Feladat: Adottak

$a := 44,6766 \approx x := \sqrt{1996}$ és

$b := 44,6654 \approx y := \sqrt{1995}$.

Határozza meg az alábbi műveletek közelítéseinek ~~abs~~ az abszolút és a relatív hibakorlátját!

$$a+b \approx x+y$$

$$a-b \approx x-y$$

$$a \cdot b \approx x \cdot y$$

$$\frac{a}{b} \approx \frac{x}{y}$$

adott $\frac{\delta a}{|a|} = 0,0001$

és

$$\frac{\delta(a/b)}{|a/b|} = 0,001$$

relatív hibakorlátok mellett!

MEGOLDÁS

Hib2

$$\delta(a+b) \approx \delta a + \delta b$$

$$\delta(a-b) \approx \delta a + \delta b$$

$$\delta(a \cdot b) \approx |a|\delta b + |b|\delta a, \text{ ha } |a| \gg \delta a \text{ és } |b| \gg \delta b$$

$$\delta\left(\frac{a}{b}\right) \approx \frac{|a|\cdot\delta b + |b|\delta a}{|b|^2}, \text{ ha } b \neq 0 \text{ és } |b| \gg \delta b.$$

$$\frac{\delta(a+b)}{|a+b|} \approx \max\left\{\frac{\delta a}{|a|}; \frac{\delta b}{|b|}\right\}$$

$$\frac{\delta(a-b)}{|a-b|} \approx \frac{\delta a + \delta b}{|a-b|}, \quad ab > 0$$

$$\frac{\delta(ab)}{|ab|} \approx \frac{\delta a}{|a|} + \frac{\delta b}{|b|}$$

$$\frac{\delta(a/b)}{|a/b|} \approx \frac{\delta a}{|a|} + \frac{\delta b}{|b|}$$

$$\frac{\delta a}{|a|} = 0{,}0001$$

$$\delta a = 0{,}0001 \cdot 44{,}6766 = 0{,}00446766$$

$$\frac{\delta(a/b)}{|a/b|} \approx \frac{\delta a}{|a|} + \frac{\delta b}{|b|} = 0{,}0001 + \frac{\delta b}{|b|} = 0{,}001$$

Hib3

$$\frac{\delta b}{|b|} = 0{,}001 - 0{,}0001 = 0{,}0009$$

$$\delta b = 0{,}0009 \cdot 44{,}6654 = \underline{0{,}04019886}$$

$$\delta(a+b) \approx 0{,}00446766 + 0{,}04019886 = \underline{0{,}04466652}$$

$$\delta(a-b) \approx \delta a + \delta b = \underline{0{,}04466652}$$

$$\delta(ab) \approx 44{,}6654 \cdot 0{,}00446766 + 44{,}6766 \cdot 0{,}04019886 = \underline{1{,}99549821}$$

$$\delta(a/b) \approx 0{,}001 \cdot \frac{44{,}6766}{44{,}6654} = \underline{0{,}001000251}$$

Relatív hibakorlátok:

$$\frac{\delta(a+b)}{|a+b|} = \cancel{0{,}0009}\ \max\{0{,}0001;\ 0{,}0009\} = \underline{0{,}0009}$$

$$\frac{\delta(a-b)}{|a-b|} \approx \frac{0{,}00446766 + 0{,}04019886}{0{,}0112} = 3{,}988082145 > 1$$

(Hob4)

$$\frac{\delta(ab)}{|ab|} \approx 0{,}0001 + 0{,}0009 = 0{,}001$$

Feladat: T.f. $\sqrt{2}$-t 10^{-8} $\boxed{\text{hibakorl}_8}$ hibakorláttal akarjuk kiszámítani. Melyik kifejezést lehet kisebb relatív hibával kiszámítani és hányszor kisebbel, az alábbi elméletileg azonos két kifejezés közül?

(i.) $\dfrac{1}{(1+\sqrt{2})^6}$ || (ii.) $99-70\sqrt{2}$.

Megoldás

(a) ~~Jelölje~~ $\sqrt{2} \approx a$ közelítés $\Longrightarrow$

$\delta a = 10^{-8}$.

~~l. $f(x)$~~

i.) l. $f(x) = (1+x)^{-6} \Longrightarrow$

$$f'(x) = -6(1+x)^{-7}$$

~~$\delta(f(a))$~~ $\dfrac{\delta(f(a))}{|f(a)|} \approx \dfrac{|f'(a)| \cdot \delta(a)}{|f(a)|}$ ~~$\approx$~~

$$\approx \frac{6\,\delta a}{|f(a)|} \approx \frac{6 * 10^{-8}}{1+\sqrt{2}}$$

[hiba_g]

$$\approx 2{,}485281 * 10^{-8}$$

(ii) $h(x) := 99 - 70 \cdot x \Longrightarrow$

$$h'(x) = -70$$

$$\frac{\delta(h(a))}{|h(a)|} \approx \frac{|h'(a)|\,\delta a}{|h(a)|} = \frac{70 * 10^{-8}}{99-70\sqrt{2}} \approx$$

$$\approx \underline{1{,}3860 * 10^{-4}}$$

Az első relatív hiba a kisebb. Most

~~Nézzük / mennyivel ki~~

Nézzük, hogy hányszor kisebb!!

$$\frac{\dfrac{\delta(h(a))}{|h(a)|}}{\dfrac{\delta(f(a))}{|f(a)|}} = \frac{\dfrac{70 \cdot \cancel{\delta a}}{99-70\sqrt{2}}}{\dfrac{6 \cdot \cancel{\delta a}}{1+\sqrt{2}}}$$

$$\approx 5576{,}6911$$

kb. 5577-szer!!

