**1. Mintafeladat:** (LU-módszer algoritmus I-es)
Adott az alábbi lineáris egyenletrendszer.

$$x_1+x_2+x_3=-3$$
$$2x_1+4x_2+4x_3=16$$
$$-x_1+5x_2-4x_3=6$$

Az LU-módszer I-es algoritmussal határozza meg
(i) a megoldást,
(ii) az alábbi $\Omega-\Phi+\Psi$ számértéket, ahol $\Omega$ , $\Phi$ és $\Psi$ rendre az együtthatómátrix inverzében szereplő 1. oszlopnak euklideszi normáját, 2. oszlopnak oktaéder normáját és a 3. oszlopnak maximum normáját képezi!

MEGOLDÁS

Először meghatározzuk az A mátrix LU-felbontását. Majd alkalmas visszahelyettesítő a algoritmussal megoldjuk rendre az $Ly=b$ , $Ly^{(1)}=e_1$ , $Ly^{(2)}=e_2$ és $Ly^{(3)}=e_3$ alsó háromszög lineáris egyenletrendszereket majd alkalmas visszahelyettesítő algoritmussal rendre megoldjuk az $Ux=y$ , $Ux^{(1)}=y^{(1)}$ , $Ux^{(2)}=y^{(2)}$ és $Ux^{(3)}=y^{(3)}$ felső háromszög lineáris egyenletrendszereket. Majd kiszámítjuk a kért vektornormákat, amiből meghatározzuk a kívánt számértéket.

A módosított A mátrix és b joboldali vektor különböző fázisai:

t_Szam Pivot:

---

1 2.00000

---

U felső háromszögmátrix: L alsó háromszögmátrix

---

```
1.00000   1.00000   1.00000        1.00000   0.00000   0.00000
0.00000   2.00000   2.00000        2.00000   1.00000   0.00000
-1.00000  5.00000  -4.00000        0.00000   0.00000   1.00000
```

---

t_Szam Pivot:

---

1 -1.00000

---

U felső háromszögmátrix: L alsó háromszögmátrix

---

```
1.00000   1.00000   1.00000        1.00000   0.00000   0.00000
0.00000   2.00000   2.00000        2.00000   1.00000   0.00000
0.00000   6.00000  -3.00000       -1.00000   0.00000   1.00000
```

---

t_Szam Pivot:

---

2 3.00000

```
-------------------------------------------------------------

  U felső háromszögmátrix:        L alsó háromszögmátrix
-------------------------------------------------------------
    1.00000   1.00000   1.00000                  1.00000   0.00000   0.00000
       0.00000  2.00000    2.00000              2.00000   1.00000   0.00000
       0.00000    0.00000  -9.00000              -1.00000   3.00000   1.00000
-------------------------------------------------------------
x =

  -14
    4
    7


x^{(1)} =

   2.00000
  -0.22222
  -0.77778

x^{(2)} =

  -0.50000
   0.16667
   0.33333

x^{(3)} =

   0.00000
   0.11111
  -0.11111

kertnormak =

   2.15739   1.00000   0.11111

Kert_szamertek =  1.2685

======================
```

**2. Mintafeladat:** (LU-módszer algoritmus II-es)
Adott az alábbi lineáris egyenletrendszer.

$x_1 - 2x_2 + x_3 = -36$
$x_1 + 8x_2 + x_3 = 9$
$10x_1 + 100x_2 - 10x_3 = 111$

Az LU-módszer II-es algoritmussal határozza meg
(i) a megoldást,
(ii) az együtthatómátrix inverzének 2. oszlopát,
(iii) az együtthatómátrix determinánsát!
A rendelkezésre álló permutáció mátrix sorai rendre: [0, 1, 0]; [0, 0, 1]; [1, 0, 0].

MEGOLDÁS

Először meghatározzuk a C:=PA mátrix LU-felbontását. Majd megoldjuk rendre az $Ly = Pb$ és $Ux = y$ alsó és felső háromszög lineáris egyenletrendszereket a megfelelően visszahelyettesítő algoritmusokkal. Mivel PA mátrix LU-felbontását ismerjük csak, ezért $det(A) = ((-1)^{\alpha}) * det(U)$, ahol az alpha számérték azt jelöli, hogy hányszor kell visszarendezni a P permutációmátrix sorai, hogy egységmátrixhoz jussunk. Az inverz mátrix 2. oszlopának meghatározásához meg kell oldani a (PA)v = Pe_{2}, ahol e_{2} a 2. egységvektort jelöli.
Jegyezzük meg, hogy az a v vektor, mely megoldása a (PA)v = Pe_{2} és az Av = e_{2} lineáris egyenletrendszerek közül valamelyikének a másiknak is megoldása.

