}(f_i) \mid i \in I\} = \bar{\theta} \left(\bigvee \{f_i \mid i \in I\} \right)$$

egyenlőségek szintén teljesülnek bármely (nemüres) $f_i \in \mathcal{F}(U), i \in I$ rendszerre.

(b) Ha $L \subseteq [0, 1]$ teljes háló, és $\theta: U \times U \rightarrow L$, akkor nyilvánvalóan bármely $f_i \in \mathcal{F}(U, L)$, $i \in I$ esetén $\bigwedge \{f_i \mid i \in I\}, \bigvee \{f_i \mid i \in I\} \in \mathcal{F}(U, L)$ és $\bigwedge \{\underline{\theta}(f_i) \mid i \in I\} = \underline{\theta}(\bigwedge \{f_i \mid i \in I\}) \in \mathcal{F}(U, L)$, $\bar{\theta}(\bigvee \{f_i \mid i \in I\}) \in \mathcal{F}(U, L)$.

(c) Mivel ebben az esetben az (ID) feltételei szintén teljesülnek, a [4] alapján a $\theta \odot$ -hasonlósági relációra $f \mapsto \underline{\theta}(f)$, $f \in \mathcal{F}(U, L)$ leképezés egy belső operátor, míg az $f \mapsto \bar{\theta}(f)$, $f \in \mathcal{F}(U, L)$ egy lezárási operátor. Ezáltal $(\text{Fix}_L(\underline{\theta}), \leq)$ és $(\text{Fix}_L(\bar{\theta}), \leq)$ teljes hálók, ahol $\text{Fix}_L(\underline{\theta}) := \{f \in \mathcal{F}(U, L) \mid \underline{\theta}(f) = f\}$ és $\text{Fix}_L(\bar{\theta}) := \{f \in \mathcal{F}(U, L) \mid \bar{\theta}(f) = f\}$.

5.22. Állítás. Tegyük fel, hogy az (ID) feltételei teljesülnek, és legyen $L \subseteq [0, 1]$ egy teljes háló, valamint $\theta: U \times U \rightarrow L$ egy $\odot$ -hasonlósági reláció. Ekkor $(\text{Fix}_L(\bar{\theta}), \leq)$ és $(\text{Fix}_L(\underline{\theta}), \leq)$ teljes részhálói az $\mathcal{F}(U, L)$ halmaznak.

Bizonyítás. Legyen $f_i \in \text{Fix}_L(\bar{\theta})$, $i \in I$ tetszőleges. Ekkor az 5.21. Megjegyzés alapján $\bigvee \{f_i \mid i \in I\} \in \mathcal{F}(U, L)$, és $\bar{\theta}(\bigvee \{f_i \mid i \in I\}) = \bigvee \{\bar{\theta}(f_i) \mid i \in I\} = \bigvee \{f_i \mid i \in I\}$. Tehát $\bigvee \{f_i \mid i \in I\} \in \text{Fix}_L(\bar{\theta})$. Mivel $\text{Fix}_L(\bar{\theta})$ az $f \mapsto \bar{\theta}(f)$ operátor zárt halmazainak rendszere, és $f_i \in \text{Fix}_L(\bar{\theta})$, $i \in I$, azt is megkapjuk, hogy $\bigwedge_{i \in I} f_i \in \text{Fix}_L(\bar{\theta})$. Így $(\text{Fix}_L(\bar{\theta}), \leq)$ egy teljes részháló az $(\mathcal{F}(U, L), \leq)$ hálóban. Az állítás, miszerint $(\text{Fix}_L(\underline{\theta}), \leq)$ teljes részháló a $(\mathcal{F}(U, L), \leq)$ hálóban, duális módon igazolható. $\square$

5.23. Következmény. Legyen $\theta: U \times U \rightarrow L$ egy hasonlósági reláció véges értékkészlettel U -n, $f_i \in \mathcal{F}(U, L)$, $i \in I$, $F = \bigwedge \{\bar{\theta}(f_i) \mid i \in I\}$ és legyen $\{a\} \subseteq U$ egy maximális $E(F)$ -osztály. Ekkor $F(a) = \bigwedge \{f_i(a) \mid i \in I\}$.

Bizonyítás. Az 5.22 proposition alapján $F = \bigwedge \{\bar{\theta}(f_i) \mid i \in I\} \in \text{Fix}_L(\bar{\theta})$, azaz $F = \bar{\theta}(F)$. Mivel $\bar{\theta}(f_i)(a) \geq F(a)$, $i \in I$, az 5.20(i) proposition alkalmazásával kapjuk, hogy $\bar{\theta}(f_i)(a) = f_i(a)$, minden $i \in I$ esetén. Ezáltal $F(a) = \bigwedge \{f_i(a) \mid i \in I\}$. $\square$

5.24. Tétel. Legyen $\theta: U \times U \rightarrow L$ egy hasonlósági reláció véges értékkészlettel, és tegyük fel, hogy teljesül a (C) feltétel egy olyan negátorral, amelyre $n(L) \subseteq L$.

(i) Ha a $\bigwedge_{i \in I} f_i, \bigwedge_{i \in I} \bar{\theta}(f_i)$, $f_i \in \mathcal{F}(U, L)$, $i \in I$ fuzzy halmazok véges értékkészletűek, akkor a $(\underline{\theta}(f_i), \bar{\theta}(f_i))$, $i \in I$ fuzzy durva halmazok infimuma létezik $(\mathcal{FR}(U, L), \leq)$ -ben, és komponensei véges értékkészletűek.

(ii) $(\mathcal{H}, \leq) = (\{\underline{\theta}(f), \bar{\theta}(f) \mid f \in \mathcal{F}_r(U, L)\}, \leq)$ egy háló.

(iii) Ha U vagy L véges, akkor $(\mathcal{FR}(U, L), \leq)$ egy teljes háló.

Bizonyítás. (i) Vezessük be a $G = \bigwedge_{i \in I} f_i$ és $F = \bigwedge_{i \in I} \bar{\theta}(f_i)$ jelöléseket. Ekkor $G, F \in \mathcal{F}(U, L)$, az 5.21. Megjegyzés (b) pontja alapján, és teljesül,

hogy $\underline{\theta}(G) = G$ és $\bar{\theta}(\bar{\theta}(f_i)) = \bar{\theta}(f_i)$, $i \in I$, az 5.21. Megjegyzés (c) pontja szerint. Így $G \in \text{Fix}_L(\underline{\theta})$. Mivel θ és $\bigwedge_{i \in I} f_i$ véges értékkészletűek, G is véges értékkészletű. Mivel $\bar{\theta}(f_i) \in \text{Fix}_L(\bar{\theta})$, az 5.22. Állításból adódik, hogy $F \in \text{Fix}_L(\bar{\theta})$, és a feltevés szerint F véges értékkészletű. Nyilvánvalóan $G = \underline{\theta}(\bigwedge_{i \in I} f_i) \leq \bar{\theta}(f_i)$, minden $i \in I$ esetén, tehát $G \leq F$. A G és F segítségével konstruálunk egy $f \in \mathcal{F}(U, L)$ fuzzy halmazt úgy, hogy $(\underline{\theta}(f), \bar{\theta}(f))$ egyenlő legyen a $\{(\underline{\theta}(f_i), \bar{\theta}(f_i)) \mid i \in I\}$ halmaz infimumával.

Először minden $\mathcal{E}_t, t \in T$ maximális $\varepsilon(G)$ -osztályból pontosan egy $b_t \in \mathcal{E}_t$ elemet választunk ki az alábbi módon:

- 1) Ha $\mathcal{E}_t$ tartalmaz egy olyan $q_t \in \mathcal{E}_t$ elemet, amelyre $G(q_t) = F(q_t)$, akkor legyen $b_t := q_t$.
- 2) Ha nincs ilyen elem $\mathcal{E}_t$ -ben, de létezik olyan $s_t \in \mathcal{E}_t$, amire $\{s_t\}$ nem $E(F)$ -osztály, akkor őt választjuk és $b_t := s_t$.
- 3) Ha nincsenek 1) vagy 2) típusú elemek $\mathcal{E}_t$ -ben, akkor választunk egy olyan $r_t \in \mathcal{E}_t$ elemet, amelyre $\{r_t\}$ nem maximális $E(F)$ -osztály, és $b_t := r_t$.

Most megmutatom, hogy egy ilyen kiválasztás mindig kivitelezhető. Tegyük fel az ellenkezőjét, azaz hogy van egy olyan $\mathcal{E}_z$ osztály, amely nem tartalmaz 1), 2) vagy 3) típusú elemeket. Ez azt jelenti, hogy minden $x \in \mathcal{E}_z$ esetén $\{x\}$ egy maximális $E(F)$ -osztály. Ekkor az 5.23. Következmény alapján minden $x \in \mathcal{E}_z$ esetén $F(x) = \bigwedge_{i \in I} f_i(x)$. Mivel $\bigwedge_{i \in I} f_i(x)$ értékkészlete véges, az 5.12. Állítás (ii) pontja szerint $G(y) = \min\{\bigwedge_{i \in I} f_i(x) \mid x \in \mathcal{E}_z\}$ minden $y \in \mathcal{E}_z$ esetén, mivel $G = \underline{\theta}(\bigwedge_{i \in I} f_i)$. Tehát létezik olyan $v \in \mathcal{E}_z$, amelyre $G(v) = \bigwedge_{i \in I} f_i(v) = F(v)$. Ez azt jelenti, hogy v egy 1) típusú elem $\mathcal{E}_z$ -ben, ami ellentmondás.

A következő lépésben egy $f \in \mathcal{F}(U, L)$ fuzzy halmazt konstruálunk úgy, hogy:

$$f(x) = \begin{cases} G(x), & \text{ha } x \in \{b_t \mid t \in T\}; \\ F(x), & \text{ha } x \in U \setminus \{b_t \mid t \in T\} \end{cases} \quad (5.1)$$

Mivel $G, F \in \mathcal{F}(U, L)$, így $f \in \mathcal{F}(U, L)$. Mivel F és G értékkészlete véges, f értékkészlete is véges. Mivel minden $\mathcal{E}_t, t \in T$ maximális $\varepsilon(G)$ -osztályból kiválasztottunk egy $b_t \in \mathcal{E}_t$ elemet, valamint $f(b_t) = G(b_t)$ és $f \geq G$ teljesül, így az 5.11. Állítás (ii) pontja szerint $\underline{\theta}(f) = G = \underline{\theta}(\bigwedge_{i \in I} f_i)$. Most azt fogjuk

belátni, hogy $(\underline{\theta}(f), \bar{\theta}(f))$ az $(\underline{\theta}(f_i), \bar{\theta}(f_i)), i \in I$ rendszer infimuma. Tehát megmutatjuk, hogy $(\underline{\theta}(f), \bar{\theta}(f))$ alsó korlátja a $(\underline{\theta}(f_i), \bar{\theta}(f_i)), i \in I$ rendszernek, és hogy bármely $h \in \mathcal{F}(U, L)$ fuzzy halmazra, amelyre $(\underline{\theta}(h), \bar{\theta}(h)) \leq (\underline{\theta}(f_i), \bar{\theta}(f_i)), i \in I$, teljesül, hogy $(\underline{\theta}(h), \bar{\theta}(h)) \leq (\underline{\theta}(f), \bar{\theta}(f))$. Mivel definíció szerint $f \leq F$, azt kapjuk, hogy $\bar{\theta}(f) \leq \bar{\theta}(F) = F \leq \bar{\theta}(f_i), i \in I$. Mivel $\underline{\theta}(f) = \underline{\theta}(\bigwedge_{i \in I} f_i) \leq \underline{\theta}(f_i), i \in I$, így most $(\underline{\theta}(f), \bar{\theta}(f))$ valóban alsó korlátja a $(\underline{\theta}(f_i), \bar{\theta}(f_i)), i \in I$ rendszernek, és a $\bar{\theta}(h) \leq \bar{\theta}(f_i), i \in I$ feltétel ekvivalens azzal, hogy $\bar{\theta}(h) \leq \bigwedge_{i \in I} \bar{\theta}(f_i) = F$. Mivel $\underline{\theta}(f) = \underline{\theta}(\bigwedge_{i \in I} f_i) = \bigwedge_{i \in I} \underline{\theta}(f_i)$, így azt kapjuk, hogy

$$\underline{\theta}(h) \leq \underline{\theta}(f_i), i \in I \iff \underline{\theta}(h) \leq \bigwedge_{i \in I} \underline{\theta}(f_i) = \underline{\theta}(f) = G.$$

Tehát annak bizonyításához, hogy $(\underline{\theta}(h), \bar{\theta}(h)) \leq (\underline{\theta}(f), \bar{\theta}(f))$ fennáll minden olyan $h \in \mathcal{F}(U, L)$ fuzzy halmazra, amelyre $(\underline{\theta}(h), \bar{\theta}(h)) \leq (\underline{\theta}(f_i), \bar{\theta}(f_i)), i \in I$, elegendő megmutatni, hogy $\bar{\theta}(h) \leq \bar{\theta}(f)$ teljesül minden olyan $h \in \mathcal{F}(U, L)$ fuzzy halmazra, amelyre $\underline{\theta}(h) \leq G$ és $\bar{\theta}(h) \leq F$.

Vegyünk egy ilyen h fuzzy halmazt és egy $x \in U$ elemet. Ha $x \in U \setminus \{b_t \mid t \in T\}$ vagy $x = b_{t_0}$ valamely $t_0 \in T$ esetén, amire $G(b_{t_0}) = F(b_{t_0})$, akkor $f(x) = F(x)$, így $h(x) \leq \bar{\theta}(h)(x) \leq F(x) = f(x) \leq \bar{\theta}(f)(x)$.

Legyen $x = b_{t_0}$, ahol $t_0 \in T$ olyan, hogy $G(b_{t_0}) \neq F(b_{t_0})$. Ekkor a konstrukció szerint $f(b_{t_0}) = G(b_{t_0})$. Ha $\{b_{t_0}\}$ egy maximális $\varepsilon(G)$ -osztály, akkor az 5.20. Állítás (ii) pontja értelmében $\underline{\theta}(h)(b_{t_0}) \leq G(b_{t_0})$ miatt $h(b_{t_0}) = \underline{\theta}(h)(b_{t_0}) \leq G(b_{t_0})$, azaz $h(x) \leq G(x) = f(x) \leq \bar{\theta}(f)(x)$ adódik.

Tegyük fel most, hogy a b_{t_0} elemet tartalmazó $\mathcal{E}_{t_0}$ maximális $\varepsilon(G)$ -osztály legalább két elemet tartalmaz. Jelölje E_0 azt az $E(F)$ -osztályt, amelyik tartalmazza a b_{t_0} elemet.

