1. Mintafeladat: Az $f(x)$ függvényről a következő táblázatot ismerjük:

x	-1	1	3	5
$f(x)$	-2	0	-2	4

Határozza meg a Lagrange interpolációt Newton I. formulával! A számításokat 4-tízedes pontossággal végezze!

MEGOLDÁS

A táblázat fölé írjuk az alappontok jelölését az alábbi módon:

	x_1	x_2	x_3	x_4
x	-1	1	3	5
$f(x)$	-2	0	-2	4

A megadott alappontok ekvidisztánsak, mert $\min\{x_2-x_1;\ x_3-x_2;\ x_4-x_3\} = \max\{x_2-x_1;\ x_3-x_2;\ x_4-x_3\} = 2$, így használható a Newton I. formula a Lagrange interpolációhoz. Az eredő lépésköz pedig $h = 2$.
A differenciatáblázat készítése:

-1.0000	$\boxed{-2.0000}$			
		$\boxed{2.0000}$		
1.0000	0.0000		$\boxed{-4.0000}$	
		-2.0000		$\boxed{12.0000}$
3.0000	-2.0000		8.0000	
		6.0000		
5.0000	4.0000			

Ekkor keresendő polinom az alábbi lineáris kombináció, melyet a ferdesor elemeivel képezzük:

$$p(x) = (-2) * \binom{t}{0} + 2 * \binom{t}{1} + (-4) * \binom{t}{2} + 12 * \binom{t}{3}$$

ahol a t az alábbi 1. fokú polinomot:

$$t = \frac{x - x_1}{h} = 0.5000 * x + 0.5000$$

$$\binom{t}{0} = 1$$

$$\binom{t}{1} = 0.5000 * x + 0.5000$$

$$\binom{t}{2} = \frac{(0.5000 * x + 0.5000) * (0.5000 * x + 0.5000 - 1)}{2!} = 0.125x^2 - 0.125$$

$$\binom{t}{3} = \frac{(0.5000 * x + 0.5000) * (0.5000 * x + 0.5000 - 1) * (0.5000 * x + 0.5000 - 2)}{3!} =$$

$$= 0.02083x^3 - 0.0625x^2 - 0.02083x + 0.0625$$

A fenti lineáris kombináció alapján a polinom együtthatóit az alábbi módon számítjuk ki:
$x^3:\quad 0.0208 * 12 = 0.2496$
$x^2:\quad (-0.0625) * 12 + 0.125 * (-4) = -1.2500$
$x:\quad (-0.0208) * 12 + 1 = 0.75040$
$c:\quad 0.0625 * 12 + (-4) * (-0.125) + 0.5000 * 2 + (-2) * 1 = 0.25000$
A keresett Lagrange polinom:

$$p(x) = 0.2496 * x^3 - 1.2500 * x^2 + 0.7504 * x + 0.2500$$

2. Mintafeladat: Legyen adott az alábbi függvénytáblázat.

x	-4	-2	-1	1	2
$f(x)$	-4	20	2	-2	4
$f'(x)$	-4	-2	-2	-1	8

Határozza meg az $S_3(x)$ elsőrendű köbös Splinet!

MEGOLDÁS

A táblázat fölé írjuk az alappontok jelölését a következőképpen:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x	-4	-2	-1	1	2
$f(x)$	-4	20	2	-2	4
$f'(x)$	-4	-2	-2	-1	8

Az $S_3(x)$ elsőrendű köbös Spline egy legfeljebb harmadfokú polinom, mely a harmadik részintervallumban értelmezett ($S_3 : [0, 1] \to \mathbb{R}$). Általános alakja:

$$S_3(x) = f(x_3)\,U_{3,2}(x) + f(x_4)\,U_{4,1}(x) + f'(x_3)\,V_{3,2}(x) + f'(x_4)\,V_{4,1}(x)\,.$$

Rendre előállítjuk a két-két U-típusú és V-típusú bázis függvényeket. Mivel ezek legfeljebb harmadfokú polinomok és a deriváltjátjuk is nagy szerepet játszik az S_3 definiáló képletben, ezért felírjuk a 3-adfokú polinom általános alakját és x szerinti deriváltját:

$$\omega(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3$$

$$\omega'(x) = a_2 + 2a_3 x + 3a_4 x^2$$

Mivel az $U_{3,2}$, $U_{4,1}$, $V_{3,2}$, $V_{4,1}$ bázis függvények mindegyike legfeljebb harmadfokú polinom, ezért mindegyik a fenti alakú. Az a_1, a_2, a_3, és a_4 ismeretlen együtthatókat kell meghatározni az x_3, x_4 alapontok, az $f(x_3)$, $f(x_4)$ függvényértékük és az $f'(x_3)$, $f'(x_4)$ deriváltértékük együttes felhasználásával.
A paraméteres egyenletek (vagy bázis függvényt definiáló egyenletek):

$$\begin{array}{r|r|r|r}
U_{3,2}(-1)=1 & U_{4,1}(-1)=0 & V_{3,2}(-1)=0 & V_{4,1}(-1)=0 \\
U_{3,2}(1)=0 & U_{4,1}(1)=1 & V_{3,2}(1)=0 & V_{4,1}(1)=0 \\
U'_{3,2}(-1)=0 & U'_{4,1}(-1)=0 & V'_{3,2}(-1)=1 & V'_{4,1}(-1)=0 \\
U'_{3,2}(1)=0 & U'_{4,1}(1)=0 & V'_{3,2}(1)=0 & V'_{4,1}(1)=1
\end{array}$$

