Miskolci Egyetem Doktori (PhD) Tézisfüzetei

GÉPÉSZMÉRNÖKI ÉS INFORMATIKAI KAR

A MAXIMUM OPERÁTOR SZEREPE A MÉRHETŐSÉGELMÉLETBEN ÉS NÉHÁNY ALKALMAZÁS

PhD értekezés

KÉSZÍTETTE:

AGBEKO KWAMI NUTEFE

OKLEVELES MATEMATIKUS

HATVANY JÓZSEF INFORMATIKAI TUDOMÁNYOK DOKTORI ISKOLA

DOKTORI ISKOLA VEZETŐ:

Prof. Dr. Tóth Tibor

A MŰSZAKI TUDOMÁNY DOKTORA

TUDOMÁNYOS VEZETŐ:

Vadászné Bognár Gabriella dr. habil

A MATEMATIKAI TUDOMÁNY KANDIDÁTUSA

Miskolc, 2009

Bíráló bizottság

Elnök:

Dr. Szigeti Jenő CSc. dr. habil egyetemi tanár (ME)

Titkár:

Dr. Juhász Imre CSc. egyetemi docens (ME)

Tagok:

Dr. Kovács László PhD egyetemi docens (ME)

Dr. Sztrik János MTA doktora, egyetemi tanár (DE)

Dr. Hujter Mihály CSc. egyetemi docens (BME)

Póttag:

Dr. Liptai Kálmán főiskolai tanár (EKF)

Hivatalos bírálók:

Dr. Laczkovich Miklós DSc. egyetemi tanár (ELTE)

Dr. Rontó Miklós DSc. egyetemi tanár (ME)

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés és néhány jelölés

Egy adott $(\Omega, \mathcal{F})$ mérhető téren a $\mu : \mathcal{F} \to [0, 1]$ halmazfüggvények közül a σ-additív mérték (vagyis a valószínűségi mérték) a legjobban kutatott területet teszi ki (lásd Halmos P.R. [21]). Az utóbbi évtizedekben az ún. fuzzy mérték is napvilágot látott, melynek axiómái sajnos nem egységesek úgy mint a hagyományos mértéknél azt megszoktuk (lásd Sugeno M. és Murofushi T. [38], valamint Dubois D. [19]).

A disszertációm célja a maximum (szupremum) operátor tanulmányozása.

a) Megvizsgáljuk a maximum operátort a σ-algebrákon, azaz tetszőleges σ-algebrán definiáljuk az ún. optimális mértéket, amely bizonyos feltételeknek eleget tesz.

b) Tanulmányozzuk a maximum operátort a mérhető függvények halmazán.

A dolgozat hét részből áll. Az I. fejezet a legfontosabb fogalmak rövid bevezetését és történeti leírását tartalmazza. A II. fejezetben definiáljuk az ún. optimális mértéket és megfogalmazzuk a struktúratételt. A III. fejezet ismerteti egy injektív leképezés létezését, amely a mérhető halmazokhoz optimális mértékek halmazait rendeli. Majd megadunk egy szükséges és elégséges feltételt, hogy a leképezés szürjektív legyen. A IV. fejezetben a Lebesgue integrálnak megfelelően bevezetjük az ún. optimális átlagot. Ezzel kapcsolatos tulajdonságok áttekintése után a Fubini illetve a Radon-Nikodym tételeknek a mértékelméletbeli megfelelőjét írjuk fel. Az V. fejezetben az optimális mérték és az optimális átlag felhasználásával jellemzünk néhány jól ismert konvergencia tételt mint például stabilizálódó, egy sorozat szerint pontonkénti, egyenletes ill., pontonkénti konvergencia tételt. A VI. fejezetben valószínűség számítási eszközökkel a konkáv ill. konvex Young függvényekkel kapcsolatos maximális egyenlőtlenségeket fogalmazunk meg. A konkáv Young függvények halmazából egy sűrű valódi részhalmazt különítünk el és megadjuk a pozitív fixponttal rendelkező összes konkáv Young függvények halmazát. A VII. fejezetben az optimális mérték alkalmazásait és egy a konkáv Young függvények pozitív fixpontjával kapcsolatos algoritmust mutatunk be.

Jelölések:

1.) A maximum, illetve szupremum operátorokra $\bigvee$ és $\vee$ jelöléseket használjuk. Hasonlóan $\bigwedge$ és $\wedge$ szimbólumok a minimumot, illetve az infimumot jelölik.

2.) Az $(\Omega, \mathcal{F})$ pár tetszőleges mérhető teret jelöl, ahol Ω tetszőleges nem-üres halmaz és $\mathcal{F}$ az Ω halmaz részhalmazainak egy σ-algebrája.

3.) $\mathcal{P}$-vel az optimális mértékek halmazát jelöljük.

4.) $\mathcal{P}_{<\infty}$ az olyan optimális mértékek halmazát jelöli, melyek véges generáló rendszerrel rendelkeznek.

5.) $\mathcal{P}_{\infty}$ az olyan optimális mértékek halmazát jelöli, melyek megszámlálhatóan végtelen generáló rendszerrel rendelkeznek.

