1. Mintafeladat: Adott $f(x) = x^2 - \exp(-x-1)$ függvény az $[-4.0000; -3.0000]$ intervallumon és $\varepsilon = 0.0050$ hibakorlát. Newton módszerrel, határozza meg a gyök közelítését!

MEGOLDÁS

Több fázisból áll a Newton módszer.

$$f'(x) = 2 * x + \exp(-x-1)$$

$$f''(x) = 2 - \exp(-x-1)$$

1. Fázis: Gyök létezésének eldöntéséhez kiszámítsuk a függvény értékét az intervallum mindkét végpontjában, majd összeszorozzuk a két függvényértéket és összehasonlítsuk zérushoz:

$$f(-4.0000) = -4.0855$$

$$f(-3.0000) = 1.6109$$

$$f(-4.0000) * f(-3.0000) = -6.5816$$

Mivel $f(-4.0000) * f(-3.0000) = -6.5816 < 0$, azaz a szorzat negatív, ezért **van gyök**.
2. Fázis: A Newton módszer alkalmazhatóságával kapcsolatos ellenőrzés!!!
2/a. Deriváljuk az $f(x)$ függvényt és megvizsgáljuk a deriváltfüggvény előjelváltását az $[-4.0000; -3.0000]$ intervallumban.

Ha $f'(x)$ az 1. derivált nem vált előjelet, akkor az $[-4.0000; -3.0000]$ intervallum bármely x pontjában vagy $f'(x) > 0$, vagy $f'(x) < 0$.
2/b. Ha az 1. derivált nem vált előjelet, akkor lederiváljuk azt, azaz vesszük az $f(x)$ második deriváltját és hasonló módon megvizsgáljuk előjelváltását. Ha $f''(x)$ a 2. derivált sem vált előjelet, akkor az intervallum bármely x pontjában vagy $f'(x) * f''(x) > 0$ vagy $f'(x) * f''(x) < 0$. Ebben az esetben alkalmazható lesz a Newton módszer.

$$f'(-4.0000) = 12.0855$$

$$f'(-3.5000) = 5.1825$$

$$f'(-3.0000) = 1.3891$$

$$f'(-4.0000) * f'(-3.0000) = 16.7875$$

A derivált grafikonja x-tengely fölé esik, tehát pozitív előjelű függvény a derivált.

$$f''(-4.0000) = -18.0855$$

$$f''(-3.0000) = -5.3891$$

$$f''(-4.0000) * f''(-3.0000) = 97.4640$$

A 2. derivált negatív előjelű. Nyilvánvalóan $f'(x) * f''(x) < 0$ az adott intervallumban. Ezzel ellenőriztük, hogy alkalmazható a Newton módszer.

3. Fázis: Mivel az 1. derivált pozitív és a 2. derivált negatív előjelű, ezért a szorzatuk negatív előjelű. Tehát a kezdő közelítés $x^{(0)} = -4.0000$

4. Fázis: Kiszámítsuk rendre az 1. derivált abszolút értékének minimumát és a 2. derivált abszolút értékének maximumát:

$$m = 1.3891$$

$$M = 18.086$$

5. Fázis: Az iteráció végrehajtása:

Iter=0
$x^{(0)} = -4$

Iter=1
$f\left(-4\right) = -4.0855$
$f'\left(-4\right) = 12.0855$
$x^{(1)} = -4 - \frac{-4.0855}{12.0855} = -3.662$
hiba=0.74396 $> \varepsilon$

Iter=2
$f\left(-3.662\right) = -0.9147$
$f'\left(-3.662\right) = 7.0009$
$x^{(2)} = -3.662 - \frac{-0.9147}{7.0009} = -3.5313$
hiba=0.11105 $> \varepsilon$

Iter=3
$f\left(-3.5313\right) = -0.0998$
$f'\left(-3.5313\right) = 5.5072$
$x^{(3)} = -3.5313 - \frac{-0.0998}{5.5072} = -3.5132$
hiba=0.0021447 $< \varepsilon$
A keresett gyökközelítés: $x^{(3)} = -3.5312$

2. Mintafeladat: Intervallumfelező eljárással oldja az alábbi nemlineáris egyenletet $f(x) = 0$, ahol $f(x) = x^2 - \exp(-x-1)$, $-4 \leq x \leq -3$, $\varepsilon = 0,005$ hibakorlát mellett. A számításokat 4-tizedes pontossággal végezze!

MEGOLDÁS

Van gyök, mert $f(-4.0000) * f(-3.0000) = -6.5816 < 0$.