Mivel az a_1, a_2, a_3, és a_4 betűkkel jelöltük az $U_{3,2}$, $U_{4,1}$, $V_{3,2}$, $V_{4,1}$ bázis függvények együtthatóit, a paraméteres egyenletek az alábbi 4 lineáris egyenletrendszerhez vezetnek:

$$\begin{array}{rcr|r|r|r}
1*a_1 - 1*a_2 + 1*a_3 - 1*a_4 & = & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1*a_1 + 1*a_2 + 1*a_3 + 1*a_4 & = & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0*a_1 + 1*a_2 - 2*a_3 + 3*a_4 & = & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0*a_1 + 1*a_2 + 2*a_3 + 3*a_4 & = & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}$$

ahol az $U_{3,2}$-re, $U_{4,1}$-re, $V_{3,2}$-re és a $V_{4,1}$-re vonatkozó LER jobboldalán rendre 1., 2., 3. és 4. egységvektor áll a paraméteres egyenleteknek megfelelően. Észrevehető, hogy a 4 lineáris egyenletrendszert, melynek közös együtthatómátrixa

$$X = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix},$$

a 4-dimenziós i-edik egységvektorokra oldjuk meg. Ez azt jelenti, hogy az X együtthatómátrix inverzét kell kiszámítani, és ezt pedig Gauss-Jordan eljárással megvalósítjuk. Megjegyzem, hogy az X^{-1} inverz mátrix első, második, harmadik és negyedik oszlopa tartalmazza rendre $U_{3,2}$, $U_{4,1}$, $V_{3,2}$ és $V_{4,1}$ polinomok együtthatóit.
A kiszámított inverz:

$$X^{-1} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0.25 & -0.25 \\ -0.75 & 0.75 & -0.25 & -0.25 \\ 0 & 0 & -0.25 & 0.25 \\ 0.25 & -0.25 & 0.25 & 0.25 \end{bmatrix}.$$

Az inverz mátrix első, második, harmadik ill. negyedik sora a polinomok konstans tagjait, elsőfokú, másodfokú, és harmadfokú monomok együtthatóit tartalmazza.

Felírjuk a bázis függvényeket:

$U_{3,2}(x) = 0.5 - 0.75x + 0.25x^3$
$U_{4,1}(x) = 0.50.75x - 0.25x^3$
$V_{3,2}(x) = 0.25 - 0.25x - 0.25x^2 + 0.25x^3$
$V_{4,1}(x) = -0.25 - 0.25x + 0.25x^2 + 0.25x^3$

A 3. intervallumban érvényes elsőrendű köbös Spline együtthatói előállításához végezzük az alábbi mátrixszorzást.

$$X^{-1}y = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0.25 & -0.25 \\ -0.75 & 0.75 & -0.25 & -0.25 \\ 0 & 0 & -0.25 & 0.25 \\ 0.25 & -0.25 & 0.25 & 0.25 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.25 \\ -2.25 \\ 0.25 \\ 0.25 \end{bmatrix}$$

ahol

$$y := \begin{bmatrix} f(x_3) \\ f(x_4) \\ f'(x_3) \\ f'(x_4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

A keresett elsőrendű köbös Spline:

$$S_3(x) = -0.25 - 2.25x + 0.25x^2 + 0.25x^3.$$

Feladat

1. Legyen adott az alábbi függvénytáblázat.

x	-4	-2	-1	1	2
$f(x)$	-4	20	2	-2	4
$f'(x)$	-4	-2	-2	-1	8

Határozza meg az $S_1(x)$, $S_2(x)$ és $S_4(x)$ elsőrendű köbös Spline függvényeket!

2. Legyen adott az alábbi függvénytáblázat.

x	-2.5	-2	-1.5	-1	-0.5	1	2	4
$f(x)$	-4	20	2	-2	4	-4	2	5
$f'(x)$	-4	-2	-2	-1	8	5	-4	10

Határozza meg minden részintervallumra érvényes elsőrendű köbös Spline függvényt!

3. Legyen adott az alábbi három függvénytáblázat.

x	-5	-3	-1	1
$f(x)$	-10	10	4	-20

;

x	-7.5	-3.5	0.5	3.5
$f(x)$	20	25	-40	61

;

x	10	20	30	40
$f(x)$	100	20	-10	40

Határozza meg a Lagrange interpolációt Newton I. formulával, ha lehetséges! A számításokat 4-tízedes pontossággal végezze!

4. Határozza meg az alábbi mátrix valamennyi sajátértékét és a hozzájuk tartozó sajátvektort!

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \end{bmatrix}.$$

5. Adott az alábbi lineáris egyenletrendszer és vektor

$$\begin{bmatrix} 100 & -2 & 1 \\ 1 & -100 & 2 \\ -2 & 2 & 100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200 \\ 300 \\ 400 \end{bmatrix}; \qquad x^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Határozza meg az $\|y-z\|_\infty + \|y+z\|_2 - \|y+z\|_1$ számértéket, ahol $y \in \mathbb{R}^3$ és $z \in \mathbb{R}^3$ rendre a megoldásnak a Jacobi iterációból és Seidel iterációból eredő harmadik közelítését jelöli. Mindkét iteráció esetében használja a megadott $x^{(0)}$ vektort kezdő közelítésnek!

6. Az $f(x)$ függvényről a következő táblázatot ismerjük:

x	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6
$f(x)$	1.42	1.45	1.50	1.42	1.31	1.18	1.15

Adjon minél pontosabb közelítést másodfokú Lagrange-interpolációval az $f(1.33)$ értékére!
(Mgjegyzés: A függvénytáblázat szerinti alappontok közül szükséges kiválasztani azt a három pontot, mely 1.33-höz a legközelebb!!!)