1. Mintafeladat:

Cholesky-módszerrel oldja meg az alábbi lineáris egyenletrendszert!

$$20x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 11$$
$$x_1 + 20x_2 + x_3 + x_4 = 9$$
$$x_1 + x_2 + 20x_3 + x_4 = 19$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + 20x_4 = 10$$

A számításokat 4-tizedes pontossággal végezze!

MEGOLDÁS

Előállítjuk az A együtthatómátrix Cholesky felbontását: Gauss eliminációval hozzuk az A mátrixot felső háromszög alakra (U). Az követően minden i-re (i=1:4) meghatározzuk az U-hullám mátrix i-edik sorát az alábbi módon: osszuk az U mátrix i-edik sorának elemeit a sor i-edik elemének gyökével (i=1:4). Majd transzponáljuk a kapott mátrixot. Ezzel előáll a Cholesky felbontás. E két alsó és felső háromszögmátrixra alkalmazzuk a visszahelyettesítő algoritmusokat.

A =

```
20   1   1   1
 1  20   1   1
 1   1  20   1
 1   1   1  20
```

b =

```
11
 9
19
10
```

Az A mátrix felső háromszög alakra hozása:

Pivot = 20

```
It_Szam        Modosított A mátrix:
-------------------------------------------------------------

1              20.0000 1.0000  1.0000  1.0000
               0.0000  19.9500 0.9500  0.9500
               1.0000  1.0000  20.0000 1.0000
               1.0000  1.0000  1.0000  20.0000
-------------------------------------------------------------

It_Szam        Modosított A mátrix:
-------------------------------------------------------------

1              20.0000 1.0000  1.0000  1.0000
               0.0000  19.9500 0.9500  0.9500
               0.0000  0.9500  19.9500 0.9500
               1.0000  1.0000  1.0000  20.0000
-------------------------------------------------------------

It_Szam        Modosított A mátrix:
-------------------------------------------------------------

1              20.0000 1.0000  1.0000  1.0000
               0.0000  19.9500 0.9500  0.9500
```

```
                0.0000  0.9500  19.9500 0.9500
                0.0000  0.9500  0.9500  19.9500
---------------------------------------------------------------
Pivot =  19.950

It_Szam         Modosított A mátrix:
---------------------------------------------------------------

2               20.0000 1.0000  1.0000  1.0000
                0.0000  19.9500 0.9500  0.9500
                0.0000  0.0000  19.9048 0.9048
                0.0000  0.9500  0.9500  19.9500
---------------------------------------------------------------

It_Szam         Modosított A mátrix:
---------------------------------------------------------------

2               20.0000 1.0000  1.0000  1.0000
                0.0000  19.9500 0.9500  0.9500
                0.0000  0.0000  19.9048 0.9048
                0.0000  0.0000  0.9048  19.9048
---------------------------------------------------------------
Pivot =  19.905

It_Szam         Modosított A mátrix:
---------------------------------------------------------------

3               20.0000 1.0000  1.0000  1.0000
                0.0000  19.9500 0.9500  0.9500
                0.0000  0.0000  19.9048 0.9048
                0.0000  0.0000  0.0000  19.8636
---------------------------------------------------------------
Pivot =  19.864
                 U-hullám mátrix:                     U-hullám transzp:
---------------------------------------------------------------
        4.4721  0.2236  0.2236  0.2236                4.4721  0.0000  0.0000  0.0000
        0.0000  4.4665  0.2127  0.2127                0.2236  4.4665  0.0000  0.0000
        0.0000  0.0000  4.4615  0.2028                0.2236  0.2127  4.4615  0.0000
        0.0000  0.0000  0.0000  4.4569                0.2236  0.2127  0.2028  4.4569
---------------------------------------------------------------
x =
   0.46682
   0.36156
   0.88787
   0.41419
```

2. Feladat:
Adottak az alábbiak: A mátrix, maximális iterációszám (itmax), hibakorlát (eps), kezdeti sajátvektor ($v^{(0)}$) és sajátérték (q_0). Hatvány módszerrel határozza meg a mátrix domináns sajátérték közelítését az adottak mellett! Állítsa le a számításokat a maximális iterációszám elérésével vagy ha a kiszámított hiba az adott hibaküszöbnél kisebb lesz!

A mátrix sorai: [2 ; 1 ; 1], [1 ; 2 ; 1], [3 ; 2 ; 2]; esp = 0,005; Itmax = 5; kezdeti sajátvektor egyes elemekből áll; kezdeti sajátérték = 0.

MEGOLDÁS

Iter = 0
v =
1
1
1
gamma0 = 0

Iter = 1
z =
4
4
7
t = 3
y =
0
0
1
gamma = 7
v =
0.57143
0.57143
1.00000
hiba = 7

Iter = 2
z =
2.7143
2.7143
4.8571
t = 3
y =
0
0
1
gamma = 4.8571
v =
0.55882
0.55882
1.00000
hiba = 2.1429

Iter = 3
z =
2.6765
2.6765
4.7941
t = 3
y =
0
0

1
gamma = 4.7941
v =
0.55828
0.55828
1.00000
hiba = 0.063025

Iter = 4
z =
2.6748
2.6748
4.7914
t = 3
y =
0
0
1
gamma = 4.7914
v =
0.55826
0.55826
1.00000
hiba = 0.0027066

A két kilépési feltétel közül a hibára vonatkozó kilépési feltétel teljesül elsőnek.