2. Az optimális mérték és a struktúratétel

1. Tézis:

A σ-additív mértékhez (vagy valószínűségi mértékhez) hasonlóan egy az ún. optimális mértéket vezetünk be, azaz egy olyan halmazfüggvényt, mely egy tetszőleges σ-algebrát a $[0, 1]$ intervallumba képezi le. Az optimális mérték tulajdonságai közül kiemelhető a monotonitás és a felülről való folytonosság. Beláttuk, hogy tetszőleges optimális mértékhez van olyan felbonthatatlan atomok véges vagy megszámlálhatóan végtelen tagú sorozata, mely generálja azt, vagyis az optimális mértékek strukturális tulajdonságúak.

2.1. Az optimális mérték: definíció, példák

2.1. Definíció (Agbeko, [5]). *A $p : \mathcal{F} \to [0, 1]$ halmazfüggvényt optimális mér-téknek nevezzük, ha:*

***2.1.* Axióma.** *Teljesül a $p(\Omega) = 1$ és $p(\varnothing) = 0$ azonosság.*

***2.2.* Axióma.** *Minden B és E mérhető halmaz esetén a*

$$p(B \cup E) = p(B) \vee p(E)$$

azonosság fennáll.

***2.3.* Axióma.** *Minden $(E_n) \subset \mathcal{F}$ csökkenő eseménysorozat esetén*

$$p\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} p(E_n) = \bigwedge_{n=1}^{\infty} p(E_n),$$

azaz a p halmazfüggvény felülről folytonos.

Megemlítjük, hogy a következő tulajdonság fontosnak bizonyul a későbbiekben.

2.1. Lemma (Agbeko, [5]). *Legyen $(B_n) \subset \mathcal{F}$, $B_n \uparrow B$ és p egy optimális mérték. Akkor*

$$\lim_{n\to\infty} p(B_n) = p(B).$$

2.1. Példa (Agbeko, [5]). *Legyen $(\Omega, \mathcal{F})$ tetszőleges mérhető tér, $(\omega_n) \subset \Omega$ tetsző-leges fix sorozat és $(\alpha_n) \subset [0, 1]$ egy adott számsorozat, melyre $\alpha_n \downarrow 0$. Akkor a $p : \mathcal{F} \to [0, 1]$,*

$$p(B) = \max\{\alpha_n : \omega_n \in B\}, \tag{1}$$

halmazfüggvény egy optimális mérték.
Továbbá, ha $\Omega = [0, 1]$ és $\mathcal{F}$ egy Borel halmazokat tartalmazó σ-algebra a $[0, 1]$ fölött, akkor az $\mathcal{F}$-en definiált bármely optimális mérték megadható az (1) szerinti alakban.

Megemlítem, hogy a fenti példát Laczkovich Miklós adta.

2.2. Példa (Agbeko, [5]). *Legyen* $(\Omega, \mathcal{F})$ *tetszőleges mérhető tér és* $\omega \in \Omega$ *egy rögzített elem. Definiáljunk egy* $p_\omega : \mathcal{F} \to \{0, 1\}$ *halmazfüggvényt az alábbi módon:* $p_\omega(B) = 1$*, ha* $\omega \in B$*, és* $p_\omega(B) = 0$ *egyébként. Akkor a* p_ω *halmazfüggvény is egy optimális mérték.*

2.2. A struktúratétel

2.2. Definíció. *Legyen* p *egy optimális mérték. Egy* $H, p(H) > 0$ *mérhető halmazt* p*-atomnak nevezünk, ha abból, hogy* $B \in \mathcal{F}$ *és* $B \subset H$ *következik, hogy* $p(B) = p(H)$*, vagy* $p(B) = 0$*.*

2.3. Definíció (Agbeko, [6]). *Legyen* H *egy* p*-atom. Azt mondjuk, hogy a* H *atom felbontható, ha létezik egy szub-atom (részatom)* $B \subset H$ *úgy, hogy* $p(B) = p(H) = p(H \backslash B)$*. Ha nincs ilyen szub-atom, akkor a* H *atomot felbonthatatlannak nevezzük.*

Struktúratétel (Agbeko, [6]). *Legyen az* $(\Omega, \mathcal{F})$ *mérhető tér és a* p *optimális mérték tetszőleges. Akkor létezik páronként diszjunkt felbonthatatlan* p*-atomok egy*

$$\mathcal{H}(p) = \{H_n : n \in J\}$$

rendszere, ahol J *véges vagy megszámlálhatóan végtelen indexhalmaz úgy, hogy minden* $B \in \mathcal{F}$, $p(B) > 0$ *esetén*

$$p(B) = \max\{p(B \cap H_n) : n \in J\}. \qquad (2)$$

Továbbá, ha a J *indexhalmaz megszámlálhatóan végtelen, akkor* 0 *az egyetlen torlódási pontja a*

$$\{p(H_n) : n \in J\}$$

halmaznak, amelyet generáló rendszernek nevezünk.

3. Az optimális átlag

2. Tézis:

A Lebesgue integrál (vagy a várható érték) mintájára definiálunk egy nemlineáris funkcionált (ún. optimális átlagot) nem-negatív mérhető lépcsős függvények esetén. Először beláttuk, hogy ez az átlag nem függ a lépcsős függvény felbontásától, majd azt, hogy tetszőleges nem-negatív korlátos mérhető függvény esetén a függvény feletti lépcsős függvények optimális átlagának infimuma megegyezik a függvény alatti nem-negatív lépcsős függvények optimális átlagának szupremumával. Kiterjesztettük az optimális átlagot tetszőleges

nem-negatív mérhető függvényekre és így megkaptuk a Fubini, illetve Radon-Nikodym tételek a mértékelméletbeli megfelelőjét.