A =

| | | |
|---|---|---|
| 1 | -2 | 1 |
| 1 | 8 | 1 |
| 10 | 100 | -10 |

A módosított C mátrix és Pb joboldali vektor különböző fázisai:

| t_Szam | Pivot: |
|---|---|
| 1 | 10.00000 |

U felső háromszögmátrix: L alsó háromszögmátrix:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1.00000 | 8.00000 | 1.00000 | 1.00000 | 0.00000 | 0.00000 |
| 0.00000 | 20.00000 | -20.00000 | 10.0000 | 1.00000 | 0.00000 |
| 1.00000 | -2.00000 | 1.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 1.00000 |

| t_Szam | Pivot: |
|---|---|
| 1 | 1.00000 |

U felső háromszögmátrix: L alsó háromszögmátrix

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1.00000 | 8.00000 | 1.00000 | | 1.00000 | 0.00000 | 0.00000 |
| 0.00000 | 20.00000 | -20.00000 | | 10.00000 | 1.00000 | 0.00000 |
| 0.00000 | -10.00000 | 0.00000 | | 1.00000 | 0.00000 | 1.00000 |

| t_Szam | Pivot: |
|---|---|
| 2 | -0.50000 |

| U felső háromszögmátrix: | | | | L alsó háromszögmátrix | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1.00000 | 8.00000 | 1.00000 | | 1.00000 | 0.00000 | 0.00000 |
| 0.00000 | 20.00000 | -20.00000 | | 10.00000 | 1.00000 | 0.00000 |
| 0.00000 | 0.00000 | -10.00000 | | 1.00000 | -0.50000 | 1.00000 |

(i) Az Ly = Pb LER megoldása:
y =

111.0000
-47.1000
5.7500

Az Ux = y LER megoldása:
x =

-30.4500
4.5000
3.4500

(ii) Az Ly = Pe_{2} LER megoldása:
y=
0
0
1

és az Ux = y megoldása pedig
x =
-0.40000
0.10000
0.60000

(iii)
det(A) = (-1)*(-1)*(-10)*20*1 = -200

=================

**3. Mintafeladat:** (Részleges főelemkiválasztás)
Adott az alábbi lineáris egyenletrendszer.

$x_1-2x_2+x_3=-36$

$x_1+8x_2+x_3=9$

$10x_1+100x_2-10x_3=111$

Gauss eliminációs eljárással részleges főelem-kiválasztással határozza meg
(i) a megoldást,
(ii) az együtthatómátrix inverzének 3. oszlopát,
(iii) az együtthatómátrix az alábbi normái összegét: Frobenius norma, sorösszegnorma és oszlopösszegnorma!

MEGOLDÁS

A =

| | | |
|---|---|---|
| 1 | -2 | 1 |
| 1 | 8 | 1 |
| 10 | 100 | -10 |

Az első lépésben az első oszlop 3. eleme abszolút értékben nagyobb
a többi elem abszolút értékénél (az oszlopban), ezért felcseréljük az 1. és a 3. sort.
Ez után hajtjuk végre a Gauss-eliminációt, miután bekarikáztuk a főelemet.

Iter = 1
Sorcsere
A =

| | | |
|---|---|---|
| 10 | 100 | -10 |
| 1 | 8 | 1 |
| 1 | -2 | 1 |

Pivot = 10

| Modosított A mátrix: | | | Modosított b vektor: |
|---|---|---|---|
| 10.0000 | 100.0000 | -10.0000 | 111.0000 |
| 0.0000 | -2.0000 | 2.0000 | -2.1000 |
| 1.0000 | -2.0000 | 1.0000 | -36.0000 |

Pivot = 10

| Módosított A mátrix: | | | Módosított b vektor: |
|---|---|---|---|
| 10.0000 | 100.0000 | -10.0000 | 111.0000 |
| 0.0000 | -2.0000 | 2.0000 | -2.1000 |
| 0.0000 | -12.0000 | 2.0000 | -47.1000 |

Részleges főelemkiválasztás lévén a 2. oszlopban a 3. elem abszolút értéke nagyobb a 2. eleménél, ezért felcseréljük a 2. és a 3. sort. Úgy folytatjuk a kinullázást.