3. Feladat: Adottak az alábbiak: A mátrix, maximális iterációszám (itmax), hibakorlát (eps), kezdeti sajátvektor (v0) és sajátérték (q0). Inverz hatványmódszerrel határozza meg az inverz mátrix domináns sajátértékének közelítését az adatok felhasználásával! Állítsa le a számításokat, ha a kiszámított hiba az adott hibaküszöbnél kisebb!

MEGOLDÁS

A =

2	1	1
1	2	1
3	2	2

esp= 0.0050000

v0 =

1
1
1

hiba = 100

gamma0 = 10

(gamma és v változókban raktározzuk majd a szóban forgó domináns sajátérték és a hozzátartozó sajátvektor közelítését)

Az alsó és felső háromszögmátrix előállítása:

t_Szam Pivot:

---

1 0.5000

L az alsó háromszögmátrix:			U a felső háromszögmátrix		
1.0000	0.0000	0.0000	2.0000	1.0000	1.0000
0.5000	1.0000	0.0000	0.0000	1.5000	0.5000
0.0000	0.0000	1.0000	3.0000	2.0000	2.0000

t_Szam Pivot:

---

1 1.5000

L az alsó háromszögmátrix:			U a felső háromszögmátrix		
1.0000	0.0000	0.0000	2.0000	1.0000	1.0000
0.5000	1.0000	0.0000	0.0000	1.5000	0.5000
1.5000	0.0000	1.0000	0.0000	0.5000	0.5000

t_Szam Pivot:

---

2 0.3333

L az alsó háromszögmátrix:			U a felső háromszögmátrix		
1.0000	0.0000	0.0000	2.0000	1.0000	1.0000
0.5000	1.0000	0.0000	0.0000	1.5000	0.5000
1.5000	0.3333	1.0000	0.0000	0.0000	0.3333

Iter = 0

v0 =

1
1
1

hiba = 100

gamma1 = 10

(A k-adik lépésben megoldjuk rendre $Lw^{(k-1)} = v^{(k-1)}$, $Uz^{(k)} = w^{(k-1)}$ **alsó és felső háromszög lineáris egyenletrendszereket, ahol a** $v^{(k-1)}$ **az előző sajátvektor.)**

Iter = 1
w =
1.00000
0.50000
-0.66667
z =
1
1
-2
maxnorm = 2
t = 3
y =
0
0
1
v =
0.50000
0.50000
-1.00000
gamma = -2
hiba = 12

Iter = 2
w =
0.50000
0.25000
-1.83333
z =
2.0000
2.0000
-5.5000
maxnorm = 5.5000
t = 3
y =
0
0
1
v =
0.36364
0.36364
-1.00000
gamma = 5.5000
hiba = 7.5000

Iter = 3
w =
0.36364
0.18182
-1.60606
z =
1.7273
1.7273
-4.8182
maxnorm = 4.8182
t = 3
y =
0
0
1
v =
0.35849

0.35849
-1.00000
gamma = 4.8182
hiba = 0.68182

Iter = 4
w =
0.35849
0.17925
-1.59748
z =
1.7170
1.7170
-4.7925
maxnorm = 4.7925
t = 3
y =
0
0
1
v =
0.35827
0.35827
-1.00000
gamma = 4.7925
hiba = 0.025729

Iter = 5
w =
0.35827
0.17913
-1.59711
z =
1.7165
1.7165
-4.7913
maxnorm = 4.7913
t = 3
y =
0
0
1
v =
0.35826
0.35826
-1.00000
gamma = 4.7913
hiba = 0.0011142

4. Mintafeladat:
Adott az alábbi A mátrix, melynek sorai rendre: [-1 , -2 , 2]; [-1 , -2 , 0]; [-1 , 1 , -3].

(1.) Döntse el, hogy a -1 -2 és -3 számértékek a mátrix sajátértékei-e vagy sem!

(2.) Ennek ismeretében döntse el, hogy szinguláris-e a mátrix vagy sem!

(3.) Határozza meg a mátrix inverzének sajátértékeit!

MEGOLDÁS

1. Az alábbi $\varphi(\lambda)$ karaterisztikus polinom λ változó helyére rendre behelyettesítsük az adott számértékeket, és ahol a φ érték zérus az a mátrix sajátértéke.

$$\varphi(\lambda) = \begin{vmatrix} -1-(\lambda) & -2 & 2 \\ -1 & -2-\lambda & 0 \\ -1 & 1 & -3-\lambda \end{vmatrix}$$

Detrermináns fejtéssel adódik, hogy

$$\varphi(-1) = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\varphi(-2) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\varphi(-3) = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

ezért a -1, -2, -3 számértékek a mátrix sajátértékeit alkotják.

2. A szingularitás eldöntéséhez elegendő a mátrix determinását kiszámítani, és ha értéke zérus, akkor szinguláris különben nemszinguláris (vagy reguláris). Mivel egy mátrix determinánsa megegyezik a sajátértékei szorzatával, ezért

$$\det(A) = (-1)(-2)(-3) = -6 \neq 0.$$

Tehát nemszinguláris a mátrix.

3. Mivel tetszőleges nemszinguláris mátrix és inverzének sajátértékei egymásnak reciprokai, ezért az A^{-1} inverz mátrix sajátértékei: -1; $-0,5$ és $-0,3333$.