Legyen

$$s = \sum_{i=1}^{n} b_i \chi\left(B_i\right)$$

nem-negatív mérhető lépcsős függvény, ahol $\{B_i : i = 1, \ldots, n\} \subset \mathcal{F}$ az Ω alaphalmaznak egy partíciója és $(\Omega, \mathcal{F})$ egy mérhető tér.

Az s lépcsős függvény Lebesgue integrálját és optimális átlagát az alábbi táblázatban összegezzük:

Az s Lebesgue integrálja:	Az s optimális átlaga (Agbeko, [5])
$\int_\Omega s d\mu := \sum_{k=1}^{n} b_k \mu\left(B_k\right)$	$\mathop{\Large\diagdown}_{\Omega} sdp := \bigvee_{i=1}^{n} b_i p\left(B_i\right),$

3.1. Tétel (Agbeko, [5]). *Legyen egy $s \geq 0$ lépcsős függvénynek két felbontása*

$$\sum_{i=1}^{n} b_i \chi\left(B_i\right) \qquad \textit{és} \qquad \sum_{k=1}^{m} c_k \chi\left(C_k\right),$$

ahol $\{B_i : i = 1, \ldots, n\}$ és $\{C_k : k = 1, \ldots, m\} \subset \mathcal{F}$ az Ω alaphalmaz két partíciója. Akkor

$$\bigvee_{i=1}^{n} b_i p\left(B_i\right) = \bigvee_{k=1}^{m} c_k p\left(C_k\right).$$

3.1. Állítás. *Legyen $f \geq 0$ egy korlátos mérhető függvény. Akkor*

$$\sup_{s \leq f} \mathop{\Large\diagdown}_{\Omega} sdp = \inf_{\overline{s} \geq f} \mathop{\Large\diagdown}_{\Omega} \overline{s} dp,$$

ahol s és $\overline{s}$ nem-negatív mérhető lépcsős függvényeket jelöl.

3.1. Definíció (Agbeko, [5]). *Legyen f egy tetszőleges mérhető függvény. Az f optimális átlagán az*

$$\mathop{\Large\diagdown}_{\Omega} |f| \, dp = \sup \mathop{\Large\diagdown}_{\Omega} sdp$$

mennyiséget értjük, ahol a szupremumot azokon az s nem-negatív mérhető lépcsős függvénye-ken vesszük, melyekre igaz, hogy $s \leq |f|$.

Az optimális mértékek atomos struktúrájának egyik jelentős következményét az alábbi két eredményben foglaljuk össze:

3.2. Állítás (Agbeko, [6]). *Bármely $f : \Omega \to \mathbb{R}$ nem-negatív mérhető függvény minden felbonthatatlan atomon majdnem mindenütt konstans értéket vesz fel.*

3.3. Állítás (Agbeko, [6]). *Legyen adott egy $p \in \mathcal{P}$ optimális mérték és egy f mérhető függvény. Akkor*

$$\bigvee_{\Omega} |f|\, dp = \sup\left\{ \bigvee_{H_n} |f|\, dp : n \in J \right\},$$

ahol $\mathcal{H}(p) = \{H_n : n \in J\}$ egy p-generáló rendszer.
Továbbá, ha

$$\bigvee_{\Omega} |f|\, dp < \infty$$

feltétel fennáll, akkor

$$\bigvee_{\Omega} |f|\, dp = \sup\{c_n \cdot p(H_n) : n \in J\},$$

ahol $c_n = f(\omega)$ majdnem minden $\omega \in H_n$, $n \in J$ esetén.

4. A mérhető függvényekkel kapcsolatos konvergencia-tételek és korlátosság

3. Tézis:

Az optimális mérték, valamint optimális átlag felhasználásával jellemzünk számos jól ismert konvergenciatételt a mérhető függvénysorozatok esetén: a stabilizálódó (discrete), egy sorozat szerint pontonkénti (equally), egyenletes (uniform), valamint a pontonkénti (pointwise) konvergenciatételeket. Kitérünk a mérhető függvénysorozatok különféle korlátosságának jellemzésére is az optimális átlag alkalmazásával.

4.1. Definíció (Császár Á. és Laczkovich M., [16, 17, 18]). *Legyen X egy tetszőleges nem-üres halmaz. Azt mondjuk, hogy az X-en definiált (h_n) valós értékű függvénysorozat konvergál egy h valós értékű függvényhez:*
a) "*stabilizálódóan*", *ha minden $x \in X$ esetén létezik olyan $n_0(x)$ egy küszöb index, hogy*

$$h_n(x) = h(x),$$

ha $n > n_0(x)$;
b) "*egy sorozat szerint pontonként*", *ha van egy olyan (b_n) pozitív nullához tartó számsorozat és tetszőleges $x \in X$ elemhez van olyan $n_0(x)$ küszöb index, hogy*

$$|h_n(x) - h(x)| < b_n,$$

ha $n > n_0(x)$.

4.1. Tétel (Agbeko, [7]). *Legyenek adottak f és f_n $(n \in \mathbb{N})$ mérhető függvények. Ahhoz, hogy az (f_n) függvénysorozat egyenletesen tartson f-hez, szükséges és elégséges feltétel, hogy a (z_n) függvénysorozat a nullához tartson egyenletesen a $\mathcal{P}_\infty$ halmazon, ahol*

$$z_n(p) = \int_{\Omega} |f_n - f| \, dp,$$

$n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathcal{P}_\infty$.