Ha $E_0 \not\subseteq \mathcal{E}_{t_0}$, akkor létezik $z_0 \in E_0 \setminus \mathcal{E}_{t_0}$, és minden $y \in \mathcal{E}_{t_0}$ esetén $(y, z_0) \notin \varrho(G)$, mivel $\mathcal{E}_{t_0}$ egy maximális $\varepsilon(G)$ -osztály. Így az 5.8. Következmény (ii) pontja szerint $(z, y) \in R(F)$ minden $z \in E_0$ és $y \in \mathcal{E}_{t_0}$ esetén. Tehát $(b_{t_0}, c) \in R(F)$ minden $c \in \mathcal{E}_{t_0}, c \neq b_{t_0}$ esetén. Nyilvánvalóan $c \notin \{b_t \mid t \in T\}$, mivel $\mathcal{E}_{t_0}$ -ból csak egyetlen elemet választottunk ki, így $f(c) = F(c)$. Mivel $(b_{t_0}, c) \in R(F)$ és $f \leq F$, az 5.6. Állítás (i) pontjának alkalmazásával $\bar{\theta}(f)(b_{t_0}) = F(b_{t_0})$ adódik. Így $h(b_{t_0}) \leq \bar{\theta}(h)(b_{t_0}) \leq F(b_{t_0}) = \bar{\theta}(f)(b_{t_0})$, azaz $h(x) \leq \bar{\theta}(f)(x)$.

Ha $E_0 \subseteq \mathcal{E}_{t_0}$, akkor $(b_{t_0}, e) \in R(F)$ valamely $e \in \mathcal{E}_{t_0} \setminus \{b_{t_0}\}$ esetén (ilyen elem létezik, mert $|\mathcal{E}_{t_0}| \geq 2$). Nyilvánvaló, hogy ha E_0 legalább két elemet tartalmaz, akkor e választható tetszőlegesen $E_0 \setminus \{b_{t_0}\}$ elemei közül. Ha $E_0 = \{b_{t_0}\}$, akkor a konstrukció szerint b_{t_0} egy 3) típusú elem, azaz $\{b_{t_0}\}$ olyan $E(F)$ -osztály, amely nem maximális. Azonban, ha $(b_{t_0}, e) \notin R(F)$ minden

$e \in \mathcal{E}_{t_0} \setminus \{b_{t_0}\}$ esetén, akkor az 5.19. Következmény (ii) pontja szerint $\{b_{t_0}\}$ egy maximális $E(F)$ -osztály lenne, ami ellentmond a feltevésnek. Mivel $\mathcal{E}_{t_0}$ -ból csak a b_{t_0} elemet választottuk ki, $e \notin \{b_t \mid t \in T\}$, így $f(e) = F(e)$. Mivel $(b_{t_0}, e) \in R(F)$, a korábbi érvelést megismételve ismét azt kapjuk, hogy $h(b_{t_0}) \leq \bar{\theta}(f)(b_{t_0})$, azaz $h(x) \leq \bar{\theta}(f)(x)$.

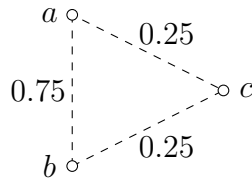
Így minden $x \in U$ esetén teljesül, hogy $h(x) \leq \bar{\theta}(f)(x)$. Ezért $h \leq \bar{\theta}(f)$. A [22] szerint ez azt jelenti, hogy $\bar{\theta}(h) \leq \bar{\theta}(\bar{\theta}(f)) = \bar{\theta}(f)$. Tehát $(\underline{\theta}(f), \bar{\theta}(f))$ az $(\underline{\theta}(f_i), \bar{\theta}(f_i)), i \in I$ rendszer infimuma. Mivel $f \in \mathcal{F}(U, L)$ véges értékkészletű, $\underline{\theta}(f), \bar{\theta}(f) \in \mathcal{F}(U, L)$ szintén véges értékkészletűek.

(ii) Tetszőleges $f_1, f_2 \in \mathcal{F}_{fr}(U, L)$ fuzzy halmazokra $f_1 \wedge f_2$ véges értékkészletű. Az 5.2. Lemmából következik, hogy mivel $\bar{\theta}(f_1), \bar{\theta}(f_2) \in \mathcal{F}_{fr}(U, L)$, ezért $\bar{\theta}(f_1) \wedge \bar{\theta}(f_2)$ is véges értékkészletű. Most $I = \{1, 2\}$ mellett (i)-et alkalmazva azt kapjuk, hogy $(\mathcal{H}, \leq)$ egy $\wedge$ -félháló. Mivel a (C) feltételből következik a (D) tulajdonságot, $(\mathcal{H}, \leq)$ önduális, és így egy háló.

(iii) Ha U vagy L véges, akkor θ is és minden $f \in \mathcal{F}(U, L)$ fuzzy halmaz is véges értékkészletű, azaz $\mathcal{F}(U, L) = \mathcal{F}_{fr}(U, L)$. Mivel tetszőleges $f_i \in \mathcal{F}(U, L)$, $i \in I$ esetén $\bigwedge_{i \in I} f_i, \bigwedge_{i \in I} \bar{\theta}(f_i) \in \mathcal{F}(U, L)$, így ezek is véges értékkészletűek. Ezáltal (i) alapján $\inf\{(\underline{\theta}(f_i), \bar{\theta}(f_i)) \mid i \in I\}$ mindig létezik, azaz $(\mathcal{H}, \leq)$ egy teljes $\wedge$ -félháló. Mivel $(\mathcal{H}, \leq)$ önduális, így teljes háló. $\square$

5.25. Megjegyzés. Tegyük fel, hogy egy $f_i \in \mathcal{F}(U, L)$, $i \in I$ rendszerre $(\underline{\theta}(f), \bar{\theta}(f)) = (\bigwedge\{\underline{\theta}(f_i) \mid i \in I\}, \bigwedge\{\bar{\theta}(f_i) \mid i \in I\})$ valamilyen $f \in \mathcal{F}(U, L)$ fuzzy halmazra. Ekkor $(\underline{\theta}(f), \bar{\theta}(f))$ egyenlő a $(\underline{\theta}(f_i), \bar{\theta}(f_i)), i \in I$ rendszer infimumával. Ez azért van így, mert minden $h \in \mathcal{F}(U, L)$ esetén, amelyre $(\underline{\theta}(h), \bar{\theta}(h)) \leq (\underline{\theta}(f_i), \bar{\theta}(f_i)), i \in I$, azt kaphatjuk, hogy $(\underline{\theta}(h), \bar{\theta}(h)) \leq (\underline{\theta}(f), \bar{\theta}(f))$, vagyis $(\underline{\theta}(f), \bar{\theta}(f))$ valóban a $(\underline{\theta}(f_i), \bar{\theta}(f_i)), i \in I$ rendszer infimuma. Hasonlóan látható, hogy a $(\bigvee\{\underline{\theta}(f_i) \mid i \in I\}, \bigvee\{\bar{\theta}(f_i) \mid i \in I\})$ a $(\underline{\theta}(f_i), \bar{\theta}(f_i)), i \in I$ rendszer szuprémuma, ha $(\bigvee\{\underline{\theta}(f_i) \mid i \in I\}, \bigvee\{\bar{\theta}(f_i) \mid i \in I\}) \in \mathcal{FR}(U, L)$.

5.26. Példa. Használjuk fel az 5.24. Tétel bizonyításában szereplő (5.1) konstrukciót a $(\underline{\theta}(f_1), \bar{\theta}(f_1)) \wedge (\underline{\theta}(f_2), \bar{\theta}(f_2))$ kiszámítására. A θ hasonlósági reláció az 5.3. ábrán látható, és $L = \{0, 0.1, 0.25, 0.5, 0.75, 1\}$. Az f_1, f_2 fuzzy halmazok, valamint approximációik az 5.2. táblázatban találhatók.


 5.3. ábra. Az 5.26. Példában szereplő θ fuzzy hasonlósági reláció

u	a	b	c
$f_1(u)$	1	0.1	0.5
$\bar{\theta}(f_1)(u)$	1	0.75	0.5
$\underline{\theta}(f_1)(u)$	0.25	0.1	0.5

u	a	b	c
$f_2(u)$	0.1	1	0.5
$\bar{\theta}(f_2)(u)$	0.75	1	0.5
$\underline{\theta}(f_2)(u)$	0.1	0.25	0.5

 5.2. táblázat. Az 5.26. Példában szereplő f_1 és f_2 fuzzy halmazok és azok közelítései

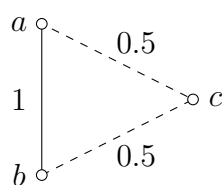
A megfelelő fuzzy durva halmazok a következő formában adódnak: $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0.75 & 0.5 \\ 0.25 & 0.1 & 0.5 \end{pmatrix}$ és $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 0.75 & 1 & 0.5 \\ 0.1 & 0.25 & 0.5 \end{pmatrix}$, ahol az első sor a felső közelítéseket, míg a második sor az alsó közelítéseket reprezentálja. Az $F = \bar{\theta}(f_1) \wedge \bar{\theta}(f_2)$ és a $G = \underline{\theta}(f_1) \wedge \underline{\theta}(f_2)$ metszetek kiszámítása után az $\begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.75 & 0.75 & 0.5 \\ 0.1 & 0.1 & 0.5 \end{pmatrix}$ párt kapjuk, ami nem egy fuzzy durva halmaz. Az F és G által indukált kvázirendezések az 5.4. ábrán láthatók.


 5.4. ábra. A $\varrho(G)$ és $R(F)$ kvázirendezések.

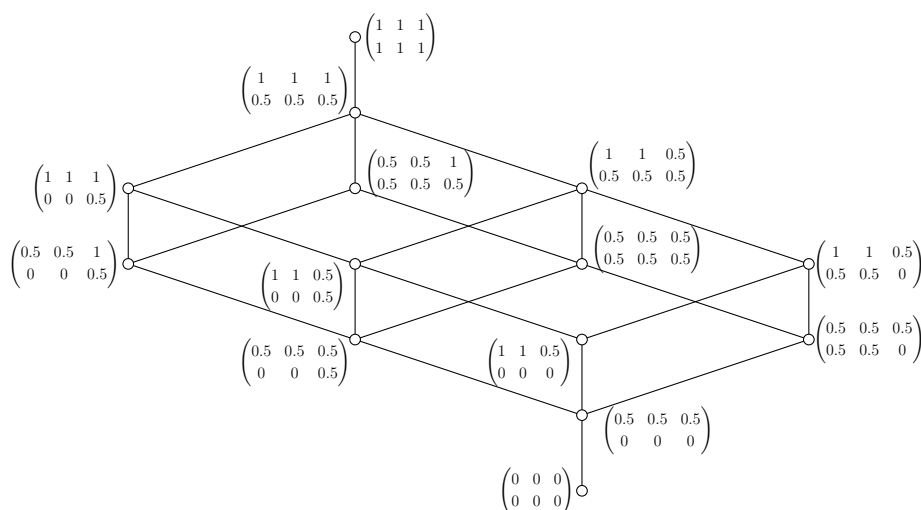
Megfigyelhető, hogy minden elem maximális $\varepsilon(G)$ -osztály. Ezért az 5.24. Tétel bizonyításában szereplő (5.1) képlet alkalmazásával kapjuk az $f := G$ referenciahalmazt, a hozzá tartozó fuzzy durva halmaz pedig a következő:

$$\begin{pmatrix} 0.25 & 0.25 & 0.5 \\ 0.1 & 0.1 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

5.27. Példa. Vizsgáljuk meg az 5.5. ábrán látható θ hasonlósági relációt, és legyen $L = \{0, 0.5, 1\}$. A fuzzy durva halmazokból álló $(\mathcal{H}, \leq)$ háló az 5.6. ábrán látható.



5.5. ábra. Az 5.27. Példában szereplő θ hasonlósági reláció



5.6. ábra. Az 5.27. Példában szereplő fuzzy durva halmazok hálója

6. FUZZY DURVA HALMAZOK ALKALMAZÁSA KÉPTÖMÖRÍTÉSRE

A durva halmazok alkalmazási területeiről említettem néhányat a 2.5. alfejezetben, mint például az orvosi diagnózisok elősegítését [59] és a döntéstámogatást [94]. Ezeken felül számos más gyakorlati alkalmazás létezik, amit több tanulmány, metaanalízis is összefoglal, ld. például [86] és [130]. A modellt sikeresen hasznosították már hibadetektálásban [76], előrejelzésben [105], mintafelismerésben és osztályozásban [47] [109], hang- és beszédelemzésben [16] [131] [132], képfeldolgozásban [80] [89] [88], továbbá neurális hálók esetén a bemeneti adatok előfeldolgozásában [62] [111]. Mindezek rámutatnak a durva halmazok rendkívüli *jellemzőkiválasztási (feature selection)* képességére.

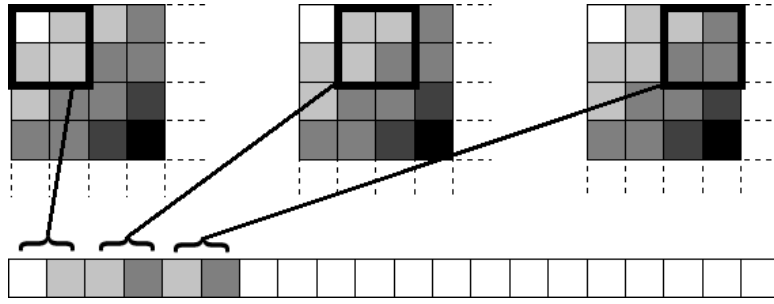
Ebben a fejezetben egy képtömörítési eljárást fogok bemutatni, ami a fuzzy durva halmazok modelljén alapul. A javasolt módszerem egy továbbfejlesztett, általánosított változata a Petrosino és Ferone [88] cikkében szereplő *durva fuzzy vektorkvantálásnak (RFVQ – rough fuzzy vector quantization)*, így előbb azt ismertetem. Az eljárást Ferone disszertációja [27] is tartalmazza.

6.1. Előzmény

Petrosino és Ferone [88] durva fuzzy halmazokon alapuló képtömörítési módszere alapvetően egy blokkos tömörítést valósít meg szürkeárnyaltos képeken. A kép minden pixeléhez annak fényerőssége (luminosity) alapján rendel egy fuzzy halmazt – így a fekete szín 0 tagsági értéknek, a fehér szín pedig 1 tagsági értéknek felel meg. Maga a módszer három fázisra bontható: kódtábla felépítése, kódolás, dekódolás.