Iter = 2
Sorcsere
A =

```
    10   100   -10
     0   -12     2
     0    -2     2
```

```
                 Modosított A mátrix:                     Modosított b vektor:
---------------------------------------------------------------------------------
      10.0000  100.0000   -10.0000              111.0000
      0.0000   -12.0000     2.0000              -47.1000
      0.0000   -2.0000     2.0000               -2.1000
---------------------------------------------------------------------------------
```

Iter = 2
Pivot = -12

```
                 Modosított A mátrix:                     Modosított b vektor:
---------------------------------------------------------------------------------
        10.0000  100.0000  -10.0000              111.0000
        0.0000  -12.0000     2.0000              -47.1000
        0.0000  0.0000      1.6667               5.7500
---------------------------------------------------------------------------------
```

Az első fázis végére értünk, mert felső háromszög lineáris egyenletrendszerre redukáltuk az eredeti LER-t. Ezt pedig a megfelelő visszahelyettesítő algoritmussal megoldjuk.
A megoldás tehát: $x=[-30.4500;  4.5000; 3.4500]^{T}$.
======================

**4. Mintafeladat:** (Teljes főelemkiválasztás)
Adott az alábbi lineáris egyenletrendszer.

$$7x_1 - 8x_2 + 15x_3 = 1$$
$$-x_1 + x_2 - 2x_3 = 2$$
$$8x_1 - 9x_2 + 16x_3 = 3$$

Gauss eliminációs eljárással teljes főelem-kiválasztással határozza meg a megoldást!

MEGOLDÁS

Teljes főelem-kiválasztás esetén a Gauss eljáráshoz a kezdő tábla/mátrix mindegyik oszlopa fölé kérem tüntesse fel a megfelelő változót, mivel egy adott lépésben sorcserét és oszlopcserét hajthatjuk végre (a helyzettől függően). Oszlopcsere esetén a változóval együtt megy végbe.
Az első lépésben még a kinullázás előtt az együtthatómátrixban keressük a legnagyobb abszolút értékű elemet (a 16-os): az éppen a 3. sor és a 3. oszlop közös eleme, ezért felcseréljük az 1. és a 3. sort, majd az 1. és a 3. oszlopot. Így már kiválasztjuk a 16-os számot főelemnek és hajtjuk végre a kinullázást. A második lépésben (a 2. sor és oszlop, valamint a 3. sor és oszlop közös) 2x2-típusú részmátrixban keressük a legnagyobb abszolút értékű elemet, ami a 0,5 számérték (az éppen a 2. sor és a 3. oszlop közös eleme), ezért ebben az esetben csak a 2. és a 3. oszlopot cseréljük fel. Így az első fázis végén az utolsó tábla felső szegélyén az oszlopok végleges sorrendje 3. 1. 2. A visszahelyettesítő algoritmusnál figyelemebe kell venni, a 2. változót számítjuk elsőnek, majd az első változót a másodiknak és a harmadiknak pedig a harmadik változót.
Megjegyzés: Az oszlopcseréknél az alábbi permutációkat hajtottuk végre 123 → 321 → 312.
Az utolsó permutációból kiderül a változók előállítási sorrendje 2., 1. és 3. (a felső háromszög LER-re vonatkozó visszahelyettesítő algoritmus miatt).

A =

```
    7   -8   15
   -1    1   -2
    8   -9   16
```

b =

```
   1
   2
   3
```

Iter =  1
A legnagyobb abszolút értékű elem keresése
am =  16
I =  3
J =  3
imax =  3
jmax =  3
Sorcsere
A =

```
    8   -9   16
   -1    1   -2
    7   -8   15
```

b =

```
       3
       2
       1

Oszlopcsere
A =

   16   -9    8
   -2    1   -1
   15   -8    7

b =

   3
   2
   1

Iter =  2
A legnagyobb abszolút értékű elem keresése
am =  0.50000

Sorcsere
A =

   16.00000   -9.00000    8.00000
    0.00000    0.43750   -0.50000
    0.00000   -0.12500    0.00000

b =

   3.0000
  -1.8125
   2.3750

Oszlopcsere
A =

   16.00000    8.00000   -9.00000
    0.00000   -0.50000    0.43750
    0.00000    0.00000   -0.12500

b =

   3.0000
  -1.8125
   2.3750

x =
       -13
       -19
        -4
=======================
```

**5. Mintafeladat:** (Gauss-Jordan eljárás)
Gauss-Jordan eljárással határozza meg az alábbi lineáris egyenletrendszert megoldását és az együtthatómátrix inverzét!

$$0.25\,x_1 + 4\,x_2 + 3.75\,x_3 = 10$$
$$-4\,x_2 - 4\,x_3 = 20$$
$$0.25\,x_1 + 8\,x_2 + 8.75\,x_3 = 30$$