4.2. Tétel (Agbeko, [7]). *Legyenek adottak f és f_n $(n \in \mathbb{N})$ mérhető függvények. Ahhoz, hogy az (f_n) függvénysorozat pontonként (stabilizálódóan, egy-sorozat szerint pontonként) tartson f-hez, szükséges és elégséges feltétel, hogy a (z_n) függvénysorozat pontonként (stabilizálódóan, egy-sorozat szerint pontonként) konvergáljon 0-hoz a $\mathcal{P}_{<\infty}$ halmazon, ahol*

$$z_n(p) = \int_{\Omega} |f_n - f| \, dp,$$

$n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathcal{P}_{<\infty}$.

5. A valószínűségszámítási eszközökkel kapcsolatos maximális egyenlőtlenségek

4. Tézis:

Áttekintjük a konkáv (konvex) Young függvényekkel kapcsolatos maximális egyenlőtlenségeket valószínűségszámítási eszközökkel. Elkülönítjük az $\mathcal{Y}_{\mathrm{conc}}$ konkáv Young függvények halmazának egy $\mathfrak{A}$ részhalmazát, mely a kompozícióra zárt. Megadunk az $\mathcal{Y}_{\mathrm{conc}}$ halmazon egy olyan metrikát, mely szerint az $\mathfrak{A}$ részhalmaz sűrű az $\mathcal{Y}_{\mathrm{conc}}$ halmazban. Megadjuk a pozitív fixponttal rendelkező összes konkáv Young függvények halmazát.

5.1. Szubmartingálokkal kapcsolatos maximális egyenlőtlenségek

5.1. Definíció. *A $\Phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ függvényt* konkáv Young függvénynek *nevezzük, ha minden $x \geq 0$ esetén*

$$\Phi(x) = \int_0^x \varphi(t) \, dt,$$

ahol $\Phi(0) = 0$ és $\varphi : (0, \infty) \to (0, \infty)$ csökkenő, jobbról folytonos függvény, mely integrálható minden véges $(0, x)$ intervallumon. Továbbá feltesszük, hogy $\Phi(\infty) = \infty$. Az összes ilyen konkáv Young függvények halmazát az $\mathcal{Y}_{\mathrm{conc}}$-cal jelöljük.

5.2. Definíció. *Azt mondjuk, hogy a Φ konkáv Young függvény teljesíti a maximális egyenlőtlenséget, ha létezik olyan $K_\Phi > 0$ (csak Φ-től függő) konstans, hogy minden $(X_n, \mathcal{F}_n)$, $n \in \mathbb{N}$ nem-negatív szubmartingál esetén az*

$$E\Phi\left(X_n^*\right) \leq K_\Phi\left(1 + EX_n\right) \tag{3}$$

egyenlőtlenség teljesül minden $n \in \mathbb{N}$-re, ahol $X_n^* = \bigvee_{k=1}^{n} X_k$.

5.1. Tétel (Agbeko, [3]). *Legyen Φ egy konkáv Young függvény. Ahhoz, hogy a Φ függvény teljesítse a fenti maximális egyenlőtlenséget szükséges és elégséges feltétel, hogy*

$$A_\Phi := \int_1^\infty \frac{\varphi(t)}{t} dt < \infty. \tag{4}$$

5.2. Konkáv Young függvények fixpontjáról

Fixpontról az első tanulmány az 1912-ben jelentet meg Brouwertól (lásd [14]).

5.2. Tétel (Brouwer, [14]). *Ha D^n egy zárt egységsugarú gömb, akkor minden $f : D^n \to D^n$ folytonos függvény esetén, van olyan x pont D^n-ben, hogy $x = f(x)$.*

A fixponttételnek különböző formája van. Mindegyikre nem szándékozom kitérni; egy ilyen tétel például a kontrakciós elven alapuló fixponttétel. Megemlítem Mészáros J. kollégámnak egy nagyon szép dolgozatát, ahol különböző kontrakciós elveket kötött össze [27].

Brouwer tételének egy igen elegáns illusztrációja a következő (lásd http://www.marginalrevolution.com/marginalrevolution/2004/08/kakutani_is_at_.html).

"Egy reggel, pontosan a napkeltekor, egy Buddhista szerzetes útnak indult egy kis csillogó templomba, mely egy hegy csúcsán található. Egy keskeny ösvény kígyózva vezet a hegy mentén a templomhoz. A szerzetes változó sebességgel ment fel, többször is megállt pihenni és enni. Kicsivel a napnyugta előtt elérte a templomot. Több napos böjtölés és meditáció után szintén a napkeltekor visszafelé indult ugyanazon az ösvényen, megint változó sebességgel haladt sok pihenéssel. Az átlagsebessége lefelé természetesen nagyobb mint, amikor felment. Kérdés, hogy van-e az út mentén olyan pont, ahová azonos időpontban ér el mindkét irányból?"

A feladatnak intuitív megoldása a következő: "Képzeljünk el két szerzetest, egyik a templomból lefelé, a másik a kolostorból felfelé indul el ugyazon a napon és a napkeltekor. Biztosan van olyan pont ahol találkoznak."

A Brouwer-féle fixpont tétel garantálja egy ilyen pont létezését.