6.1.1. Kódtábla felépítése

A *kódtábla felépítésére* tekinthetünk úgy, mint egyfajta "betanításra". Ekkor az algoritmus feldolgoz néhány ismert képet. Először a képeket egyforma méretű (pl. 4×4 -es) blokkokra osztjuk, majd minden egyes blokkon végigcsúsztatunk egy kisebb (pl. 2×2 -es ablakot). A módszer néhány lépését a 6.1.1. ábra szemlélteti. Az ablakra úgy tekintünk, hogy adott lépésben éppen egy (éles) ekvivalenciareláció egy osztályát mutatja. Erre az osztályra kiszámoljuk az alsó és a felső approximációjához tartozó tagsági értékeket, és elhelyezzük őket egy vektorba. Emlékezzünk, hogy a durva fuzzy halmazok esetén egy ekvivalenciaosztályon belüli elemekre az alsó approximációk értéke megegyezik, és ugyanez igaz a felső approximációkra is.



6.1. ábra. Blokkhoz tartozó vektor felépítése az ablak csúsztatásával.

A feldolgozás után a tanítóképek minden egyes blokkjához megkapjuk a hozzá tartozó vektort. A keletkező vektorhalmaz alkotja a kódtáblát. Viszont mivel ez nagyméretű lehet, ezért valamilyen vektorkvantálást célszerű alkalmazni rá. A szerzők a [88] cikkben az ISODATA [66] algoritmust használták erre a célra. A redukált kódtábla már kisebb méretű, így az algoritmus futtatása is kevesebb tárhelyet igényel.

6.1.2. Kódolás

Miután a mögöttes modellt felépítettük, vagyis túl vagyunk a kódtábla felépítésének fázisán, átadhatunk az algoritmusnak egy képet tömörítésre. Ehhez először a kódtábla felépítéséhez is használt módon blokkokra osztjuk a képet, és minden egyes blokkhoz kiszámoljuk a kapcsolódó vektort az ismertetett módon. Ezután megnézzük, hogy a blokkhoz melyik vektor áll a legközelebb a kódtáblában, és a tömörített képbe csupán annak sorszámát helyezzük.

6.1.3. Durva fuzzy halmazok szorzata

A dekódolás ismertetéséhez szükség van egy másik fogalomra, még hozzá a durva fuzzy halmazok szorzatára. Legyen az alaphalmaz U , és legyenek $E_1 \subseteq U \times U$ és $E_2 \subseteq U \times U$ ekvivalenciarelációk. Továbbá legyenek $(\underline{f}, \bar{f}) \in \mathcal{RS}(U, E_1)$ és $(\underline{g}, \bar{g}) \in \mathcal{RS}(U, E_2)$ durva fuzzy halmazok. Ekkor $(\underline{f}, \bar{f})$ és $(\underline{g}, \bar{g})$ szorzata a következő durva fuzzy halmaz az $(U, E_1 \cap E_2)$ approximációs térben:

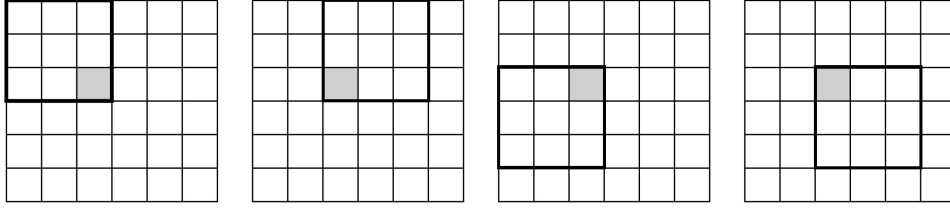
$$(\underline{f}, \bar{f}) \otimes (\underline{g}, \bar{g}) := (\sup\{\underline{f}, \underline{g}\}, \inf\{\bar{f}, \bar{g}\}), \quad (6.1)$$

Érdemes megjegyezni, hogy ez a definíció használható durva L -fuzzy halmazok esetén is. Mivel a fényerősség értékek 0 és 1 közötti valós számok, így a továbbiakban csak az $L = [0, 1]$ esetét tárgyalom ennél az alkalmazásnál.

6.1.4. Dekódolás

Dekódolás során a tömörített képben tárolt sorszámok alapján kikeressük a kódtáblából a megfelelő vektorokat az egyes blokkokhoz, majd rekonstruáljuk

a pixeleket. Egy adott pixelre tekinthetünk úgy, hogy négy olyan ekvivalencia-reláció osztályainak metszete, amelyekben a mozgóablak sarka volt az adott pixel – ezt szemlélteti a 6.1.4. ábra, ahol 3×3 -as ablakokat használtunk.



6.2. ábra. Adott pixel és a négy ekvivalenciareláció, amelyek osztályainak metszeteként adódik a képpont szorzás után, mint egytagú ekvivalenciaosztály.

A pixelhez a vektorból ki tudjuk olvasni a kapcsolódó négy ekvivalenciaosztályhoz tartozó alsó és felső approximáció értékeket. Ezeket a (6.1) képlet felhasználásával összeszorozzuk, és megkapjuk a képpont fényerősségének alsó és felső approximációját. Lokális folytonosságot feltételezve ezek átlaga adja a dekódolt értéket.

6.2. Az algoritmus továbbfejlesztése

Az eredeti algoritmus szürkeárnyaltos képeken dolgozott, de ezt a részt könnyen tudjuk általánosítani. Mindössze annyit kell tennünk, hogy az ismertetett eljárásokat színcsatornánként végezzük el.

6.2.1. Fuzzy hasonlósági reláció használata

A szerzők a [88] cikkben 2×2 ablakot használtak, ám ez lehet tetszőleges méretű, sőt négyzetesnek sem kell lennie. A további általánosításhoz előbb formalizáljuk a tolóablakos ekvivalenciaosztályok meghatározását. A kép pontjai alkotják az U alaphalmazt. A későbbiekhez érdemes tisztázni, hogy az egyes képpontokra a sor- és oszlopszámával hivatkozunk, így $U \subseteq \mathbb{Z}^2 \subseteq \mathbb{R}^2$. Legyen $p \in U$ egy pixel, aminek koordinátáját jelölje p_x , a függőleges koordinátáját p_y . A p pixelhez tartozó ekvivalenciaosztályt jelölje E_p . Az E_p ekvivalencia-relációt a $q, r \in U$ pixelekre egy $k \times l$ méretű ($k, l \in \mathbb{N}^+$) mozgóablak esetén úgy definiáljuk, hogy $q = r$ esetén $(q, r) \in E_p$, $q \neq r$ esetén pedig

$$(q, r) \in E_p \Leftrightarrow 0 \leq q_x - p_x, r_x - p_x \leq k - 1 \text{ és } 0 \leq q_y - p_y, r_y - p_y \leq l - 1. \quad (6.2)$$

Az előzőleg ismertetett változatban tehát tekinthetjük úgy, hogy az ablak mindig a bal felső sarokban levő pixelhez határoz meg egy ekvivalenciarelációt. A pixelekhöz így rendelt ekvivalenciarelációkat lecserélhetjük egy-egy $\theta_p : U \times U \rightarrow [0, 1]$ fuzzy hasonlósági relációra.

A (6.1) képletben szereplő szorzás műveletét is újra kell értelmeznünk fuzzy durva halmazokra. Legyenek $\theta_1, \theta_2 : U \times U \rightarrow [0, 1]$ fuzzy hasonlósági

relációk. Legyen $\sigma = \inf\{\theta_1, \theta_2\}$, továbbá legyenek $(\underline{f}, \overline{f}) \in \mathcal{RF}(U, \theta_1)$ és $(\underline{g}, \overline{g}) \in \mathcal{RF}(U, \theta_2)$ fuzzy durva halmazok. Ekkor $(\underline{f}, \overline{f})$ és $(\underline{g}, \overline{g})$ szorzata egy olyan $(\underline{h}, \overline{h})$ fuzzy durva halmaz az (U, σ) approximációs térben, amire

$$\begin{aligned}\underline{h}(x) &= \bigwedge \{ \max(1 - \sigma(x, y), \underline{f}(y), \underline{g}(y)) \mid y \in U \}, \\ \overline{h}(x) &= \bigvee \{ \min(\sigma(x, y), \overline{f}(y), \overline{g}(y)) \mid y \in U \}.\end{aligned}\quad (6.3)$$

Amennyiben $\odot$ egy t -norma, $\oplus$ a hozzá tartozó t -konorma, n egy involutív negátor, $\triangleright$ pedig egy határimplikátor a $[0, 1]$ intervallumon, akkor a szorzat alsó és felső approximációja:

$$\begin{aligned}\underline{h}(x) &= \bigwedge \{ \sigma(x, y) \triangleright (\underline{f}(y) \oplus \underline{g}(y)) \mid y \in U \}, \\ \overline{h}(x) &= \bigvee \{ \sigma(x, y) \odot \overline{f}(y) \odot \overline{g}(y) \mid y \in U \}.\end{aligned}\quad (6.4)$$

Ha θ_1 és θ_2 olyan fuzzy hasonlósági transzformációk, melyek értékkészlete a $\{0, 1\}$, akkor szorzatként visszakapjuk a (6.1) képlet szerinti eredményt. A pixelekhez megadott ekvivalenciarelációk helyett most mindegyik p képpont-hoz egy-egy $\theta_p : U \times U \rightarrow [0, 1]$ fuzzy hasonlósági relációt rendelünk. Például az alábbi θ_p reláció felelne meg a (6.2) ekvivalenciarelációnak:

$$\theta_p(q, r) = \begin{cases} 1, & \text{ha } q = r; \\ 1, & \text{ha } 0 \leq q_x - p_x, r_x - p_x \leq k - 1 \\ & \text{és } 0 \leq q_y - p_y, r_y - p_y \leq l - 1; \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases} \quad (6.5)$$

Természetesen már 0 és 1 közötti valós értéket is megadhatunk, így kézenfekvő választás lehet a pixelhez tartozó fuzzy hasonlósági relációt a képpontok távolsága alapján definiálni. Ezek lehetnek akár egységesek is egy $\theta_p = \theta, \forall p \in U$ fuzzy hasonlósági reláció használatával, nem muszáj pixelenként eltérniük. Ilyenkor a (6.3) és (6.4) képletekben $\sigma = \theta$ miatt σ helyett θ írható.

A $\theta_p = \theta, \forall p \in U$ fuzzy hasonlósági relációt megadhatjuk például a következő módokon:

$$\theta(q, r) = e^{-w \cdot d^2(q, r)}, \quad (6.6)$$

$$\theta(q, r) = e^{-w \cdot d(q, r)}, \quad (6.7)$$

$$\theta(q, r) = \max(0, 1 - w \cdot d(q, r)), \quad (6.8)$$

ahol $q, r \in U$, továbbá $w > 0$ egy konstans szorzó, d pedig egy távolságfüggvény. A $d : U \times U \rightarrow \mathbb{R}$ távolságfüggvény definíció szerint az alábbi tulajdonságokat teljesíti minden $x, y, z \in U$ esetén:

- $d(x, x) = 0$;
- $d(x, y) > 0$, ha $x \neq y$;
- $d(x, y) = d(y, x)$;

- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (háromszög-egyenlőtlenség).

A $p, q \in U$ pixelekre például az alábbi széles körben elterjedt távolságokat használhatjuk:

- Euklideszi távolság: $d(p, q) = \sqrt{(q_x - p_x)^2 + (q_y - p_y)^2}$;
- Manhattan-távolság: $d(p, q) = |q_x - p_x| + |q_y - p_y|$;
- Csebisev-távolság: $d(p, q) = \max(|q_x - p_x|, |q_y - p_y|)$.

Más távolságfogalmak is léteznek, de az algoritmus tárgyalása szempontjából kevésbé lényegesek. A pixeleken meghatározható néhány lehetséges θ relációról megmutatom, hogy fuzzy $\odot$ -hasonlósági relációt alkotnak.

6.1. Állítás. *Legyen $d : U \times U \rightarrow \mathbb{R}$ tetszőleges távolságfüggvény és $w > 0$ tetszőleges valós konstans. Ekkor*

$$\theta : U \times U \rightarrow [0, 1], \theta(p, q) = \max(0, 1 - w \cdot d(p, q))$$

egy fuzzy toleranciareláció. Továbbá ha $\odot$ a Łukasiewicz t -norma, azaz $x, y \in [0, 1]$ esetén $x \odot y = \max(0, x + y - 1)$, akkor θ egy fuzzy $\odot$ -hasonlósági reláció.

Bizonyítás. A reflexivitás és szimmetria triviálisan adódik a távolságfüggvény tulajdonságaiból, így θ egy fuzzy toleranciareláció.

Legyenek most $p, q, r \in U$ tetszőlegesek. Be fogjuk látni, hogy

$$\theta(p, q) \odot \theta(q, r) \leq \theta(p, r).$$

Abban az esetben, ha $\theta(p, q) = 0$ vagy $\theta(q, r) = 0$, ez triviálisan adódik, hiszen bármely t -normára $0 \odot a = a \odot 0 = 0$, minden $a \in [0, 1]$ esetén. Legyen tehát a továbbiakban $\theta(p, q) > 0$ és $\theta(q, r) > 0$. Ez csak úgy lehetséges, ha $\theta(p, q) = 1 - w \cdot d(p, q)$ és $\theta(q, r) = 1 - w \cdot d(q, r)$. Ekkor a háromszög-egyenlőtlenségből kiindulva ekvivalens átalakításokkal

$$d(p, q) + d(q, r) \geq d(p, r),$$

$$1 - w \cdot (d(p, q) + d(q, r)) \leq 1 - w \cdot d(p, r),$$

$$1 - w \cdot d(p, q) - w \cdot d(q, r) \leq 1 - w \cdot d(p, r),$$

$$1 - w \cdot d(p, q) + 1 - w \cdot d(q, r) - 1 \leq 1 - w \cdot d(p, r),$$

$$\theta(p, q) + \theta(q, r) - 1 \leq 1 - w \cdot d(p, r),$$

$$\max(0, \theta(p, q) + \theta(q, r) - 1) \leq \max(0, 1 - w \cdot d(p, r)),$$

$$\theta(p, q) \odot \theta(q, r) \leq \theta(p, r),$$

tehát θ $\odot$ -tranzitív, így egy fuzzy $\odot$ -hasonlósági reláció. □

6.2. Állítás. Legyen $d : U \times U \rightarrow \mathbb{R}$ tetszőleges távolságfüggvény és $w > 0$ tetszőleges valós konstans. Ekkor

$$\theta : U \times U \rightarrow [0, 1], \theta(q, r) = e^{-w \cdot d(q, r)}$$

egy fuzzy toleranciareláció. Továbbá ha $\odot$ az egyszerű aritmetikai szorzat, azaz $x, y \in [0, 1]$ esetén $x \odot y = x \cdot y$, akkor θ egy fuzzy $\odot$ -hasonlósági reláció.

Bizonyítás. A reflexivitás és szimmetria triviálisan adódik a távolságfüggvény tulajdonságaiból, így θ egy fuzzy toleranciareláció.