MEGOLDÁS

A kiinduló tábla: az együtthatómátrixot bővítjük a jobboldali vektorral és az együtthatómátrixszal. Még a kinullázás előtt a főelem sorát elosztjuk a főelemmel, majd végrehajtjuk az eliminációt szokásos módon.

```
A =

   0.25000   4.00000   3.75000
   0.00000  -4.00000  -4.00000
   0.25000   8.00000   8.75000

b =

   10
   20
   30


It_Sz     Módosított A mátrix:        Módosított b vektor:  Pivot:
-------------------------------------------------------------
  1    1.0000  16.0000  15.0000     40.0000         0.2500
       0.0000  -4.0000  -4.0000     20.0000         0.0000
       0.2500  8.0000  8.7500     30.0000         0.0000
-------------------------------------------------------------
 Módosított A mátrix:        Módosított b vektor:   Pivot:
-------------------------------------------------------------
    1.0000  16.0000  15.0000        40.0000    0.2500
    0.0000  -4.0000   -4.0000       20.0000    0.0000
    0.0000  4.0000   5.0000       20.0000    0.0000
-------------------------------------------------------------
It_Sz     Módosított A mátrix:        Módosított b vektor:  Pivot:
-------------------------------------------------------------
  2    1.0000  16.0000  15.0000   40.0000     0.2500
       0.0000  1.0000  1.0000     -5.0000        -4.0000
       0.0000  4.0000  5.0000     20.0000         0.0000
-------------------------------------------------------------
 Módosított A mátrix:        Módosított b vektor:   Pivot:
-------------------------------------------------------------
    1.0000  0.0000  -1.0000        120.0000    0.2500
    0.0000  1.0000   1.0000       -5.0000    -4.0000
```

```
    0.0000  0.0000   1.0000       40.0000    0.0000
----------------------------------------------------------------
It_sz     Módosított A mátrix:    Módosított b vektor:  Pivot:
----------------------------------------------------------------
3      1.0000  0.0000  -1.0000    120.0000        0.2500
       0.0000  1.0000  1.0000     -5.0000        -4.0000
       0.0000  0.0000  1.0000     40.0000          1.0000
----------------------------------------------------------------

 Módosított A mátrix:        Módosított b vektor:   Pivot:
----------------------------------------------------------------
    1.0000  0.0000  0.0000      160.0000         0.2500
    0.0000  1.0000   0.0000      -45.0000         -4.0000
    0.0000  0.0000   1.0000      40.0000          1.0000
----------------------------------------------------------------
   Az A mátrix inverze
----------------------------------------------------------------
    3.0000   5.0000  1.0000
    1.0000   -1.2500   -1.0000
    -1.0000  1.0000   1.0000
----------------------------------------------------------------
x =

   160
   -45
    40

======================
```

**6. Mintafeladat:** (Jacobi / Seidel iteráció)
Határozza meg az alábbi lineáris egyenletrendszer közelítő megoldását Jacobi és Seidel iterációval

$$8x_1-2x_2+x_3=8$$
$$x_1-7x_2+2x_3=6$$
$$3x_1-x_2-7x_3=-10$$

az alábbi adatok mellett
1.) a kezdő közelítés elemei rendre: 1; 2; 3.
2.) maximális iterációszám: 8
3.) hibakorlát: eps = 0,00002.
Akkor lépjen ki, ha az alábbi kilépési feltételek közül legalább egyik teljesül:
(i) Jacobi iterációból származó hiba eps-nál kisebb
(ii) Seidel iterációból származó hiba eps-nál kisebb
(iii) A maximális iterációszám eléréskor.

MEGOLDÁS

Az iteratív LER előállítása érdekében az adott lineáris egyenletrendszer i-edik egyenletéből kifejezzük az i-edik változót úgy, hogy a változó együtthatójával elosztjuk az egyenletet (i=1:3). Így jutunk a kívánt iteratív LER-hez.

$$x_1=0.2500x_2-0.1250x_3+1.0000$$
$$x_2=0.1429x_1+0.2857x_3-0.8571$$
$$x_3=0.4286x_1-0.1429x_2+1.4286$$

Iterációra alkalmas LER együttható mátrixa és joboldali vektor állóállítása

***** C mátrix: ****** d vektor: *************

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0.0000 | 0.2500 | -0.1250 | 1.0000 |
| 0.1429 | 0.0000 | 0.2857 | -0.8571 |
| 0.4286 | -0.1429 | 0.0000 | 1.4286 |