5.3. Tétel (Agbeko, [11]). *Legyen $\Phi \in \mathcal{Y}_{\mathrm{conc}}$ tetszőleges függvény. Ahhoz, hogy létezzen egy olyan $s > 0$ szám, melyre $\varphi(s) < 1$ fennáll szükséges és elégséges feltétel, hogy a Φ függvény rendelkezzen egy fixponttal, azaz $x = \Phi(x)$ fennálljon valamilyen $x > 0$ szám esetén.*

5.1. Állítás (Agbeko, [11]). *Legyen* $\Phi \in \mathcal{Y}_{\text{conc}}$ *tetszőleges függvény. Ha* $x_0 \in (0, \infty)$ *egy olyan szám, hogy* $\Phi(x_0) = x_0$*, akkor* $\varphi(x_0) < 1$.

6. Alkalmazások

6.1. Az optimális mérték adatokból való meghatározása

6.1.1. Előzmények

A fuzzy halmazelméletben problémaként merült fel, hogy hogyan lehet meghatározni empirikusan a fuzzy mértéket. Wang Z., Leung K.S. és Wang J. (valamint sokan mások) javasolták a Sugeno-féle integrál használatát erre a célra (lásd [40]). A Sugeno integrált úgyis lehet tekinteni mint több-bemenő és egy kimenő rendszernek. A bemenet egy $(f(\omega_1), \ldots, f(\omega_n))$ vektor és a kimenet

$$E := (S)\int f d\mu = \sup\{\alpha \wedge \mu(F_\alpha) : \alpha \in [0, 1]\},$$

ahol f egy ismeretlen mérhető függvény, μ egy ismeretlen fuzzy mérték az $(\Omega, \mathcal{F})$ mérhető téren és $F_\alpha := \{\omega \in \Omega : f(\omega) \geq \alpha\}$.

Megfigyeljük k-szor az $(f(\omega_1), \ldots, f(\omega_n))$ rendszert, melynek eredménye:

$f_1(\omega_1)$	$f_1(\omega_2)$	$\ldots$	$f_1(\omega_n)$	E_1
$f_2(\omega_1)$	$f_2(\omega_2)$	$\ldots$	$f_2(\omega_n)$	E_2
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
$f_k(\omega_1)$	$f_k(\omega_2)$	$\ldots$	$f_k(\omega_n)$	E_k

és keressünk azt a μ közelítő fuzzy mértéket, melyre $E_i = (\mathrm{S})\int f_i d\mu$, $(i = 1, \ldots, k)$, és amely minimálizálja az

$$e := \sqrt{\sum\nolimits_{i=1}^{k} \left(E_i - (S)\int f_i d\mu\right)^2} \tag{5}$$

kifejezést.

Megemlítem, hogy a fenti (5) minimál feladatot az ún. genetikus algoritmus felhasználásával oldották meg, amelynek több inputja és egy outputja van [25].

6.1.2. Az optimális mérték adatokból való meghatározása

A Wang Z. és társainak dolgozata mintájára fogalmazzuk meg az alábbi problémát:

1. Probléma. *Legyen* $(\Omega, \mathcal{F})$ *egy mérhető tér, ahol* $\Omega = \{1, \ldots, n\}$ *és* $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$*, azaz* $\mathcal{F}$ *az* Ω *alaphalmaznak hatványhalmaza. Tekintsük a* $B_1 := \{1\}, \ldots, B_n := \{n\}$ *egyelemű halamzokat és legyen* $f : \Omega \to [0, \infty)$ *egy mérhető függvény, melynek értékkészlete csak elméleti értéket tartalmaz. Megfigyeljük* k*-szor az* $f(1), \ldots, f(k)$ *elméleti értékeket, melynek eredménye*:

B_1	B_2	$\ldots$	B_n	
$f_1(1)$	$f_1(2)$	$\ldots$	$f_1(n)$	Q_1
$f_2(1)$	$f_2(2)$	$\ldots$	$f_2(n)$	Q_2
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
$f_k(1)$	$f_k(2)$	$\ldots$	$f_k(n)$	Q_k

ahol $Q_i = \dfrac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f_{ij}$*,* $f_{ij} := f_i(j)$*,* $(j = 1, \ldots, n;\, i = 1, \ldots, k)$*.*
A kérdés az, hogy a k *számú "minta" közül, mely tekinthető a legjobbnak a mintaátlag szempontjából?*

Ennek a problémának megoldására javaslom, hogy keressünk egy p elméleti optimális mértéket, melyre fennáll $Q_i \approx \int_{\Omega} f_i dp$, $(i = 1, \ldots, k)$, úgy, hogy

$$err := \sqrt{\sum_{i=1}^{k} {\varepsilon_i}^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} \left(Q_i - \int_{\Omega} f_i dp\right)^2} \tag{6}$$

minimális legyen. Nyilvánvalóan a fent említett elméleti optimális mérték közelítését csak szimulációval lehet meghatározni. Legyen p_* az az optimális mérték, mely minimalizálja az (6) kifejezést. Könnyen be lehet látni, hogy

$$\bigvee_{i=1}^{k} \left| Q_i - \int_{\Omega} f_i dp_* \right| < err.$$

Legyen i_0 az az index, mely esetén a maximum elérhető volt, azaz

$$\left| Q_{i_0} - \int_{\Omega} f_{i_0} dp_* \right| = \bigvee_{i=1}^{k} \left| Q_i - \int_{\Omega} f_i dp_* \right|.$$

Ekkor azt mondhatjuk, hogy a p_* optimális mérték mellett az i_0-adik minta a legjobb a mintaátlag szempontjából.