Legyenek most $p, q, r \in U$ tetszőlegesek. Be fogjuk látni, hogy

$$\theta(p, q) \odot \theta(q, r) \leq \theta(p, r).$$

Ekkor a háromszög-egyenlőtlenségből kiindulva ekvivalens átalakításokkal

$$\begin{aligned} d(p, q) + d(q, r) &\geq d(p, r), \\ e^{-w \cdot (d(p, q) + d(q, r))} &\leq e^{-w \cdot d(p, r)}, \\ e^{-w \cdot d(p, q) - w \cdot d(q, r)} &\leq e^{-w \cdot d(p, r)}, \\ e^{-w \cdot d(p, q)} \cdot e^{-w \cdot d(q, r)} &\leq e^{-w \cdot d(p, r)}, \\ \theta(p, q) \odot \theta(q, r) &\leq \theta(p, r), \end{aligned}$$

tehát θ $\odot$ -tranzitív, így egy fuzzy $\odot$ -hasonlósági reláció. $\square$

6.3. Következmény. Legyen $d : U \times U \rightarrow \mathbb{R}$ tetszőleges távolságfüggvény és $w > 0$ tetszőleges valós konstans. Ekkor

$$\theta_1 : U \times U \rightarrow [0, 1], \theta(q, r) = e^{-w \cdot d(q, r)},$$

$$\theta_2 : U \times U \rightarrow [0, 1], \theta(q, r) = \max(0, 1 - w \cdot d(q, r)).$$

Ha $\odot$ a drasztikus t -norma, akkor θ_1 és θ_2 fuzzy $\odot$ -hasonlósági relációk.

Bizonyítás. Az állítás közvetlenül adódik abból a közismert tényből, hogy a t -normák közül a drasztikus t -norma a legkisebb, valamint a 6.1. és 6.2. Állításokból. $\square$

6.4. Állítás. Legyen $d : U \times U \rightarrow \mathbb{R}$ tetszőleges távolságfüggvény és $w > 0$ tetszőleges valós konstans. Ekkor

$$\theta : U \times U \rightarrow [0, 1], \theta(q, r) = e^{-w \cdot d^2(q, r)}$$

egy fuzzy toleranciareláció. Továbbá ha $\odot$ a drasztikus t -norma, akkor θ egy fuzzy $\odot$ -hasonlósági reláció.

Bizonyítás. A reflexivitás és szimmetria triviálisan adódik a távolságfüggvény tulajdonságaiból, így θ egy fuzzy toleranciareláció.

Legyenek most $p, q, r \in U$ tetszőlegesen. Be fogjuk látni, hogy

$$\theta(p, q) \odot \theta(q, r) \leq \theta(p, r).$$

Nyilvánvaló, hogy ez teljesül $p = q$ vagy $q = r$ vagy $p = r$ esetén. A továbbiakban feltételezzük, hogy p, q, r páronként különbözők.

Vegyük észre, hogy $\theta(p, q) = 1$ csak akkor lehetséges, ha $p = q$. Hasonlóan $\theta(q, r) = 1$ csak akkor lehetséges, ha $q = r$. A feltevésünk alapján egyik sem teljesül, így

$$\theta(p, q) \odot \theta(q, r) = 0 \leq \theta(p, r),$$

tehát θ $\odot$ -tranzitív, így egy fuzzy $\odot$ -hasonlósági reláció. $\square$

6.2.2. Segédalgoritmusok

Az eljárás részletezéséhez szükség van néhány egyszerűbb algoritmusra, ezeket ismertetem ebben a szakaszban. Az egyszerűség kedvéért a továbbiakban feltételezzük, hogy a képmagasság osztható a blokkmagassággal, és a képszélesség is osztható a blokk szélességgel. Az ettől eltérő esetek kezelését később tárgyalom.

A képek blokkokra osztását az 1. Algoritmus szerint végezzük.

1. Algoritmus: Kép felosztása blokkokra.

BLOKKOKRA OSZT(I, W, H, w, h)

Input: I – egy $\bar{W} \times H$ méretű kép;

W – a kép szélessége;

H – a kép magassága;

w – egy blokk szélessége;

h – egy blokk magassága.

Output: $\mathcal{B}$, a keletkező blokkok $(W/w) \cdot (H/h)$ méretű listája.

```

for  $bx \leftarrow 0$  to  $\frac{W}{w}$  do
  for  $by \leftarrow 0$  to  $\frac{H}{h}$  do
     $B \leftarrow$  új  $w \times h$  méretű blokk
    for  $x \leftarrow 0$  to  $w$  do
      for  $y \leftarrow 0$  to  $h$  do
         $B[x, y] \leftarrow I[bx \cdot w + x, by \cdot h + y]$ 
      end
    end
    A  $B$  blokkot adjuk hozzá  $\mathcal{B}$ -hez.
  end
end
return  $\mathcal{B}$ 

```

A blokklistából a kép rekonstruálására is szükség van, erre szolgál az 2. Algoritmus.

2. Algoritmus: Kép rekonstruálása blokkokból.

BLOKKOKBÓL_KÉP($\mathcal{B}, W, H, w, h$)**Input:** $\mathcal{B}$, a blokkok $(W/w) \cdot (H/h)$ méretű listája. W – a kép szélessége; H – a kép magassága; w – egy blokk szélessége; h – egy blokk magassága.**Output:** I – a rekonstruált $W \times H$ méretű kép;

```
 $i \leftarrow 0$ 
for  $bx \leftarrow 0$  to  $\frac{W}{w}$  do
  for  $by \leftarrow 0$  to  $\frac{H}{h}$  do
     $B \leftarrow \mathcal{B}[i]$ 
    for  $x \leftarrow 0$  to  $w$  do
      for  $y \leftarrow 0$  to  $h$  do
         $I[bx \cdot w + x, by \cdot h + y] \leftarrow B[x, y]$ 
      end
    end
     $i \leftarrow i + 1$ 
  end
end
return  $\mathcal{B}$ 
```

Továbbá a kép egyes blokkjaihoz rendelt alsó és felső approximációkat vektorokká alakítani. Ezt a célt szolgálja a 3. Algoritmus.

3. Algoritmus: Blokk vektorrá alakítása úgy, hogy a sorait egymás mellé helyezi

VEKTORRÁ_ALAKÍT(B, w, h)

Input: B – egy $w \times h$ méretű blokk, ami egy adott színcsatornán tartalmazza az egyes pixelek színértékeit;
 w – a blokk szélessége;
 h – a blokk magassága.

Output: v , az eredményvektor.

```
for  $x \leftarrow 0$  to  $w - 1$  do
  for  $y \leftarrow 0$  to  $h - 1$  do
     $v[x \cdot w + y] \leftarrow B[x, y]$ 
  end
end
return  $v$ 
```

Ennek egy hátránya, hogy egy-egy blokk sor utolsó pixele a következő sor első pixele mellé kerül, tehát olyan képpontok értékei kerülnek egymás mellé a vektorban, amik fizikailag távol vannak egymástól. Ha a 4. Algoritmus szerint végezzük el ezt az átalakítást, akkor a pixeleket ugyanúgy soronként dolgozzuk fel, de cikcakk alakban.

4. Algoritmus: Blokk vektorrá alakítása úgy, hogy az értékeket cikcakk alakban dolgozza fel.

VEKTORRÁ_ALAKÍT2(B, w, h)

Input: B – egy $w \times h$ méretű blokk, ami egy adott színcsatornán tartalmazza az egyes pixelek színértékeit;
 w – a blokk szélessége;
 h – a blokk magassága.

Output: v , az eredményvektor.

```
 $i \leftarrow 0$ 
for  $x \leftarrow 0$  to  $w - 1$  do
  if  $x \bmod 2 = 0$  then
    for  $y \leftarrow 0$  to  $h - 1$  do
       $v[x \cdot w + y] \leftarrow B[x, y]$ 
    end
  end
end
return  $v$ 
```

A dekódoláshoz a fordított műveletre is szükség van. Az 3. Algoritmus szerinti vektor visszaalakítását blokkra a 5. algoritmus végzi.

5. Algoritmus: Vektor visszaalakítása blokká a szakaszok egymás alá helyezésével.

BLOKKÁ_ALAKÍT($\mathbf{v}, w, h$)

Input: $\mathbf{v}$, egy $w \cdot h$ dimenziójú vektor;

w – a blokk szélessége;

h – a blokk magassága.

Output: B – egy $w \times h$ méretű blokk;

```

for  $x \leftarrow 0$  to  $w - 1$  do
    for  $y \leftarrow 0$  to  $h - 1$  do
         $B[x, y] \leftarrow \mathbf{v}[x \cdot w + y]$ 
    end
end
return  $B$ 

```

A 4. Algoritmussal készült vektorok visszaalakítását pedig a 6. Algoritmus végzi.

6. Algoritmus: Vektor visszaalakítása blokká az értékek cikcakk alakban történő elhelyezésével.

BLOKKÁ_ALAKÍT2($\mathbf{v}, w, h$)

Input: $\mathbf{v}$, egy $w \cdot h$ dimenziójú vektor;

w – a blokk szélessége;

h – a blokk magassága.

Output: B – egy $w \times h$ méretű blokk;

```

 $i \leftarrow 0$ 
for  $x \leftarrow 0$  to  $w - 1$  do
    if  $x \bmod 2 = 0$  then
        for  $y \leftarrow 0$  to  $h - 1$  do
             $B[x, y] \leftarrow \mathbf{v}[x \cdot w + y]$ 
        end
    end
end
return  $v$ 

```

6.2.3. Kódtábla felépítése

Magára a képre úgy tekintünk, mint egy fuzzy halmazra, ahol az alaphalmaz a pixelek halmaza, a tagsági értékeket pedig a pixel fényereje (színértéke) határozza meg. A kódolás során a kép minden pixelére kiszámítjuk az alsó és felső approximáció értékét az (U, θ) approximációs térben, ahol U a pixelek halmaza, θ pedig egy fuzzy $\odot$ -hasonlósági transzformáció valamely $\odot$

t -normára. Utána felosztjuk a képet $N \times N$ méretű blokkokra, majd ezekhez a blokkokhoz létrehozunk egy vektort, amibe sorba bekerülnek a blokk egyes pixeleinek alsó, illetve felső approximációi.

Az első két lépés (approximációk számítása és blokkokra osztás) igazából felcserélhető, de a fent leírt sorrendben világosabban látszik, hogy az approximációk kiszámításakor a blokkon kívüli pixelek is számítanak, csak a távolság miatt kisebb mértékben. Eredményül a kép összes blokkját feldolgozva szín-csatornánként kapunk egy-egy vektorhalmazt. A betanítás (modellalkotás) szakaszában több képet is feldolgozhatunk, a kapott vektorok mindegyikét elhelyezzük a kódtáblában.

Annak érdekében, hogy a kódtábla ne legyen túlságosan nagy méretű, valamilyen vektorkvantálási módszert alkalmazunk rá – például a [88]-ben javasolt ISODATA eljárást, de egy modernebb autoencoder (automatikus kódoló) neurális hálózat használata célszerűbb lehet.

7. Algoritmus: Kódtábla felépítése.

KÓDTÁBLA($\mathbb{I}, \theta, \kappa, W, H, w, h$)

Input: $\mathbb{I}$ – egyforma méretű tanítóképek halmaza;
 θ – a pixeleken értelmezett fuzzy hasonlósági reláció;
 κ – egy olyan $\kappa : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ vektorkvantáló függvény,
amire $|\kappa(\mathcal{C})| \leq |\mathcal{C}|$, ahol $n = w \cdot h$;
 W – a kép szélessége;
 H – a kép magassága;
 w – a blokk szélessége;
 h – a blokk magassága.

Output: $\mathcal{C}_l$ – az alsó approximációkhoz tartozó kódtábla;
 $\mathcal{C}_u$ – a felső approximációkhoz tartozó kódtábla;

```

 $\mathcal{C}_l \leftarrow \emptyset$ 
 $\mathcal{C}_u \leftarrow \emptyset$ 
foreach  $I \in \mathbb{I}$  do
     $\mathcal{B}_u \leftarrow \text{BLOKKOKRA\_OSZT}(\bar{\theta}(I), W, H, w, h)$ 
     $\mathcal{B}_l \leftarrow \text{BLOKKOKRA\_OSZT}(\theta(I), W, H, w, h)$ 
     $\mathcal{C}_u \leftarrow \mathcal{C}_u \cup \{\text{VEKTORRÁ\_ALAKÍT2}(B_u, w, h) \mid B_u \in \mathcal{B}_u\}$ 
     $\mathcal{C}_l \leftarrow \mathcal{C}_l \cup \{\text{VEKTORRÁ\_ALAKÍT2}(B_l, w, h) \mid B_l \in \mathcal{B}_l\}$ 
end
 $\mathcal{C}_u \leftarrow \kappa(\mathcal{C}_u)$ 
 $\mathcal{C}_l \leftarrow \kappa(\mathcal{C}_l)$ 
return  $\mathcal{C}_l, \mathcal{C}_u$ 

```

6.2.4. Kódolás

A kódolás során a cél, hogy egy (ismeretlen) képet tömörebb formában reprezentáljunk a tanítóképek alapján létrehozott modell segítségével. Ezt úgy tesszük meg, hogy a kódtábla felépítéséhez hasonló módon kiszámoljuk minden egyes pixelhez az alsó, illetve felső approximációkat, majd blokkokra osztjuk őket.

Az alsó approximációkhoz tartozó blokkokat vektorokká alakítjuk. Megnézzük, hogy az egyes vektorok a "alsó" kódtáblában ($\mathcal{C}_l$) melyik vektorra hasonlítanak a leginkább (a vektortérben melyikhez viszonyítva a legkisebb a távolság). Az adott blokkhoz ennek a sorszámát rendeljük hozzá. A felső approximációkhoz tartozó blokkokat hasonlóan összevetjük a "felső" kódtáblával ($\mathcal{C}_u$). Így minden blokkhoz két-két sorszámot szükséges eltárolnunk. Részben ebből ered a tömörítés, részben pedig abból, hogy a kódtábla is kvantált, így ezek a sorszámok sem annyira nagyok, hogy sok tárhelyet foglaljanak.

Fontos kiemelni, hogy ez a módszer egy veszteséges tömörítő eljárás, ugyanis információvesztés történik a kvantálás során is, és akkor is, amikor a tényleges vektort egy közelire "cseréljük" a kódtáblából. Az is következménye ennek, hogy egy blokk alsó, illetve felső approximációjához tartozhat eltérő sorszám a két kódtáblában. Azért is, mert egy új képnél eleve lehetséges ilyen eltérés, de olyan is előfordulhat, hogy a kvantáló eljárás máshogy redukálta a két kódtáblát.