A fenti kérdést ~~a~~ 2 függvény a $\sqrt{2}$ pontbani kondícószámaiból is lehet megválaszolni.

$$c(f;\sqrt{2}) = \frac{|f'(\sqrt{2})|\cdot|\sqrt{2}|}{|f(\sqrt{2})|}$$

$$= \frac{6\cdot\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} \approx 3{,}51471862$$

$$\cancel{c(h;\sqrt{2})}$$

$$c(h;\sqrt{2}) = \frac{|h'(\sqrt{2})|\cdot\sqrt{2}}{99-70\sqrt{2}} \approx 19600{,}499982$$

$$\frac{c(h;\sqrt{2})}{c(f;\sqrt{2})} = \frac{19600{,}499982}{3{,}51471862}$$

$$\approx 5576{,}6911$$

Feladat. Határozza meg

$a = 1,21 * 3,65 + 9,81$

hibakorlátját, ha ~~$\delta(1,21$~~

$\delta(1,21) = \delta(3,65) = \delta(9,81) = 0,005!$

$\boxed{\text{MEGOLDÁS}}$

$\delta a \approx \delta(1,21 * 3,65) + \delta(9,81) \approx$

$\approx 1,21 \cdot \delta(3,65) + 3,65 \cdot \delta(1,21) + \delta(9,81) =$

$= 1,21 \cdot 0,005 + 3,65 \cdot 0,005 + 0,005$

$= 0,005(1,21 + 3,65 + 1) = 0,005 \cdot 5,86$

$= 0,0293$

H1

①

1. Feladat :

2 ellenállást műszerrel megmérték és az alábbi értékeket kapták: ~~R_1~~

$R_1 = 110.2 \pm 0.30\,\Omega$ és $R_2 = 65.6 \pm 0.2\,\Omega$.

A párhuzamos kapcsolással kapott eredő ellenállást az ismert $R_e = \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$ képlettel számolják.

Határozza meg az input adatok:

① - relatív hibakorlátjait
- az eredő ellenállás r_e közelítését,
- az eredő ellenállás ~~abszolút~~ δr_e abszolút hibakorlátját és annak ismeretében a $\dfrac{\delta r_e}{|r_e|}$ relatív hibakorlátot.

② ~~Számítsa az~~ a $\dfrac{\delta r_e}{|r_e|}$ relatív hibakorlátot és annak ismeretében a δr_e abszolút hibakorlátot! A számítások 4 tizedes pontossággal végezve!!!

Megoldás

①

$R_1 \approx r_1 = 110.2$; $\delta r_1 = 0.30$

$R_2 \approx r_2 = 65.6$; $\delta r_2 = 0,2$

$$\frac{\delta r_1}{|r_1|} = \frac{0.30}{110.2} = 0.00272$$

$$\frac{\delta r_2}{|r_2|} = \frac{0,2}{65.6} = 0.00305$$

$$r_e = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} = \frac{110.2 \times 65.6}{110.2 \times 65.6} = 41.1213$$

e

$$\delta r_e = \delta\left(\frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}\right) \approx \frac{|r_1 r_2|\,\delta(r_1 + r_2) + |r_1 + r_2|\,\delta(r_1 r_2)}{|r_1 + r_2|^2}$$

$$\delta(r_1 + r_2) \approx \delta r_1 + \delta_2 = 0.5$$

$$\delta(r_1 r_2) \approx |r_1|\,\delta r_2 + |r_2|\,\delta r_1 = 41.72$$

$$\delta r_e \approx \frac{|110.2 \times 65.6| \times 0.5 + |110.2 + 65.6| * 41.72}{(110.2 + 65.8)^2} = $$

$$\cancel{\approx 1.0949 \cdot 10^{-4}} \qquad = 0.3543$$

$$\cancel{\frac{\delta r_e}{|r_e|} \approx \frac{1.0949 \cdot 10^{-4}}{41.1213} =}$$

$$\frac{\delta r_e}{|r_e|} \approx \frac{0.3543}{41.1213} = 0.008616$$

2

$$\frac{\delta r_e}{|r_e|} \approx \frac{\delta(r_1 r_2)}{|r_1 r_2|} + \frac{\delta(r_1 + r_2)}{|r_1 + r_2|}$$

$$\frac{\delta(r_1 r_2)}{|r_1 r_2|} \approx \frac{\delta r_1}{|r_1|} + \frac{\delta r_2}{|r_2|} = 0.0057711$$

$$\frac{\delta(r_1 + r_2)}{|r_1 + r_2|} \approx \max\left\{\frac{\delta r_1}{|r_1|}; \frac{\delta r_2}{|r_2|}\right\} =$$

$$= \max\{0.0027223; 0.0030488\} = 0.0030488$$

$$\frac{\delta r_e}{|r_e|} \approx 0.0057711 + 0.0030488 = 0.0088199$$

$$\delta r_e \approx 0.0088199 \cdot |r_e| = 0.36269$$

Meg: Az eltérések a 2 számítás ~~között azért van,~~ során különböző elhanyagolások és eltérő becslések miatt keletkeztek.