Megemlítem, hogy a statisztikai mezők alaphalmaza általában nem számértékekből vagy számvektorokból áll. Ezért fogalmazzuk meg az alábbi általános problémát. Majd rámutatjuk, hogyan lehet az első problémának megoldását felhasználni az általános probléma megoldására.

2. Probléma. *Legyen* $(X, \mathcal{S})$ *egy tetszőleges mérhető tér és a* $D_1, \ldots, D_n$ *halmazok az* X *halmaz egy partícióját alkotják. Tekintsük a* $h : X \to [0, \infty)$ *egy valószínűségi változó. Megfigyeljük* k*-szor a* h *elméleti függvényt a* $D_1, \ldots, D_n$ *partíción. A megfigyelés eredménye*:

D_1	D_2	$\ldots$	D_n	
h_{11}	h_{12}	$\ldots$	h_{1n}	Q_1
h_{21}	h_{22}	$\ldots$	h_{2n}	Q_2
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
h_{k1}	h_{k2}	$\ldots$	h_{kn}	Q_k

ahol h_{ij} *a* h *függvény megfigyelt értéke az* i*-edik kísérletnél a* D_j *halmazon,* $i = 1, \ldots, k;\ j = 1, \ldots, n,$ *és* $Q_i = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} h_{ij},\ i = 1, \ldots, k.$
A kérdés az, hogy a k *számú "minta" közül, mely tekinthető a legjobbnak a mintaátlag szempontjából*?

A 2. problémát az elsőre vezetjük vissza az alábbi módon:

Vegyük az $\mathcal{S}_0 := \sigma(D_1, \ldots, D_n)$ a $D_1, \ldots, D_n$ partíció által generált véges σ-algebrát. Nyilvánvaló, hogy a h függvény $\mathcal{S}_0$-mérhető és legalább egy bijekció létesíthető az $\mathcal{S}_0$ és a 2^{Ω} halmazok között, ahol $\Omega = \{1, \ldots, n\}$. Ezután tekintünk egy $f : \Omega \to [0, \infty)$ mérhető függvényt, melynek megfigyelt értékei: $f_i(j) := h_{ij},\ i = 1, \ldots, k;\ j = 1, \ldots, n$. Innentől úgy járunk el mint az első problémánál láttuk.

6.2. Az első problémat megoldó algoritmus

Step 0.

Input: n positive integer
$\Omega = \{1, \ldots, n\}$
$k \times n$ matrix $F = [f(i,j)]_{i,\, j=1}^{n,\, k}$
n-dimensional vector Q
error bound ε
$B_j = \{j\}$, $j = 1...n$
X = the power set of Ω whose elements should be indexed $kk = 1 \ldots 2^n$
Generate the set σ of all permutations of $\{1, ..., n\}$.

Step 1.

Generate a decreasing sequence $\alpha(j) \in (0,\, 1]$, with $\alpha(1) = 1$.

Step 2.

For any permutation $\{n_1, ..., n_n\} \in \sigma$
Put $p\,(B_j) = \alpha(n_j)$, for $j = 1, ..., n$
Compute the optimal average: $A(i) = \max\{f(i,j) * p\,(B_j) : j = 1...n\}$
Compute the corresponding error: $err = \sqrt{\left(\sum_{j=1}^{n} (Q(i) - A(i))\right)^2}$

Step 3.

If $err < \varepsilon$ for some permutation *do*
Find the index i_0 such that $|Q(i_0) - A(i_0)| = \max\{|Q(i) - A(i)| : i = 1...k\}$
Determine $p\,(B) = \max\{\alpha(n_j) : j \in B\}$, for each $B \in X$
Else GOTO **Step 1**

Step 4.

The outputs
1.) Best sample: $f\,(i_0,\, 1)\,,\, \ldots,\, f\,(i_0,\, n)$
2.) The approximated optimal measure:

2^{Ω}	$p(B)$
$\{\} := \varnothing$	0
B_1	$p(B_1)$
$\vdots$	$\vdots$
B_i	$p(B_i)$
$\vdots$	$\vdots$

6.3. A kontrakciós fok és a pozitív fixpont keresésének algoritmusa

Step 1. Input $\Phi(x)$, $cc > 0$.

Step 2. Compute the derivative $\varphi(x)$ of $\Phi(x)$

Step 3. Starting from cc find an approximation root for equation $\varphi(x) - 1 = 0$ and put the result into c.

Step 4. *If* $c = 0$ *then* STOP.
else do

Step 5. Starting from c apply the FixedPoint algorithm, i.e.
$x_0 := c;\ x_{k+1} := \Phi(x_k);\ k = k + 1.$

Dolgozataimra hivatkozó munkák listája

[1] I. Fazekas, A note on "optimal measures", Publ. Math. Debrecen **51** / 3-4 (1997), 273-277. (**Paper referred to:** Publ. Math. Debrecen **46** / **1-2** (1995), 79-87)

[2] I. Fazekas, A note on "optimal measures", Publ. Math. Debrecen **51** / 3-4 (1997), 273-277. (**Paper referred to:** Acta Math. Hung. **63** (**1-2**) (1994), 1–15.)