8. Algoritmus: Kép kódolása.**KÓDOL**($I, \mathcal{C}_l, \mathcal{C}_u, \theta, W, H, w, h$)**Input:** I – a tömörítendő kép; $\mathcal{C}_l$ – az alsó approximációkhoz tartozó kódtábla; $\mathcal{C}_u$ – a felső approximációkhoz tartozó kódtábla; θ – a pixelek közötti fuzzy hasonlósági reláció; W – a kép szélessége; H – a kép magassága; w – egy blokk szélessége; h – egy blokk magassága.**Output:** $\mathcal{N}_l$ – a kép pixeleinek alsó approximációihoz tartozó blokksorszámok listája $\mathcal{C}_l$ -ből; $\mathcal{N}_u$ – a kép pixeleinek felső approximációihoz tartozó blokksorszámok listája $\mathcal{C}_u$ -ból.

```

for  $x \leftarrow 0$  to  $W$  do
  for  $y \leftarrow 0$  to  $H$  do
     $I_l[x, y] \leftarrow \theta(I)[x, y]$ 
     $I_u[x, y] \leftarrow \bar{\theta}(I)[x, y]$ 
  end
end
 $\mathcal{B}_l \leftarrow \text{BLOKKOKRA\_OSZT}(I_l, W, H, w, h)$ 
 $\mathcal{B}_u \leftarrow \text{BLOKKOKRA\_OSZT}(I_u, W, H, w, h)$ 
foreach  $B_l \in \mathcal{B}_l$  do
   $\mathbf{v} \leftarrow \text{VEKTORRÁ\_ALAKÍT2}(B_l, w, h)$ 
   $\mathbf{v}' \leftarrow \arg \min_{\mathbf{c} \in \mathcal{C}_l} d(\mathbf{v}, \mathbf{c})$ 
   $n_l \leftarrow$  a  $\mathbf{v}'$  vektor sorszáma  $\mathcal{C}_l$ -ben
   $\mathcal{N}_l.\text{ADD}(n_l)$ 
end
foreach  $B_u \in \mathcal{B}_u$  do
   $\mathbf{v} \leftarrow \text{VEKTORRÁ\_ALAKÍT2}(B_u, w, h)$ 
   $\mathbf{v}' \leftarrow \arg \min_{\mathbf{c} \in \mathcal{C}_u} d(\mathbf{v}, \mathbf{c})$ 
   $n_u \leftarrow$  a  $\mathbf{v}'$  vektor sorszáma  $\mathcal{C}_u$ -ben
   $\mathcal{N}_u.\text{ADD}(n_u)$ 
end
return  $\mathcal{N}_l, \mathcal{N}_u$ 

```

6.2.5. Dekódolás

A dekódolás célja, hogy egy tömörített képből visszaállítsuk az eredetit. A tömörített kép mindössze sorszámokat tartalmaz, ami a kódtáblában a megfelelő vektorra mutat (külön sorszámok tartoznak az alsó, és külön a felső approximációhoz). Az algoritmus a sorszám alapján kikeresi a kódtáblából

a hozzá tartozó vektort, majd visszaalakítja blokká, és elhelyezi a képben. Mivel a kétféle approximáció külön szerepel, így eredményként ebben a fázisban két "képet" kapunk. Az alsó és felső approximációs "kép" egymásnak megfelelő blokkjai egy-egy fuzzy durva halmaznak felelnek meg, jelölje ezt $(\underline{B}, \overline{B})$. Mivel az adott blokk mellé potenciálisan más blokkok kerülnek, mint a kódtábla készítésekor, így minden blokkon kívüli p pixelre $\underline{B}(p) = 0$ és $\overline{B}(p) = 1$.

A pixelek közötti fuzzy hasonlósági reláció blokkon belül ugyanaz, mint a kódtábla készítésekor és kódoláskor, tehát a távolságon alapul. Most mindegyik pixelhez kiszámoljuk annak alsó és felső approximációját az egész képre vonatkozóan. Ez megfelel annak a lépésnek a [88] cikkben található módszerben, amikor a négy ablakhoz tartozó durva fuzzy halmazt összeszorozzuk, ld. a 6.1.4. szakaszban. Itt viszont fuzzy durva halmazok vannak, és nem négyet szorzunk össze, hanem annyit, ahány képpontból áll a kép.

Jelölje a kép pixeleinek halmazát I , a $p \in I$ pixel blokkját pedig B_p . A keletkező fuzzy durva halmazpárt a következőképpen határozhatjuk meg:

$$(\underline{I}, \overline{I}) = \bigotimes_{p \in I} (\underline{B}_p, \overline{B}_p). \quad (6.9)$$

Maga a (6.3) képletben található szorzás viszont némileg egyszerűsödik. Egyrészt azért, mert ugyanazt a θ fuzzy hasonlósági relációt választottuk mindegyik pixelhez – ez lehetne eltérő, ha a koordinátáktól vagy a fényerősségtől (színértéktől) is függne a hasonlósági reláció. Így a képletben szereplő σ reláció megegyezik a θ relációval. Másrészt a $p \in I$ képpontokra felírt

$$\begin{aligned} \underline{I}(p) &= \bigwedge \{ \sigma(p, q) \triangleright (\underline{B}_p(q) \oplus \underline{B}_q(q)) \mid q \in I \}, \\ \overline{I}(p) &= \bigvee \{ \sigma(p, q) \odot \overline{B}_p(q) \odot \overline{B}_q(q) \mid q \in I \} \end{aligned} \quad (6.10)$$

képletek leegyszerűsödnek a B_p blokkon kívüli q elemek esetén, hiszen $\underline{B}_p(q) = 0$ és $\overline{B}_p(q) = 1$ miatt $\underline{B}_p(q) \oplus \underline{B}_q(q) = \underline{B}_q(q)$ és $\overline{B}_p(q) \odot \overline{B}_q(q) = \overline{B}_q(q)$. Blokkon belüli elemekre ez az egyszerűsítés nem végezhető el. Viszont amennyiben $\odot$ a minimum t -norma és $\oplus$ a maximum t -konorma, úgy a blokkon belüli q pixelre $\overline{B}_p(q) \odot \overline{B}_q(q) = \overline{B}_q(q)$ és $\underline{B}_p(q) \oplus \underline{B}_q(q) = \underline{B}_q(q)$, de itt azért, mert $B_p = B_q$. Miután kiszámoltuk, hogy a visszaállított képben mi lenne egy-egy pixel alsó és felső approximációja, lokális folytonosságot feltételezve azok átlagaként megkapjuk a visszaállított kép egy pixelét:

$$I(p) = \frac{\underline{I}(p) + \overline{I}(p)}{2}.$$

9. Algoritmus: Kép dekódolása.**DEKÓDOL**($\mathcal{C}_l, \mathcal{C}_u, \mathcal{N}_l, \mathcal{N}_u, \theta, W, H, w, h$)

Input: $\mathcal{C}_l$ – az alsó approximációkhoz tartozó kódtábla;
 $\mathcal{C}_u$ – a felső approximációkhoz tartozó kódtábla;
 $\mathcal{N}_l$ – a kép pixeleinek alsó approximációihoz tartozó
blokksorszámok listája $\mathcal{C}_l$ -ből;
 $\mathcal{N}_u$ – a kép pixeleinek felső approximációihoz tartozó
blokksorszámok listája $\mathcal{C}_u$ -ból. θ – a pixelek közötti fuzzy
hasonlósági reláció;
 W – a kép szélessége;
 H – a kép magassága;
 w – egy blokk szélessége;
 h – egy blokk magassága.

Output: I – a dekódolt (visszaállított) kép.

```

 $\mathcal{B}_u \leftarrow \emptyset$ 
 $\mathcal{B}_l \leftarrow \emptyset$ 
foreach  $n_l \in \mathcal{N}_l$  do
     $\mathbf{v} \leftarrow$  az  $n_l$  -sorszámú blokk  $\mathcal{N}_l$ -ből
     $B_l \leftarrow \text{BLOKKÁ\_ALAKÍT2}(\mathbf{v}, w, h)$ 
     $\mathcal{B}_l.\text{ADD}(B_l)$ 
     $\underline{I}' \leftarrow \text{BLOKKOKBÓL\_KÉP}(\mathcal{B}_l, W, H, w, h)$ 
end
foreach  $n_u \in \mathcal{N}_u$  do
     $\mathbf{v} \leftarrow$  az  $n_u$  -sorszámú blokk  $\mathcal{N}_u$ -ből
     $B_u \leftarrow \text{BLOKKÁ\_ALAKÍT2}(\mathbf{v}, w, h)$ 
     $\mathcal{B}_u.\text{ADD}(B_u)$ 
     $\overline{I}' \leftarrow \text{BLOKKOKBÓL\_KÉP}(\mathcal{B}_u, W, H, w, h)$ 
end
foreach  $p \in I$  do
     $\underline{I}(p) \leftarrow \bigwedge_{q \in I} \{ \theta(p, q) \triangleright (\underline{I}'(p) \oplus \underline{I}'(q)) \}$ 
     $\overline{I}(p) \leftarrow \bigwedge_{q \in I} \{ \theta(p, q) \odot \overline{I}'(p) \odot \overline{I}'(q) \}$ 
     $I(p) \leftarrow \frac{\underline{I}(p) + \overline{I}(p)}{2}$ 
end
return  $I$ 

```

7. ÖSSZEFOGLALÁS

7.1. ÖSSZEFOGLALÁS ÉS KUTATÁS IRÁNYOK

A kutatásaim során a durva halmazok modelljének általánosabb változatait vizsgáltam főként hálóelméleti szempontból. Az egyik általánosított modellt a multigranuláris durva halmaz koncepciójából kapjuk, amikor az approximációk meghatározásához nem egyetlen ekvivalenciareláció tartozik, hanem több is. Ebből kétféle megközelítést is elemeztem hálóelméleti szempontból: az optimista és a pesszimista változatot. A koherens relációk fogalmát általánosítottam n relációra kétféleképpen, majd a kapott feltételek segítségével beazonosítottam, hogy az optimista és a pesszimista multigranuláris durva halmazok, mikor alkotnak teljes hálót, vagy akár teljesen disztributív hálót. Továbbá, mivel általános esetben a multigranuláris durva halmazok csak részbenrendezett halmazok, nem feltétlenül hálók, így vizsgáltam az optimista multigranuláris durva halmazok által alkotott rendezési struktúra Dedekind–MacNeille-kiterjesztését is. Ismertettem továbbá néhány alkalmazást is az információs rendszerek és az ajánlórendszerek területéről.

A durva halmazok modelljének és a fuzzy halmazok modelljének vegyítésére többféle megközelítés létezik attól függően, hogy a referenciahalmazt vagy az approximációs teret (az alaprelációt) fuzzyként kezeljük. Először azt az esetet elemeztem, amikor a referenciahalmaz éles, az approximációs tér viszont fuzzy. Megvizsgáltam, hogy a fuzzy alsó és felső approximációk magja vagy tartója hogyan viszonyul a fuzzy alapreláció magja vagy tartója által származtatott (hagyományos) alsó és felső approximációkhoz. Megmutattam továbbá, hogy az éles referenciahalmazzal rendelkező fuzzy durva halmazok hálója izomorf a fuzzy reláció magja által származtatott durva halmazok hálójával. Továbbá megmutattam, hogy ilyen típusú fuzzy durva halmazok esetén az egzakt fuzzy halmazok megegyeznek a származtató fuzzy reláció tartójának egzakt halmazával, pontosabban az előbbi tagsági függvénye egyezik meg az utóbbi karakterisztikus függvényével.

A durva fuzzy halmazok esetén az approximációs tér éles, a referenciahalmaz pedig fuzzy. Ennél egy általánosabb esetet vizsgáltam, ugyanis nemcsak a $[0, 1]$ halmazon vizsgáltam a keletkező algebrai struktúrát, hanem általánosabban egy L hálón. Megmutattam, hogy az $E \subseteq U \times U$ ekvivalenciareláció által indukált durva L -fuzzy halmazok esetén az L háló tulajdonságai átöröklődnek az ezekből képzett $\mathcal{RF}(U, L)$ hálóra: ha L egy pseudokomplementumos, (L_n) osztályba tartozó háló, akkor $\mathcal{RF}(U, L)$ is pseudokomplementumos, és ugyanabba az osztályba tartozik; ha L Heyting-algebra, akkor $\mathcal{RF}(U, L)$ is Heyting-algebra; ha L egy De Morgan-algebra struktúráját veszi fel, akkor $\mathcal{RF}(U, L)$ -en is indukálható De Morgan-algebra, és fordítva. Ezek a tulajdonságok lényegében annak következményei, hogy $\mathcal{RF}(U, L)$ izomorf a $L^{[2]}$ és L hálók egy speciális szubdirekt szorzatával. Vizsgáltam ezenfelül, hogy a durva L -fuzzy halmazok hálóján mikor definiálható háromértékű Łukasiewicz-algebra, kapcsolatot teremtettem a durva L -fuzzy halmazok és

a durva relációk között, és külön kidolgoztam, hogy $L = [0, 1]$ esetén milyen tulajdonságokkal rendelkezik $\mathcal{RF}(U, [0, 1])$. Megmutattam azt is, hogy a durva L -fuzzy halmazok hálóját a $\mathcal{IF}(U, L)$ intervallumértékű fuzzy halmazok hálójának egy teljes részhalóját alkotja. Továbbá megfogalmaztam egy reprezentációs tételt arra vonatkozóan, hogy egy (f, g) L -fuzzy halmazpár mikor felel meg egy fuzzy halmaz alsó és felső approximációjának.

Az általánosabb fuzzy durva halmaz modell esetén az approximációs tér is és a referenciahalmaz is fuzzy. Az alsó és felső approximációkhoz kapcsolódóan definiáltam két kvázirendezést. A belőlük származtatott ekvivalenciarelációk segítségével megadtam a fuzzy durva halmazok reprezentációs tételét, amely meghatározza, hogy egy fuzzy halmazpár milyen feltételek teljesülése esetén felel meg egy fuzzy durva halmaznak. A kvázirendezések és a belőlük származtatott ekvivalenciarelációk tulajdonságait szintén részletesen tárgyaltam. Ezenfelül olyan feltételeket is megfogalmaztam, amelyeknek a teljesülése magával vonja, hogy a fuzzy durva halmazok hálót alkotnak, továbbá vizsgáltam annak tulajdonságait.