1. lépés:

$[a^{(1)}; b^{(1)}] = [-4; -3]$

$$x^{(1)} = \frac{a^{(1)} + b^{(1)}}{2} = (-4-3)/2 = -3.5$$

$$h_1 = \frac{-3-(-4)}{2} = 0,5 > \varepsilon$$

2. lépés:

$$f(-3.5) = 0.0675$$

Mivel

$$f(-4) * f(-3.5) = -0.2758 < 0$$

$$[a^{(2)}; b^{(2)}] = [-4; -3.5]$$

Felezzük a gyököt tartalmazó új intervallumot és kiszámítsuk a 2. hibát.

Folytassuk az eljárást, amíg a kiszámított hiba a megadott hibakorlátnál kisebb nem lesz.

Megjegyzés: A gyök minden intervallumfelezés után pontosan egyik részintervallumba esik.

Az intervallumfelező eljárás során összegyűjtött eredmények:

Iter	[a	, b]	(a+b)/2	Hiba
1	-4.0000	-3.0000	-3.5000	0.5000
2	-4.0000	-3.5000	-3.7500	0.2500
3	-3.7500	-3.5000	-3.6250	0.1250
4	-3.6250	-3.5000	-3.5625	0.0625
5	-3.5625	-3.5000	-3.5312	0.0312
6	-3.5312	-3.5000	-3.5156	0.0156
7	-3.5156	-3.5000	-3.5078	0.0078
8	-3.5156	-3.5078	-3.5117	0.0039

3. Mintafeladat: Fixpont iterációs módszer feltételeit megvizsgálva határozza meg az $f(x) = 0$ nemlináris egyenletet gyökének közelítését, ahol $f(x) = (x+1)^2 - \exp(-x-1)$, $x \in [-1; 0]$! Továbbá adottak rendre: 10 a maximális iterációszám, $0,005$ a hibakorlát és -0.401 kezdeti közelítés. Állítsa le az eljárást a maximális iterációszám elérésével vagy ha a kiszámított hiba az adott hibakorlátnál kisebb.

Megjegyzés: Az $f(x) = 0$ egyenletet $x = g(x)$ iteratív alakra hozzuk. (Sajnos nincs egyértelmű mód erre.) Olykor a $g(x)$ függvényt az $x - f(x)$ függvénnyel fejezzük ki. Máskor az $f(x) = 0$ egyenlet balodalán lévő egy-egy kifejezésből fejezzük ki az x változót, átrendezéssel. Ha előállítottuk a $g(x)$ függvényt, akkor az alábbi két feltételt kell ellenőrizni:
(1.) Fixpont letezése: $g([a;b]) \subset [a;b]$, azaz a $g(x)$ értékkészlete része-e az $[a;b]$ értelmezési tartománynak vagy sem. Ha igen, akkor a $g(x)$ függvénynek létezik fixpontja.
(2.) A módszer alkalmazhatósága: Lederiváljuk a $g(x)$ függvényt és kiszámítsuk az alábbi $q := \max_{a \le x \le b} |g'(x)|$ értéket. Ha $q < 1$, akkor alkalmazható a fixpont iterációs eljárás. Ne felejtsük el, hogy a q arány nagy szerepet játszik minden lépésben a hiba előállításában, ezért is 1-nél kisebbnek kell lennie.

MEGOLDÁS

Az $f(x)$ függvénynek létezik gyöke, mert $f(-1) * f(0) = f(-1) * f(0) = (-1) * 0.63212 = -0.63212 < 0$.
$g(x)$ függvény keresése:
$(x+1)^2 - exp(-x-1) = 0$
$(x+1)^2 = exp(-x-1)$
$x + 1 = \sqrt{exp(-x-1)}$
$x = -1 + \sqrt{exp(-x-1)}$
$g(x) = -1 + \sqrt{exp(-x-1)}$
Nyilvánvaló, hogy $g(x) = -1 + \sqrt{(\exp(-x-1))}$ csökkenő függvény és $g([-1, 0]) = [-0.39346; 0] \subset [-1, 0]$ Tehát a $g(x)$ függvénynek van fixpontja az adott intervallumban. Így számíthatjuk a deriváltját: $g'(x) = -0.5 * \sqrt{(\exp(-x-1))}$.
A kontrakciókonstans: Mivel $|g'(x)| = 0.5 * \sqrt{(\exp(-x-1))}$ egy monoton csökkenő függény ezért

$$q = \max_{-1 \le x \le 0} |g'(x)| = 0.5 * \sqrt{(\exp(-(-1)-1))} = 0.5 < 1.$$

Ezzel ellenőriztük, hogy alkalmazható a fixpont iterációs eljárás.
Az eljárás végrehajtása:

Iter = 0
$x^{(0)} = -0.401$
Iter = 1
$x^{(1)} = g(-0.401) = -0.25881$
hiba = 0.14219>eps
Iter = 2
$x^{(2)} = g(-0.25881) = -0.30968$
hiba = 0.050865>eps
Iter = 3
$x^{(3)} = g(-0.30968) = -0.29189$
hiba = 0.017782>eps
Iter = 4
$x^{(4)} = g(-0.29189) = -0.29816$
hiba = 0.0062678>eps
Iter = 5
$x^{(5)} = g(-0.29816) = -0.29596$
hiba = 0.0022029<eps
A keresett közelítése $x^{(5)} = -0.29596$

4. Mintafeladat:

Határozza meg az alábbi mátrix spektrálnormájának közelítését hatványmódszerrel, ha eps = 0.0050000 és Itmax = 5. A kilépési feltétel: maximális iterációszám elérése vagy ha hiba kisebb mint a megadott hibakorlát. A kezdő közelítések: $q_0 = 0; v^{(0)T} = [1; 1; 1]$.

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

MEGOLDÁS

Megjegyzem, hogy $B^T * B$ és $B * B^T$ szimmetrikus, pozitív szemidefinit mátrixok és sajátértékei megegyeznek (nyilvánvalóan azok nem negatívak).

Mivel a B mátrix spektrálnormája (S) definíció szerint a $B^T * B$ domináns sajátértékének a gyöke ezért, hatványmódszerrel közelítőleg előállítható. A k-adik lépésben a q_k domináns sajátértékből gyököt vonunk.

$$A := B^T * B = \begin{bmatrix} 14 & 10 & 9 \\ 10 & 9 & 7 \\ 9 & 7 & 6 \end{bmatrix}$$

Iter = 0

$$v^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$q_0 = 0$

$S_0 = \sqrt{q_0} = 0$

Iter = 1

$$z^{(1)} = Av^{(0)} = \begin{bmatrix} 33 \\ 26 \\ 22 \end{bmatrix}$$

$\left\|z^{(1)}\right\|_\infty = 33$

$t = 1$

$$y = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$q_1 = 33$

$S_1 = \sqrt{q_1} = 5.7446$

$$v^{(1)} = \frac{z^{(1)}}{\left\|z^{(1)}\right\|} = \begin{bmatrix} 1.00000 \\ 0.78788 \\ 0.66667 \end{bmatrix}$$

hiba $= |q_1 - q_0| = 33 > \varepsilon$

Iter = 2

$$z^{(2)} = Av^{(1)} = \begin{bmatrix} 27.879 \\ 21.758 \\ 18.515 \end{bmatrix}$$

$\left\|z^{(2)}\right\|_\infty = 27.879$

$t = 1$

$$y = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$q_2 = 27.879$

$S_2 = \sqrt{q_2} = 5.2800$

$$v^{(2)} = \frac{z^{(2)}}{\left\|z^{(2)}\right\|} = \begin{bmatrix} 1.00000 \\ 0.78043 \\ 0.66413 \end{bmatrix}$$

$\text{hiba} = |q_1 - q_2| = 5.1212 > \varepsilon$

Iter = 3

$z^{(3)} = Av^{(2)} = \begin{bmatrix} 27.782 \\ 21.673 \\ 18.448 \end{bmatrix}$

$\left\|z^{(3)}\right\|_\infty = 27.782$

$t = 1$

$y = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$q_3 = 27.782$

$S_3 = \sqrt{q_3} = 5.2708$

$v^{(3)} = \frac{z^{(3)}}{\left\|z^{(3)}\right\|} = \begin{bmatrix} 1.00000 \\ 0.78012 \\ 0.66403 \end{bmatrix}$

$\text{hiba} = |q_3 - q_2| = 0.097266 > \varepsilon$

Iter = 4

$z^{(4)} = Av^{(3)} = \begin{bmatrix} 27.777 \\ 21.669 \\ 18.445 \end{bmatrix}$

$\left\|z^{(4)}\right\|_\infty = 27.777$

$t = 1$

$y = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$q_4 = 27.777$

$S_4 = \sqrt{q_4} = 5.2704$

$v^{(4)} = \frac{z^{(4)}}{\left\|z^{(4)}\right\|} = \begin{bmatrix} 1.00000 \\ 0.78010 \\ 0.66403 \end{bmatrix}$

$\text{hiba} = |q_3 - q_4| = 0.0040657 < \varepsilon$

A keresett közelítés $S_4 = \sqrt{q_4} = 5.2704$.