[3] Tasos C. Christofides, Maximal inequalities for N-demimartingales, Archives Ineq. Applic. 1(2003), 397 - 408. (**Paper referred to:** Ann. Univ. Sci. Budapest, Sect. Math. **29** (1986), 9-17)

[4] B.L.S. Prakasa Rao, On some maximal inequalities for demisubmartingales and N-demisuper martingales, J. Inequal. Pure and Appl. Math. **8**(2006), Issue 4, Art.112, pp. 17 [ONLINE: http://jipam.vu.edu.au/] (**Paper referred to:** Ann. Univ. Sci. Budapest, Sect. Math. **29** (1986), 9-17)

[5] Yu Miao and Guangyu Yang, A note on the upper bounds for the dispersion, J. Inequal. Pure and Appl. Math. **8**(2007), Issue 3, Art.83, 17 pp. 6. [ONLINE: http://jipam.vu.edu.au/] (**Paper referred to:** Inequal. Pure and Appl. Math. **7**(5) (2006), Art.186. [ONLINE: http://jipam.vu.edu.au/])

A disszertációm témájához kapcsolódó publikációm az Irodalomjegyzékben az 1–11-ig terjedő munkákban szerepelnek.

Hivatkozások

[1] N. K. Agbeko, *Some reverse maximal inequalities for supermartingales*, Ann. Univ. Sci. Budapest, Sect. Comput. **6** (1985), 49–54.

[2] N. K. Agbeko, *Concave function inequalities for sub- (super-) martingales*, Ann. Univ. Sci. Budapest, Sect. Math. **29** (1986), 9–17.

[3] N. K. Agbeko, *Necessary and sufficient condition for the maximal inequality of concave Young-functions*, Ann. Univ. Sci. Budapest, Sect. Math. **32** (1989), 267–270.

[4] N. K. Agbeko, *On an inequality of Longnecker and Serfling*, Analysis Math. **17** (1991), 3–9.

[5] N. K. Agbeko, *On optimal averages*, Acta Math. Hung. **63** (**1-2**) (1994), 1–15.

[6] N. K. Agbeko, *On the structure of optimal measures and some of its applications*, Publ. Math. Debrecen **46/1-2** (1995), 79–87.

[7] N. K. Agbeko, *How to characterize some properties of measurable functions,* Math. Notes, Miskolc **1/2** (2000), 87–98.

[8] N. K. Agbeko, *Mapping bijctively σ-algebras onto power sets,* Math. Notes, Miskolc **2/2** (2001), 85–92.

[9] N. K. Agbeko, *Studies on concave Young-functions* , Miskolc Math. Notes **6/1** (2005), 3–18.

[10] N. K. Agbeko, *Some p.d.f.-free upper bound for the dispersion* $\sigma(X)$ and the quantity $\sigma^2(X) + (x - EX)^2$, J. Inequal. Pure and Appl. Math. **7**(5) (2006), Art.186. [ONLINE: http://jipam.vu.edu.au/]

[11] N. K. Agbeko, *The class of concave Young-functions possessing a positive fixed point*, Miskolc Math. Notes **9** (2008), No. 1, pp. 3-6.

[12] R. Ash, *Real analysis and probability theory*, Acad. Press, New York, London (1972).

[13] N. S. Barnett, P. Cerone, S. S. Dragomir and J. Roumeliotis, *Some inequalities for the dispersion of a random variable whose pdf is defined on a finite interval*, J. Inequal. Pure and Appl. Math., **2**(1)(2001), Art. 1. [ONLINE: http://jipam.vu.edu.au]

[14] L. E. J. Brouwer, *Über Abbildungen von Mannigfaltigkeiten*, Math. Ann., **71**(1912), 97–115.

[15] Tasos C. Christofides, *Maximal inequalities for N-demimartingales*, Archives Ineq. Applic. 1(2003), 397 - 408.

[16] Á. Császár and M. Laczkovich, *Discrete and equal convergence*, Studia Sci. Math. Hung. **10**(1975), 463–472.

[17] Á. Császár and M. Laczkovich, *Some remarks on discrete Baire classes,* Acta Math. Acad. Sci. Hung. **33 (1-2)**(1979), 51–70.

[18] Á. Császár and M. Laczkovich, *Discrete and equal Baire classes*, Acta Math. Hung. **55(1-2)** (1990), 165–178.

[19] D. Dubois, *Théorie des possibilités*, Masson, Paris, 1985. **ISBN: 2-225–80579-2**

[20] I. Fazekas**,** *A note on "optimal measures"*, Publ. Math. Debrecen **51/3-4** (1997), 273–277.

[21] P. R. Halmos, *Measure theory*, D. van Nostrand Co. Inc. 4^{th} ed., 1956.

[22] Shizuo Kakutani, *A generalization of Brouwer's fixed point theorem*, Duke Mathematical Journal **8**(3)(1941), 457-459.

[23] J. Kennan, *Uniqueness of positive fixed points for increasing concave functions on* $\mathbb{R}^n$: *An elementary result*, Review of Econmic Dynamics **4**(2001), 893-899.

[24] M. A. Krasnosel'ski and B. Ya Rutickii, *Convex functions and Orlicz-spaces.* (Transl. from Russian by Boron L. F.) Noordhoff, Groningen, 1961.