Bemutattam ezeken felül egy képtömörítési alkalmazást is, ami egy 2009-ben publikált módszer [88] továbbfejlesztett változata. Az eredeti eljárás a durva fuzzy halmazok modelljén alapszik, amit tulajdonképpen jellemzőkinyerésre használ, majd a kapott jellemzővektorokon végrehajt egy kvantálást. A kép visszaállítása a durva fuzzy halmazokon értelmezett szorzás művelete segítségével történik. Az általam javasolt módszer az általánosabb fuzzy durva halmazmodellt veszi alapul, ahol már nemcsak maga a pixel tekinthető fuzzy halmaznak a fényerőssége (színértéke) által, hanem a pixelek közötti távolság is meghatároz egy fuzzy hasonlósági relációt. Az eljárás a pixelekhez meghatározott fuzzy alsó és felső approximációkat blokkonként egy-egy vektorba helyezi el, majd ezen a vektorhalmazon hajt végre egy redukciót (kvantálást). A dekódolás során pedig egy általánosabb, fuzzy durva halmazokon értelmezett szorzásműveletet használók.

A disszertációban tárgyalt témakörök számos kutatási irányvonalat felárnak. A jövőben szeretném jellemezni a rendezési struktúráit a multigranuláris durva halmazok és a fuzzy halmazok kombinált modelljeinek is. A fuzzy durva halmazmodell esetén szeretném megvizsgálni annak lehetőségeit, hogy mennyire lehet enyhíteni a jelenlegi eredményekhez felhasznált végességi feltételeken. Amennyiben a fuzzy durva halmazok hálót alkotnak, az nem feltétlenül disztributív. Így nyitott kérdés továbbá az is, hogy az általánosabb keretrendszerben a fuzzy durva halmazok milyen feltételek mellett disztributívak. A multigranuláris témakörnél tárgyalt alkalmazási lehetőségeket szeretném jobban kidolgozni, valamint javaslatot tenni a fuzzy módszerekkel kombinált változatra. Továbbá szeretnék egyéb alkalmazási lehetőségeket is vizsgálni, többek között a döntésméleti durva halmazok [124] és a játékelméleti durva halmazok [48] általánosabb (fuzzy és/vagy multigranuláris) modelljeivel kapcsolatban. A bemutatott képtömörítési eljárást pedig az idődimenzió bevonásával szeretném kiterjeszti videótömörítésre is.

7.2. TÉZISEK

7.2.1. I. TÉZIS

Megvizsgáltam az optimista és pesszimista multigranuláris durva halmazok rendezési struktúráit. Megállapítottam, hogy mikor alkotnak teljes hálót, valamint teljesen disztributív hálót. Megmutattam, hogy az optimista multigranuláris durva halmazok növekvő reprezentációja megegyezik a Dedekind–MacNeille-kiterjesztéssel. Meghatároztam, hogy a pesszimista, illetve az optimista multigranuláris durva halmazok milyen feltételek mellett alkotnak teljesen disztributív reguláris dupla Stone-hálót.

Tézishez tartozó publikációim: [44], [40], [39]

7.2.2. II. TÉZIS

Megmutattam, hogy egy duálisan jólrendezett spektrumú fuzzy hasonlósági reláción értelmezett, éles referenciahalmazokra vonatkozó fuzzy durva halmazok hálója teljes hálót alkot, ami izomorf a fuzzy reláció magján értelmezett durva halmazok hálójával. Megvizsgáltam a kapcsolatot az ilyen típusú fuzzy durva halmazok alsó, illetve felső approximációjának tartója és magja, valamint a fuzzy reláció tartóján, illetve magján értelmezett approximációk között. Bizonyítottam, hogy a fuzzy hasonlósági reláció tartójának egzakt halmazai – pontosabban azok karakterisztikus függvényei – megegyeznek az egzakt fuzzy durva halmazokkal (éles referenciahalmaz mellett).

Tézishez tartozó publikációim: [43] [38]

7.2.3. III. TÉZIS

Kijelentettem és bizonyítottam egy reprezentációs tételt, ami meghatározza, hogy egy L -fuzzy halmazpár mikor alkot durva L -fuzzy halmazt egy adott (éles) approximációs térben. Kapcsolatot teremtettem a durva L -fuzzy halmazok és a durva relációk között. Megmutattam, hogy milyen tulajdonságok öröklődnek az L hálóból a durva L -fuzzy halmazok hálójára. Megadtam, hogy milyen feltételek ekvivalensek azzal, hogy a durva L -fuzzy halmazok hálója háromértékű Łukasiewicz-algebrát alkosson.

Tézishez tartozó publikációim: [45]

7.2.4. IV. TÉZIS

Az általánosabb keretrendszerben – tehát fuzzy approximációs térben és fuzzy referenciahalmaz esetén – kijelentettem és bizonyítottam egy reprezentációs tételt, amely megadja, hogy véges értékészletű fuzzy hasonlósági reláció esetén milyen feltételek mellett alkot fuzzy durva halmazt egy fuzzy halmazpár. A konstruktív bizonyításban egy eljárást is megadok, amivel előállítható az a fuzzy halmaz, aminek alsó és felső approximációja megegyezik az adott fuzzy halmazpárral. Ezenfelül meghatároztam olyan feltételeket, amelyek mellett a fuzzy durva halmazok hálót alkotnak.

Tézishez tartozó publikációim: [46], [41]

7.2.5. V. TÉZIS

Kialakítottam egy fuzzy durva halmazokon alapuló képtömörítési eljárást egy durva fuzzy halmazokon alapuló korábbi módszer továbbfejlesztésével. Az általam javasolt procedúra már az általánosabb fuzzy durva halmazokat veszi alapul, amihez általánosítottam a durva fuzzy halmazokon végzett szorzás műveletét is.

Tézishez tartozó publikációim: [42], [37]

8. SUMMARY

8.1. SUMMARY AND FUTURE RESEARCH DIRECTIONS

In my research, I studied more general variants of the rough set model primarily from a lattice-theoretic perspective. One of the generalized models arises from the concept of multigranular rough sets, where approximations are determined not by a single equivalence relation but by multiple ones. I analyzed two approaches from a lattice-theoretic viewpoint: the optimistic and the pessimistic variants. I generalized the notion of coherent relations to n relations in two different ways, and using the resulting conditions, I identified when the optimistic and pessimistic multigranular rough sets form a complete lattice, or even a completely distributive lattice. Furthermore, since multigranular rough sets, in general, are only partially ordered sets and not necessarily lattices, I also investigated the Dedekind–MacNeille completion of the order structure formed by the optimistic multigranular rough sets. I also presented several applications in the fields of information systems and recommender systems.

There exist several approaches to combining the rough set model with the fuzzy set model, depending on whether the reference set or the approximation space (the underlying relation) is treated as fuzzy. I first analyzed the case where the reference set is crisp but the approximation space is fuzzy. I examined how the core or support of fuzzy lower and upper approximations relate to the (traditional) lower and upper approximations derived from the core or support of the underlying fuzzy relation. I also showed that the lattice of fuzzy rough sets with a crisp reference set is isomorphic to the lattice of rough sets derived from the core of the fuzzy relation. Furthermore, I proved that in the case of such fuzzy rough sets, the exact fuzzy sets coincide with the exact sets of the support of the fuzzy relation, more precisely, the membership function of the former matches the characteristic function of the latter.

In the case of rough fuzzy sets, the approximation space is crisp while the reference set is fuzzy. I examined a more general case, since I considered the resulting algebraic structure not only on the $[0, 1]$ interval but on a lattice L . I showed that in the case of rough L -fuzzy sets induced by an equivalence relation $E \subseteq U \times U$, the properties of lattice L are inherited by $\mathcal{RF}(U, L)$: if L is a pseudocomplemented lattice belonging to class (L_n) , then $\mathcal{RF}(U, L)$ is also pseudocomplemented and belongs to the same class; if L is a Heyting algebra, then $\mathcal{RF}(U, L)$ is also a Heyting algebra; if L has the structure of a De Morgan algebra, then a De Morgan algebra can also be induced on $\mathcal{RF}(U, L)$, and vice versa. These properties essentially follow from the fact that $\mathcal{RF}(U, L)$ is isomorphic to a special subdirect product of the lattices $L^{[2]}$ and L . I also investigated under what conditions a three-valued Łukasiewicz algebra can be defined on the lattice of rough L -fuzzy sets, established connections between rough L -fuzzy sets and rough relations, and elaborated

on the specific properties of $\mathcal{RF}(U, [0, 1])$. I also showed that the lattice of rough L -fuzzy sets forms a complete sublattice of $\mathcal{IF}(U, L)$, i.e. the lattice of interval-valued fuzzy sets. Additionally, I formulated a representation theorem that characterizes when a pair of L -fuzzy sets (f, g) corresponds to the lower and upper approximations of a fuzzy set.

In a more general fuzzy rough set model, both the approximation space and the reference set are fuzzy. Based on the lower and upper approximations, I defined two quasi-orders. Using the equivalence relations derived from them, I provided a representation theorem for fuzzy rough sets that characterizes the conditions under which a pair of fuzzy sets corresponds to a fuzzy rough set. I also discussed the properties of the quasi-orders and the derived equivalence relations in detail. Moreover, I formulated conditions whose satisfaction implies that the fuzzy rough sets form a lattice, and I studied its properties.

In addition, I presented an image compression application, which is an improved version of a method published in 2009 [88]. The original procedure is based on the model of rough fuzzy sets, which is essentially used for feature extraction, then quantization is applied to the obtained feature vectors. The image reconstruction is carried out using the product defined on rough fuzzy sets. The method I proposed is based on the more general fuzzy rough set model, in which not only the pixel itself is considered a fuzzy set (by its brightness or color value), but the distance between pixels also defines a fuzzy similarity relation. The procedure places the fuzzy lower and upper approximations determined for each pixel into a vector for each block, then performs a reduction (quantization) on this set of vectors. During decoding, I use a more general product defined on fuzzy rough sets.

The topics discussed in the dissertation reveal several directions for further research. In the future, I would like to characterize the order structures of combined models of multigranular rough sets and fuzzy sets. Regarding the fuzzy rough set model, I intend to investigate the extent to which the finiteness assumptions used in the current results can be relaxed. If the fuzzy rough sets form a lattice, it is not necessarily distributive. Thus, it remains an open question under what conditions fuzzy rough sets are distributive. I also plan to further elaborate on the application possibilities discussed for multigranular rough sets and propose a variant combined with fuzzy methods. Additionally, I would like to explore other potential applications, including generalized (fuzzy and/or multigranular) models of decision-theoretic rough sets [124] and game-theoretic rough sets [48]. Finally, I aim to extend the presented image compression method to video compression by incorporating the time dimension.

8.2. THESES

8.2.1. I. THESIS

I investigated the order structures of optimistic and pessimistic multigranular rough sets. I determined under what conditions they form complete lattices and completely distributive lattices. I showed that the increasing representation of optimistic multigranular rough sets coincides with the Dedekind–MacNeille completion. I identified the conditions under which pessimistic and optimistic multigranular rough sets form a completely distributive regular double Stone lattice.

My publications concerning this thesis: [44], [40], [39]

8.2.2. II. THESIS

I showed that the lattice of fuzzy rough sets with crisp reference sets and defined over a fuzzy similarity relation with a dually well-ordered spectrum forms a complete lattice, which is isomorphic to the lattice of rough sets defined over the core of the fuzzy relation. I examined the relationship between the support and core of the lower and upper approximations of such fuzzy rough sets, and the approximations defined over the support and core of the fuzzy relation. I proved that the exact sets of the support of the fuzzy similarity relation—more precisely, their characteristic functions—coincide with the exact fuzzy rough sets (with a crisp reference set).

My publications concerning this thesis: [43] [38]

8.2.3. III. THESIS

I stated and proved a representation theorem that characterizes when a pair of L -fuzzy sets corresponds to a rough L -fuzzy set over a given (crisp) approximation space. I established a connection between rough L -fuzzy sets and rough relations. I demonstrated which properties of lattice L are inherited by the lattice of rough L -fuzzy sets. I provided equivalent conditions for the lattice of rough L -fuzzy sets to form a three-valued Łukasiewicz algebra.

My publications concerning this thesis: [45]

8.2.4. IV. THESIS

In the more general framework—namely, with a fuzzy approximation space and fuzzy reference sets—I stated and proved a representation theorem that specifies the conditions under which a fuzzy set pair corresponds to a fuzzy rough set, assuming a fuzzy similarity relation with a finite range. In the constructive proof I also provided the method to determine a fuzzy set whose lower and upper approximations match the given fuzzy set pair. Additionally, I determined the conditions under which fuzzy rough sets form a lattice.

My publications concerning this thesis: [46], [41]

8.2.5. V. THESIS

I developed an image compression procedure based on fuzzy rough sets as an improvement of a previously proposed method based on rough fuzzy sets. The procedure I propose is based on the more general fuzzy rough set model, for which I also generalized the product defined over rough fuzzy sets.

My publications concerning this thesis: [42], [37]

Irodalomjegyzék

- [1] Atanassov, K.T., 1986. Intuitionistic fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems* 20, 87–96. doi:[https://doi.org/10.1016/S0165-0114\(86\)80034-3](https://doi.org/10.1016/S0165-0114(86)80034-3).
- [2] Balbes, R., Dwinger, P., 1974. *Distributive Lattices*. University of Missouri Press.
- [3] Banerjee, M., 1997. Rough sets and 3-valued Lukasiewicz logic. *Fundamenta Informaticae* 31, 213–220. doi:<https://doi.org/10.3233/FI-1997-313401>.
- [4] Banerjee, M., Chakraborty, M.K., 1996. Rough sets through algebraic logic. *Fundamenta Informaticae* 28, 211–221. doi:<https://doi.org/10.3233/FI-1996-283401>.
- [5] Beg, I., Ashraf, S., 2008. Fuzzy equivalence relations. *Kuwait Journal of Science & Engineering* 35, 33–51.
- [6] Blok, W.J., 1976. Varieties of interior algebras. PhD Thesis, University of Amsterdam .
- [7] Boixader, D., Jacas, J., Recasens, J., 2000. Upper and lower approximations of fuzzy sets. *International Journal of General Systems* 29, 555–568. doi:<https://doi.org/10.1080/03081070008960961>.
- [8] Burris, S., Sankappanavar, H.P., 1981. *A Course in Universal Algebra*. Springer-Verlag.
- [9] Çoker, D., 1998. Fuzzy rough sets are intuitionistic l-fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems* 96, 381–383. doi:[https://doi.org/10.1016/S0165-0114\(97\)00249-2](https://doi.org/10.1016/S0165-0114(97)00249-2).
- [10] del Cerro, L.F., Prade, H., 1986. Rough sets, twofold fuzzy sets and modal logic—fuzziness in indiscernibility and partial information. *The Mathematics of Fuzzy Systems* 88, 103–120.
- [11] Cignoli, R., 1986. The class of Kleene algebras satisfying an interpolation property and Nelson algebras. *Algebra Universalis* 23, 262–292.
- [12] Ciucci, D., Dubois, D., 2014. Three-valued logics, uncertainty management and rough sets, in: Peters, J.F., Skowron, A. (Eds.), *Transactions on Rough Sets XVII*, Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg. pp. 1–32. doi:[10.1007/978-3-642-54756-0_1](https://doi.org/10.1007/978-3-642-54756-0_1).
- [13] Comer, S.D., 1993. On connections between information systems, rough sets and algebraic logic. *Banach Center Publications* 28, 117–124. doi:<https://doi.org/10.4064/-28-1-117-124>.