A kiszámított sorösszegnorma: cn = 0.57143.
Majd ezt az értéket 1-hez viszonyítjuk. Mivel az iterációra alkalmas LER C együtthatómátrixának sorösszegnormája = 0.5714 < 1, ezért a Jacobi, valamint a Seidel iteráció konvergens sorozatot alkot.
(a) Jacobi iteráció alkalmazásánál: a kezdő közelítésből indulva, ha a k-adik közelítés előállt, akkor a (k+1)-edik közelítés első elemét úgy kapjuk, hogy az első iteratív egyenletbe behelyettesítjük az előző közelítés 2. és 3. elemét, a második elemét a második iteratív egyenletbe behelyettesítjük az előző közelítés 1. és 3. elemét és a harmadik elemét a harmadik iteratív egyenletbe behelyettesítjük az előző közelítés 1. és 2. elemét.
(b) Seidel iterációnál az i-edik iteratív egyenleteben a helyettesítés előtt össze kell hasonlítani a baloldali változó i indexét a jobboldali változó j indexével: ha i < j, akkor az előző és ha i > j, akkor az aktuális (azaz, azokat az $x_j^{(k+1)}$ ( $j<i$ ) értékeket) közelítést (azaz azokat az $x_j^{(k+1)}$ , $j<i$ értékeket) helyettesítjük be.

```
Iter =  1

**************  ITERÁCIÓ EREDMÉNYEK:  ***********************
        x_Jacobi                   x_Seidel                x_Egzakt
------------------------------------------------------------
          1.1250                    1.1250              0.7164
          0.1429                   0.1607                       -0.2488
          1.5714                   1.8878                       1.7711
------------------------------------------------------------
Hiba= 2.4762 > eps              Hiba= 2.4524 > eps
------------------------------------------------------------

Iter =  2

        x_Jacobi                   x_Seidel                x_Egzakt
------------------------------------------------------------
          0.8393                   0.8042                 0.7164
          -0.2474                  -0.2029                -0.2488
          1.8903                   1.8022                 1.7711
------------------------------------------------------------
Hiba=0.5204  > eps          Hiba=0.4848  > eps
------------------------------------------------------------

Iter =  3

**************  ITERÁCIÓ EREDMÉNYEK:  ***********************
        x_Jacobi                   x_Seidel                x_Egzakt
------------------------------------------------------------
          0.7018                   0.7240                 0.7164
          -0.1972                  -0.2388                -0.2488
          1.8236                   1.7730                 1.7711
------------------------------------------------------------
Hiba=.1832 > eps           Hiba=0.1069 > eps
------------------------------------------------------------

Iter =  4

**************  ITERÁCIÓ EREDMÉNYEK:  ***********************
        x_Jacobi                   x_Seidel                x_Egzakt
------------------------------------------------------------
          0.7228                   0.7187                  0.7164
          -0.2358                  -0.2479                 -0.2488
          1.7575                   1.7720                 1.7711
------------------------------------------------------------
Hiba=0.0881 > eps        Hiba=0.0122 > eps
------------------------------------------------------------
```

Iter = 5

************** ITERÁCIÓ EREDMÉNYEK: ***********************

| x_Jacobi | x_Seidel | x_Egzakt |
|---|---|---|
| 0.7213 | 0.7165 | 0.7164 |
| -0.2517 | -0.2485 | -0.2488 |
| 1.7720 | 1.7712 | 1.7711 |

Hiba=0.0212 > eps    Hiba=0.0029 > eps

---

Iter = 6

************** ITERÁCIÓ EREDMÉNYEK: ***********************

| x_Jacobi | x_Seidel | x_Egzakt |
|---|---|---|
| 0.7156 | 0.7165 | 0.7164 |
| -0.2478 | -0.2487 | -0.2488 |
| 1.7737 | 1.7712 | 1.7711 |

Hiba=0.0077 > eps    Hiba=0.0003 > eps

---

Iter = 7

************** ITERÁCIÓ EREDMÉNYEK: ***********************

| x_Jacobi | x_Seidel | x_Egzakt |
|---|---|---|
| 0.7163 | 0.7164 | 0.7164 |
| -0.2482 | -0.2487 | -0.2488 |
| 1.7706 | 1.7711 | 1.7711 |

Hiba=0.0041 > eps    Hiba=0.0001 > eps

---

Iter = 8

************** ITERÁCIÓ EREDMÉNYEK: ***********************

| x_Jacobi | x_Seidel | x_Egzakt |
|---|---|---|
| 0.7166 | 0.7164 | 0.7164 |
| -0.2489 | -0.2488 | -0.2488 |
| 1.7710 | 1.7711 | 1.7711 |

Hiba= 0.0010 > eps    Hiba= 0.0000 < eps

=====================