[25] C. C. Lin and A. P. Chen, *Fuzzy discrimnimant analysis with outlier detection by genetic algorithm*, Computer & Operation Reaserch **31** (2004), 877-888.

[26] M. Longnecker and R. J. Serflying, *General moment and probability inequalities for the maximum partial sum*, Acta Math. Acad. Sci. Hung. **30** (1977), 129–133.

[27] J. Mészáros, *A comparison of various definitions of contractive type mappings*, Bull. Cal. Math. Soc. **84**(1992), 167-194.

[28] YU MIAO AND GUANGYU YANG, *A note on the upper bounds for the dispersion*, J. Inequal. Pure and. Appl. Math., 8(3)(2007), Art. 83 [ONLINE: http://jipam.vu.edu.au/].

[29] J. MOGYORÓDI, *On the decomposition of Doob of non-negative submartingales*, Ann. Univ. Sci. Budapest, Sectio Math. **24** (1981), 255–264.

[30] J. MOGYORÓDI AND T. F. MÓRI, *Necessary and sufficient condition for the maximal inequality of convex Young functions*, Acta Sci. Math. Szeged **45** (1983), 325–332.

[31] J. MOGYORÓDI, *On a concave Young function inequality for martingales*, Annales Univ. Sci. Budapest, Sectio Math. **24** (1981), 265–271.

[32] J. F. NASH, JR., *Equilibrium Points in N-Person Games*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **36**(1950) 48–49.

[33] B.L.S. PRAKASA RAO, *On some maximal inequalities fo demisubmartingales and N-demisupermartingales*, J. Inequal. Pure and. Appl. Math., 8(4)(2007), Art. 112. [ONLINE: http://jipam.vu.edu.au/].

[34] M. PURI AND D. RALESCU, *A possibility measure is not a fuzzy measure*, Fuzzy Sets and Systems, **7**(1982), 311-313.

[35] M. C. REED, *Fundamental Ideas of Analysis*, John Wiley and Sons Inc., New York, Singapore, 1998.

[36] W. RUDIN, *Principles of mathematical analysis*, 3rd ed., McGraw-Hill Book Company, Auckland, 1976.

[37] J. SERFLING, *Moment inequality for the maximum cumulative sum*, Ann. Math. Statist. **41** (1970), 1227–1234.

[38] M. SUGENO AND T. MUROFUSHI, *Pseudo-additive measures and integrals*, J. Math. Anal. Appl. **122**(1987), **no. 1**, 197-222.

[39] A. TARSKI, *A lattice-theoretical Fixpoint Theorem and its applications*, Pacific Journal of Mathematics **5**(1955), 285-309.

[40] Z. WANG, K.-S. LEUNG AND J. WANG, *Determining nonnegative monotone set functions based on Sugeno's integral: an application of genetic algorithms*, Fuzzy Sets and Systems, **112**(2000), 155-164.

Összefoglaló

Bevezettük az optimális mértéket és beláttuk, hogy minden optimális mérték strukturális tulajdonságú. Definiáltuk az optimális átlagot nem-negatív mérhető lépcsős függvények esetén. Először beláttuk, hogy ez az átlag nem függ a lépcsős függvény felbontásától. Kiterjesztettük az optimális átlagot tetszőleges nem-negatív mérhető függvényekre és így megkaptuk a Fubini, illetve Radon-Nikodym tételek a mértékelméletbeli megfelelőjét. Jellemeztünk számos jól ismert konvergencia fogalmakat a mérhető függvénysorozatok esetén: a stabilizálódó, egy sorozat szerint pontonkénti, egyenletes, valamint a pontonkénti konvergencia fogalmakat. Kitértünk a mérhető függvénysorozatok különféle korlátosságának jellemzésére is az optimális átlag alkalmazásával. Áttekintjük a konkáv (konvex) Young függvényekkel kapcsolatos maximális egyenlőtlenségeket valószínűségszámítási eszközökkel. Elkülönítettük az $\mathcal{Y}_{\mathrm{conc}}$ konkáv Young függvények halmazának egy $\mathfrak{A}$ részhalmazát, mely a kompozícióra zárt. Megadtunk az $\mathcal{Y}_{\mathrm{conc}}$ halmazon egy olyan metrikát, mely szerint az $\mathfrak{A}$ részhalmaz sűrű az $\mathcal{Y}_{\mathrm{conc}}$ halmazban. Megadtuk a pozitív fixponttal rendelkező összes konkáv Young függvények halmazát.

Summary

In the image of the probability measure we proposed a set function, called optimal measure, which we showed to have a structural property. Next, we defined the so-called optimal average for non-negative measurable simple functions and then extend this definition to arbitrary measurable functions. Optimal average provides us with many similar well-known results in measure theory such as the Fubini and Radon-Nikodym theorems, say. We characterized various notions of well-known convergence such as the notions of discrete, equally, uniform and pointwise convergence of sequences of measurable functions. Maximal inequalities in connection with concave (convex) Young functions are discussed are studied with probabilistic tools. Further we isolated a subset $\mathfrak{A}$ of the set $\mathcal{Y}_{\mathrm{conc}}$ of concave Young functions and showed that it is closed under the composition operation. We also demonstrated that subset $\mathfrak{A}$ is a dense set in $\mathcal{Y}_{\mathrm{conc}}$ with respect to a specific metric. Finally we characterized the set of those concave Young functions possessing a positive fixed point.