- [14] Cornelis, C., De Cock, M., Radzikowska, A., 2008. Fuzzy Rough Sets: From Theory into Practice. chapter 24. pp. 533–552. doi:<https://doi.org/10.1002/9780470724163.ch24>.
- [15] Cornelis, C., Deschrijver, G., Kerre, E.E., 2004. Implication in intuitionistic fuzzy and interval-valued fuzzy set theory: construction, classification, application. *International Journal of Approximate Reasoning* 35, 55–95. doi:[https://doi.org/10.1016/S0888-613X\(03\)00072-0](https://doi.org/10.1016/S0888-613X(03)00072-0).
- [16] Czyzewski, A., 2003. Automatic identification of sound source position employing neural networks and rough sets. *Pattern Recognition Letters* 24, 921–933. doi:[https://doi.org/10.1016/S0167-8655\(02\)00204-0](https://doi.org/10.1016/S0167-8655(02)00204-0).
- [17] Czédli, G., 1999. *Hálóelmélet*. JATEPress, Szeged.
- [18] Dai, J., Xu, Q., 2013. Attribute selection based on information gain ratio in fuzzy rough set theory with application to tumor classification. *Applied Soft Computing* 13, 211–221. doi:<https://doi.org/10.1016/j.asoc.2012.07.029>.
- [19] Davey, B.A., Priestley, H.A., 2002a. *Introduction to Lattices and Order*. 2 ed., Cambridge University Press.
- [20] Davey, B.A., Priestley, H.A., 2002b. *Introduction to Lattices and Order*. 2 ed., Cambridge University Press. doi:<https://doi.org/10.1017/CBO9780511809088>.
- [21] De Cock, M., Cornelis, C., Kerre, E.E., 2007. Fuzzy rough sets: The forgotten step. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* 15, 121–130. doi:<https://doi.org/10.1109/TFUZZ.2006.889762>.
- [22] D’eer, L., Verbiest, N., Cornelis, C., Godo, L., 2015. A comprehensive study of implicator–conjunctive-based and noise-tolerant fuzzy rough sets: Definitions, properties and robustness analysis. *Fuzzy Sets and Systems* 275, 1–38. doi:<https://doi.org/10.1016/j.fss.2014.11.018>.
- [23] Deschrijver, G., 2006. Representations of triangular norms in intuitionistic L-fuzzy set theory, in: *Eleventh International Conf., IPMU*, pp. 2–7.
- [24] Dubois, D., Prade, H., 1990. Rough fuzzy sets and fuzzy rough sets. *International Journal of General Systems* 17, 191–209. doi:<https://doi.org/10.1080/03081079008935107>.
- [25] Dubois, D., Prade, H., 2005. Interval-valued fuzzy sets, possibility theory and imprecise probability, in: *Proceedings of International Conference in Fuzzy Logic and Technology*, pp. 314–319.

- [26] Düntsch, I., 1997. A logic for rough sets. *Theoretical Computer Science* 179, 427–436. doi:[https://doi.org/10.1016/S0304-3975\(96\)00334-9](https://doi.org/10.1016/S0304-3975(96)00334-9).
- [27] Ferone, A., 2011. Exploiting Higher Order Uncertainty in Image Analysis. Phd thesis. University of Milan, Doctoral School in Computer Science. Milan, Italy.
- [28] Fodor, J., 2004. Left-continuous t-norms in fuzzy logic: an overview. *Acta Polytechnica Hungarica* 1, 35–47.
- [29] Gehrke, M., Walker, C., Walker, E., 2001. Some basic theory of interval-valued fuzzy sets, in: *Proceedings Joint 9th IFSA World Congress and 20th NAFIPS International Conference*, pp. 1332–1336. doi:<https://doi.org/10.1109/NAFIPS.2001.943741>.
- [30] Gehrke, M., Walker, E., 1992. On the structure of rough sets. *Bulletin of Polish Academy of Sciences, Mathematics* 40, 235–245.
- [31] Giuntini, R., 1993. Three-valued Brouwer-Zadeh logic. *International Journal of Theoretical Physics* 32.
- [32] Giuntini, R., Ledda, A., Paoli, F., 2017. On some properties of PBZ*-lattices. *International Journal of Theoretical Physics* 56, 3895–13911. doi:<https://doi.org/10.1007/s10773-017-3374-y>.
- [33] Goguen, J.A., 1967. L-fuzzy sets. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 18, 145–174. doi:[https://doi.org/10.1016/0022-247X\(67\)90189-8](https://doi.org/10.1016/0022-247X(67)90189-8).
- [34] Gottwald, S., Jenei, S., 2001. A new axiomatization for involutive monoidal t-norm-based logic. *Fuzzy Sets and Systems* 124, 303–307. doi:[https://doi.org/10.1016/S0165-0114\(01\)00100-2](https://doi.org/10.1016/S0165-0114(01)00100-2). fuzzy Logic.
- [35] Greco, S., Matarazzo, B., Słowiński, R., 1998. Fuzzy similarity relation as a basis for rough approximations, in: *Rough Sets and Current Trends in Computing*, Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg. pp. 283–289.
- [36] Gupta, D., K, V., Singh, C.K., 2014. Using natural language processing techniques and fuzzy-semantic similarity for automatic external plagiarism detection, in: *2014 International Conference on Advances in Computing, Communications and Informatics (ICACCI)*, pp. 2694–2699.
- [37] Gégény, D., 2019. Durva halmazok a képfeldolgozásban, in: *Doktoranduszok fóruma: Miskolc, 2018. november 22, 28. : Gépészmérnöki- és Informatikai Kar szekciókiadványa*, pp. 26–33.

- [38] Gégény, D., 2022a. Fuzzy durva halmazok hálójának jellemzése, in: Doktoranduszok fóruma: Miskolc, 2020. november 19-20. : Gépészmérnöki- és Informatikai Kar szekciókiadványa, pp. 47–52.
- [39] Gégény, D., 2022b. Multigranuláris durva halmazok hálóstruktúrájának jellemzése, in: Tavaszi Szél 2022 / Spring Wind 2022 Tanulmánykötet II., pp. 274–284.
- [40] Gégény, D., 2022c. Multigranuláris durva halmazok optimista approximációk esetén, in: Doktoranduszok fóruma: Miskolc, 2021. november 18., 26. : Gépészmérnöki- és Informatikai Kar szekciókiadványa, pp. 42–47.
- [41] Gégény, D., 2023. A fuzzy durva halmaz modell vizsgálata hálóelméleti eszközökkel, in: XXVI. Tavaszi Szél Konferencia 2023: Tanulmánykötet I., pp. 352–363.
- [42] Gégény, D., 2025. An image compression method based on fuzzy rough sets (manuscript).
- [43] Gégény, D., Kovács, L., Radeleczki, S., 2020. Notes on the lattice of fuzzy rough sets with crisp reference sets. *International Journal of Approximate Reasoning* 126, 124–132. doi:<https://doi.org/10.1016/j.ijar.2020.08.007>.
- [44] Gégény, D., Kovács, L., Radeleczki, S., 2022. Lattices defined by multigranular rough sets. *International Journal of Approximate Reasoning* 151, 413–429. doi:<https://doi.org/10.1016/j.ijar.2022.10.007>.
- [45] Gégény, D., Radeleczki, S., 2022. Rough l-fuzzy sets: Their representation and related structures. *International Journal of Approximate Reasoning* 142, 1–12. doi:<https://doi.org/10.1016/j.ijar.2021.11.002>.
- [46] Gégény, D., Radeleczki, S., 2024. On the lattice of fuzzy rough sets. *Fuzzy Sets and Systems* 488, 108999. doi:<https://doi.org/10.1016/j.fss.2024.108999>.
- [47] Hassanien, A.E., Abraham, A., Peters, J.F., Schaefer, G., Henry, C., 2009. Rough sets and near sets in medical imaging: A review. *IEEE Transactions on Information Technology in Biomedicine* 13, 955–968. doi:<https://doi.org/10.1109/TITB.2009.2017017>.
- [48] Herbert, J.P., Yao, J., 2011. Game-theoretic rough sets. *Fundamenta Informaticae* 108, 267–286. doi:<https://doi.org/10.3233/FI-2011-423>.
- [49] Hu, Q., Yu, D., Pedrycz, W., Chen, D., 2011. Kernelized fuzzy rough sets and their applications. *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering* 23, 1649–1667. doi:<https://doi.org/10.1109/TKDE.2010.260>.

- [50] Inuiguchi, M., 2004. Classification- versus approximation-oriented fuzzy rough sets, in: Bouchon-Meunier, B., Coletti, G., Yager, R.R. (Eds.), *Proceedings of Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems*, IPMU, pp. CD-ROM.
- [51] Iwiński, T.B., 1987. Algebraic approach to rough sets. *Bulletin of Polish Academy of Sciences. Mathematics* 35, 673–683.
- [52] Järvinen, J., 1999. *Knowledge Representation and Rough Sets*. Ph.D. thesis. University of Turku, Turku Center for Computer Science.
- [53] Järvinen, J., Kovács, L., Radeleczki, S., 2019. Rough sets defined by multiple relations, in: Mihálydeák, T., Min, F., Wang, G., Banerjee, M., Düntsch, I., Suraj, Z., Ciucci, D. (Eds.), *Rough Sets*, Springer International Publishing, Cham. pp. 40–51. doi:https://doi.org/10.1007/978-3-030-22815-6_4.
- [54] Järvinen, J., Pagliani, P., Radeleczki, S., 2013. Information completeness in Nelson algebras of rough sets induced by quasiorders. *Studia logica* 101, 1073–1092. doi:<https://doi.org/10.1007/s11225-012-9421-z>.
- [55] Järvinen, J., Radeleczki, S., 2014. Rough sets determined by tolerances. *International Journal of Approximate Reasoning* 55, 1419–1438. doi:<https://doi.org/10.1016/j.ijar.2013.12.005>.
- [56] Järvinen, J., Radeleczki, S., 2020. The structure of multigranular rough sets. *Fundamenta Informaticae* 176, 17–41. doi:<https://doi.org/10.3233/FI-2020-1961>.
- [57] Järvinen, J., Radeleczki, S., Veres, L., 2009. Rough sets determined by quasiorders. *Order* 26, 337–355. doi:<https://doi.org/10.1007/s11083-009-9130-z>.
- [58] Ji, Y., Shang, L., Dai, X., Ma, R., 2008. Apply a rough set-based classifier to dependency parsing. *International Conference on Rough Sets and Knowledge Technology. Lecture Notes in Computer Science* 5009, 97–105. doi:https://doi.org/10.1007/978-3-540-79721-0_18.
- [59] Kumar, S.S., Inbarani, H.H., 2015. Optimistic multi-granulation rough set based classification for medical diagnosis. *Procedia Computer Science* 47, 374–382. doi:<https://doi.org/10.1016/j.procs.2015.03.219>.
- [60] Kuncheva, L.I., 1992. Fuzzy rough sets: Application to feature selection. *Fuzzy Sets and Systems* 51, 147–153. doi:[https://doi.org/10.1016/0165-0114\(92\)90187-9](https://doi.org/10.1016/0165-0114(92)90187-9).
- [61] Lee, K.B., 1970. Equational classes of distributive pseudo-complemented lattices. *Canadian Journal of Mathematics* 22, 881–891. doi:<https://doi.org/10.4153/CJM-1970-101-4>.

- [62] Li, Q.D., Chi, Z.X., Shi, W.B., 2002. Application of rough set theory and artificial neural network for load forecasting, in: Proceedings. International Conference on Machine Learning and Cybernetics, pp. 1148–1152. doi:<https://doi.org/10.1109/ICMLC.2002.1167380>.
- [63] Lin, G., Liang, J., Qian, Y., 2015. An information fusion approach by combining multigranulation rough sets and evidence theory. *Information Sciences* 314, 184–199. doi:<https://doi.org/10.1016/j.ins.2015.03.051>.
- [64] Lin, T.Y., 1998a. Granular computing on binary relations i: Data mining and neighborhood systems, in: Polkowski, L., Skowron, A. (Eds.), *Rough Sets In Knowledge Discovery*, Physica-Verlag, Heidelberg. pp. 107–121.
- [65] Lin, T.Y., 1998b. Granular computing on binary relations ii: Rough set representations and belief functions, in: Polkowski, L., Skowron, A. (Eds.), *Rough Sets In Knowledge Discovery*, Physica-Verlag, Heidelberg. pp. 122–140.
- [66] Linde, Y., Buzo, A., Gray, R., 1980. An algorithm for vector quantizer design. *IEEE Transactions on Communications* 28, 84–95. doi:<https://doi.org/10.1109/TCOM.1980.1094577>.
- [67] Liu, G., 2008. Axiomatic systems for rough sets and fuzzy rough sets. *International Journal of Approximate Reasoning* 48, 857–867. doi:<https://doi.org/10.1016/j.ijar.2008.02.001>.
- [68] Liu, G., 2009. Lattice structures of rough fuzzy sets, in: *Proceedings of the 12th International Conference on Rough Sets, Fuzzy Sets, Data Mining and Granular Computing*, Springer, Berlin, Heidelberg. pp. 253–260. doi:https://doi.org/10.1007/978-3-642-10646-0_31.
- [69] Ma, Z.M., Hu, B.Q., 2013. Topological and lattice structures of l-fuzzy rough sets determined by lower and upper sets. *Information Sciences* 218, 194–204. doi:<https://doi.org/10.1016/j.ins.2012.06.029>.
- [70] Mi, J.S., Zhang, W.X., 2004. An axiomatic characterization of a fuzzy generalization of rough sets. *Information Sciences* 160, 235–249. doi:<https://doi.org/10.1016/j.ins.2003.08.017>.
- [71] Milne, P., 2004. Algebras of intervals and a logic of conditional assertions. *Journal of Philosophical Logic* 33, 497–548. doi:<https://doi.org/10.1023/B:LOGI.0000046072.61596.32>.
- [72] Mohamed, M.H., Khafagy, M.H., Ibrahim, M.H., 2019. Recommender systems challenges and solutions survey. *International Conference on Innovative Trends in Computer Engineering (ITCE)* , 149–155.

- [73] Monteiro, A., 1963. Sur la définition des algèbres de Lukasiewicz trivalentes. *Bulletin mathématique de la Société des Sciences Mathématiques et Physiques de la République Populaire Roumaine* 7 (55), 3–12.
- [74] Monteiro, A., 1980. Sur les algèbres de Heyting symétriques. *Portugaliae mathematica* 39, 1–237.
- [75] Morsi, N., Yakout, M., 1998. Axiomatics for fuzzy rough sets. *Fuzzy Sets and Systems* 100, 327–342. doi:[https://doi.org/10.1016/S0165-0114\(97\)00104-8](https://doi.org/10.1016/S0165-0114(97)00104-8).
- [76] Muralidharan, V., Sugumaran, V., 2013. Rough set based rule learning and fuzzy classification of wavelet features for fault diagnosis of monoblock centrifugal pump. *Measurement* 46, 3057–3063. doi:<https://doi.org/10.1016/j.measurement.2013.06.002>.
- [77] Nakamura, A., 1988. Fuzzy rough sets. *Note on Multiple-Valued Logic in Japan* 9, 1–8.
- [78] Nanda, S., Majumdar, S., 1992. Fuzzy rough sets. *Fuzzy Sets and Systems* 45, 157–160. doi:[https://doi.org/10.1016/0165-0114\(92\)90114-J](https://doi.org/10.1016/0165-0114(92)90114-J).
- [79] Pagliani, P., 1998. Rough set theory and logic-algebraic structures, in: Orłowska, E. (Ed.), *Incomplete Information: Rough Set Analysis. Studies in Fuzziness and Soft Computing*. Physica, Heidelberg, pp. 109–190. doi:https://doi.org/10.1007/978-3-7908-1888-8_6.
- [80] Pal, S., Mitra, P., 2002. Multispectral image segmentation using the rough-set-initialized em algorithm. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing* 40, 2495–2501. doi:[10.1109/TGRS.2002.803716](https://doi.org/10.1109/TGRS.2002.803716).
- [81] Pawlak, Z., 1982. Rough sets. *International Journal of Computer & Information Sciences* 11, 341–356. doi:<https://doi.org/10.1007/BF01001956>.
- [82] Pawlak, Z., 1985a. On rough relations. *Bulletin of Polish Academy of Sciences, Computer and Information Science* 34, 587–590.
- [83] Pawlak, Z., 1985b. Rough sets and fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems* 17, 99–102. doi:[https://doi.org/10.1016/S0165-0114\(85\)80029-4](https://doi.org/10.1016/S0165-0114(85)80029-4).
- [84] Pawlak, Z., 1991. *Rough sets: Theoretical aspects of reasoning about data*. volume 9. Kluwer Academic Publishers.
- [85] Pawlak, Z., 1996. Rough sets, rough relations and rough functions. *Fundamenta informaticae* 27, 103–108.
- [86] Pawlak, Z., Skowron, A., 2007. Rudiments of rough sets. *Information Sciences* 177, 3–27. doi:<https://doi.org/10.1016/j.ins.2006.06.003>.

- [87] Pei, D., 2005. A generalized model of fuzzy rough sets. *International Journal of General Systems* 34, 603–613. doi:<https://doi.org/10.1080/03081070500096010>.
- [88] Petrosino, A., Ferone, A., 2009. Rough fuzzy set-based image compression. *Fuzzy Sets and Systems* 160, 1485–1506. doi:<https://doi.org/10.1016/j.fss.2008.11.011>. special Issue: Fuzzy Sets in Interdisciplinary Perception and Intelligence.
- [89] Petrosino, A., Salvi, G., 2006. Rough fuzzy set based scale space transforms and their use in image analysis. *International Journal of Approximate Reasoning* 41, 212–228. doi:<https://doi.org/10.1016/j.ijar.2005.06.015>. advances in Fuzzy Sets and Rough Sets.
- [90] Pitoura, E., Stefanidis, K., Koutrika, G., 2022. Fairness in rankings and recommendation systems. *The VLDB Journal* 31, 431–458. doi:<https://doi.org/10.1007/s00778-021-00697-y>.
- [91] Polkowski, L., Skowron, A., Zytkow, J., 1995. Tolerance based rough sets, in: Lin, T., Wildberger, A. (Eds.), *Soft Computing: Rough Sets, Fuzzy Logic, Neural Networks, Uncertainty Management*, Simulation Councils, Inc., San Diego. pp. 55–58.
- [92] Pomykała, J., Pomykała, J.A., 1988. The Stone algebra of rough sets. *Bulletin of Polish Academy of Sciences. Mathematics* 36, 495–512.
- [93] Ponnamp, L.T., Deepak Punyasamudram, S., Nallagulla, S.N., Yellamati, S., 2016. Movie recommender system using item based collaborative filtering technique, in: *2016 International Conference on Emerging Trends in Engineering, Technology and Science (ICETETS)*, pp. 1–5. doi:<https://doi.org/10.1109/ICETETS.2016.7602983>.
- [94] Qian, Y., Li, S., Liang, J., Shi, Z., Wang, F., 2014a. Pessimistic rough set based decisions: A multigranulation fusion strategy. *Information Sciences* 264, 196–210. doi:<https://doi.org/10.1016/j.ins.2013.12.014>. serious Games.
- [95] Qian, Y., Liang, J., Yao, Y., Dang, C., 2010. MGRS: A multi-granulation rough set. *Information Sciences* 180, 949–970. doi:<https://doi.org/10.1016/j.ins.2009.11.023>. special Issue on Modelling Uncertainty.
- [96] Qian, Y., Zhang, H., Sang, Y., Liang, J., 2014b. Multigranulation decision-theoretic rough sets. *International Journal of Approximate Reasoning* 55, 225–237. doi:<https://doi.org/10.1016/j.ijar.2013.03.004>. special issue on Decision-Theoretic Rough Sets.

- [97] Radeleczki, S., 2003. On certain classes of non-distributive (L_n) -lattices. *Contributions to General Algebra* 14, 145—150.
- [98] Radeleczki, S., Järvinen, J., 2011. Representation of Nelson algebras by rough sets determined by quasiorders. *Algebra Universalis* 66, 163–179. doi:<https://doi.org/10.1007/s00012-011-0149-9>.
- [99] Radeleczki, S., Järvinen, J., 2018. Representing regular pseudocomplemented Kleene algebras by tolerance-based rough sets. *Journal of the Australian Mathematical Society* 105, 57–78. doi:<https://doi.org/10.1017/S1446788717000283>.
- [100] Radzikowska, A.M., Kerre, E.E., 2002. A comparative study of fuzzy rough sets. *Fuzzy Sets and Systems* 126, 137–155. doi:[https://doi.org/10.1016/S0165-0114\(01\)00032-X](https://doi.org/10.1016/S0165-0114(01)00032-X).
- [101] Radzikowska, A.M., Kerre, E.E., 2004. On L-fuzzy rough sets, in: Rutkowski, L., Siekmann, J.H., Tadeusiewicz, R., Zadeh, L.A. (Eds.), *Artificial Intelligence and Soft Computing - ICAISC 2004*, Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg. pp. 526–531. doi:https://doi.org/10.1007/978-3-540-24844-6_78.
- [102] Radzikowska, A.M., Kerre, E.E., 2005. Fuzzy rough sets based on residuated lattices, in: *Transactions on Rough Sets II*, Springer Berlin. pp. 278–296.
- [103] Recasens, J., 2011. Indistinguishability Operators, Modelling Fuzzy Equalities and Fuzzy Equivalence Relations. volume 260. Springer-Verlag Berlin Heidelberg. doi:<https://doi.org/10.1007/978-3-642-16222-0>.
- [104] Schröder, B., 2003. *Ordered sets: An introduction*. Birkhäuser, Boston, MA. doi:<https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0053-6>.
- [105] Sharma, H.K., Kumari, K., Kar, S., 2020. A rough set approach for forecasting models. *Decision Making: Applications in Management and Engineering* 3, 1—21. doi:<https://doi.org/10.31181/dmame2003001s>.
- [106] She, Y., He, X., 2012. On the structure of the multigranulation rough set model. *Knowledge-Based Systems* 36, 81—92. doi:<https://doi.org/10.1016/j.knosys.2012.05.019>.
- [107] She, Y.H., Wang, G.J., 2009. An axiomatic approach of fuzzy rough sets based on residuated lattices. *Computers & Mathematics with Applications* 58, 189–201. doi:<https://doi.org/10.1016/j.camwa.2009.03.100>.
- [108] Skowron, A., Stepaniuk, J., 1996. Tolerance approximation spaces. *Fundamenta Informaticae* 27, 245–253.

- [109] Swiniarski, R.W., Skowron, A., 2003. Rough set methods in feature selection and recognition. *Pattern Recognition Letters* 24, 833–849. doi:[https://doi.org/10.1016/S0167-8655\(02\)00196-4](https://doi.org/10.1016/S0167-8655(02)00196-4).
- [110] Tan, H., Guo, J., Li, Y., 2008. E-learning recommendation system, in: 2008 International Conference on Computer Science and Software Engineering, pp. 430–433. doi:<https://doi.org/10.1109/CSSE.2008.305>.
- [111] Ting, C., Jingqing, L., Bing, S., 2007. Research on rough set-neural network and its application in radar signal recognition, in: 2007 8th International Conference on Electronic Measurement and Instruments, pp. 3–764–3–768. doi:<https://doi.org/10.1109/ICEMI.2007.4351029>.
- [112] Tripathy, B., Bhambhani, U., 2018. Properties of multigranular rough sets on fuzzy approximation spaces and their application to rainfall prediction. *International Journal of Intelligent Systems and Applications* 10, 76–90. doi:<https://doi.org/10.5815/ijisa.2018.11.08>.
- [113] Tripathy, B., Nagaraju, M., 2012. On some topological properties of pessimistic multigranular rough sets. *International Journal of Intelligent Systems and Applications* 4, 10–17. doi:<https://doi.org/10.5815/ijisa.2012.08.02>.
- [114] Tripathy, B., Raghavan, R., 2011. On some topological properties of multigranular rough sets. *Journal of Advances in Applied Science Research* 2, 536–543.
- [115] Valverde, L., 1985. On the structure of f-indistinguishability operators. *Fuzzy Sets and Systems* 17, 313–328. doi:[https://doi.org/10.1016/0165-0114\(85\)90096-X](https://doi.org/10.1016/0165-0114(85)90096-X).
- [116] Wang, C., Huang, Y., Shao, M., Fan, X., 2019. Fuzzy rough set-based attribute reduction using distance measures. *Knowledge-Based Systems* 164, 205–212. doi:<https://doi.org/10.1016/j.knosys.2018.10.038>.
- [117] Wang, C.Y., 2017. Topological structures of L-fuzzy rough sets and similarity sets of L-fuzzy relations. *International Journal of Approximate Reasoning* 83, 160–175. doi:<https://doi.org/10.1016/j.ijar.2017.01.002>.
- [118] Wang, C.Y., Hu, B.Q., 2013. Fuzzy rough sets based on generalized residuated lattices. *Information Sciences* 248, 31–49. doi:<https://doi.org/10.1016/j.ins.2013.03.051>.
- [119] Wu, W.Z., Leung, Y., Mi, J.S., 2005. On characterizations of (i,t)-fuzzy rough approximation operators. *Fuzzy Sets and Systems* 154, 76–102. doi:<https://doi.org/10.1016/j.fss.2005.02.011>.

- [120] Wu, W.Z., Mi, J.S., Zhang, W.X., 2003. Generalized fuzzy rough sets. *Information Sciences* 151, 263–282. doi:[https://doi.org/10.1016/S0020-0255\(02\)00379-1](https://doi.org/10.1016/S0020-0255(02)00379-1).
- [121] Xu, W., Wang, Q., Zhang, X., 2013. Multi-granulation rough sets based on tolerance relations. *Soft Computing* 17, 1241–1252. doi:<https://doi.org/10.1007/s00500-012-0979-1>.
- [122] Yang, H.L., Li, S.G., Wang, S., Wang, J., 2012. Bipolar fuzzy rough set model on two different universes and its application. *Knowledge-Based Systems* 35, 94–101. doi:<https://doi.org/10.1016/j.knosys.2012.01.001>.
- [123] Yao, W., She, Y., Lu, L.X., 2019. Metric-based L-fuzzy rough sets: Approximation operators and definable sets. *Knowledge-Based Systems* 163, 91–102. doi:<https://doi.org/10.1016/j.knosys.2018.08.023>.
- [124] Yao, Y., 2007. Decision-theoretic rough set models, in: Yao, J., Lingras, P., Wu, W.Z., Szczuka, M., Cercone, N.J., Ślęzak, D. (Eds.), *Rough Sets and Knowledge Technology*, Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg. pp. 1–12. doi:https://doi.org/10.1007/978-3-540-72458-2_1.
- [125] Yao, Y.Y., 1997. Combination of Rough and Fuzzy Sets Based on α -Level Sets. Springer US, Boston, MA. chapter 15. pp. 301–321. doi:https://doi.org/10.1007/978-1-4613-1461-5_15.
- [126] Yao, Y.Y., 1998. Generalized rough set models. *Rough sets in knowledge discovery* 1, 286–318.
- [127] Yao, Y.Y., Wang, T., 1999. On rough relations: An alternative formulation, in: *New Directions in Rough Sets, Data Mining, and Granular-Soft Computing. RSFDGrC 1999. Lecture Notes in Computer Science*, Springer, Berlin, Heidelberg. pp. 82–90. doi:https://doi.org/10.1007/978-3-540-48061-7_12.
- [128] Zadeh, L., 1971. Similarity relations and fuzzy orderings. *Information Sciences* 3, 177–200. doi:[https://doi.org/10.1016/S0020-0255\(71\)80005-1](https://doi.org/10.1016/S0020-0255(71)80005-1).
- [129] Zadeh, L.A., 1965. Fuzzy sets. *Information and Control* 8, 338–353. doi:[https://doi.org/10.1016/S0019-9958\(65\)90241-X](https://doi.org/10.1016/S0019-9958(65)90241-X).
- [130] Zhang, Q., Xie, Q., Wang, G., 2016. A survey on rough set theory and its applications. *CAAI Transactions on Intelligence Technology* 1, 323–333. doi:<https://doi.org/10.1016/j.trit.2016.11.001>.
- [131] Zhou, J., Wang, G., Yang, Y., Chen, P., 2006. Speech emotion recognition based on rough set and svm, in: *2006 5th IEEE International Conference on Cognitive Informatics*, pp. 53–61. doi:<https://doi.org/10.1109/COGINF.2006.365676>.

- [132] Żwan, P., Szczuko, P., Kostek, B., Czyżewski, A., 2007. Automatic singing voice recognition employing neural networks and rough sets, in: Kryszkiewicz, M., Peters, J.F., Rybinski, H., Skowron, A. (Eds.), *Rough Sets and Intelligent Systems Paradigms*, Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg. pp. 793–802.