1. Mintafeladat: Az $f(x)$ függvényről a következő táblázatot ismerjük:

x	-2	-1	1	3
f(x)	2	-2	-4	4

Adjon közelítést az $f(1.75)$ függvényértékre! Használja fel a Lagrange-féle alapfüggvényeket!

MEGOLDÁS

	x_1	x_2	x_3	x_4
x	-2	-1	1	3
f(x)	2	-2	-4	4

(1)

Mivel 4 alappont adott ezért pontosan egy $p(x) = a*x^3+b*x^2+c*x+d$ legfeljebb harmaddokú polinom létezik, melyre igaz, hogy $f(x_i) = p(x_i)$, $i = 1:4$ (a Lagrange interpoláció tétel értelmében). Az együtthatók előállítását több lépésben hajtjuk végre. Elöször meghatározzuk rendre az $L_1(x)$, $L_2(x)$, $L_3(x)$ és $L_4(x)$ Lagrange-féle alapfüggvényeket, melyek harmadfokú polinomok, azaz

$$L_1(x) = \frac{x-x_2}{x_1-x_2} * \frac{x-x_3}{x_1-x_3} * \frac{x-x_4}{x_1-x_4}$$
$$L_2(x) = \frac{x-x_1}{x_2-x_1} * \frac{x-x_3}{x_2-x_3} * \frac{x-x_4}{x_2-x_4}$$
$$L_3(x) = \frac{x-x_1}{x_3-x_1} * \frac{x-x_2}{x_3-x_2} * \frac{x-x_4}{x_3-x_4}$$
$$L_4(x) = \frac{x-x_1}{x_4-x_1} * \frac{x-x_2}{x_4-x_2} * \frac{x-x_3}{x_4-x_3}$$

Az alappontokat behelyettesítve és a műveleteket végrehajtva kapjuk, hogy

$$L_1(x) = -0.0667 * x^3 + 0.2000 * x^2 + 0.0667 * x - 0.2000$$
$$L_2(x) = 0.1250 * x^3 - 0.2500 * x^2 - 0.6250 * x + 0.7500$$
$$L_3(x) = -0.0833 * x^3 + 0.0000 * x^2 + 0.5833 * x + 0.5000$$
$$L_4(x) = 0.0250 * x^3 + 0.0500 * x^2 - 0.0250 * x - 0.0500$$

A

$$p(x) = f(x_1) * L_1(x) + f(x_2) * L_2(x) + f(x_3) * L_3(x) + f(x_4) * L_4(x)$$

képlet felhasználsával határozhatjuk meg a $p(x)$ polinom együtthatóit. Tekintsük $f := [2, -2, -4, 4]^T$ vektort a függvénytáblából és alkossuk az alábbi V mátrixot.

$$V = \begin{bmatrix} -0.0667 & 0.2000 & 0.0667 & -0.2000 \\ 0.1250 & -0.2500 & -0.6250 & 0.7500 \\ -0.0833 & 0.0000 & 0.5833 & 0.5000 \\ 0.0250 & 0.0500 & -0.0250 & -0.0500 \end{bmatrix}$$

ahol $L_1(x)$ polinom együtthatói alkotják a V mátrix első sorát, a 2., a 3. és a 4. sorát pedig rendre az $L_2(x)$ együtthatói, az $L_3(x)$ együtthatói és az $L_4(x)$ együtthatói alkotják. Majd szorozzuk a V mátrixot balról az f vektorral

$$f^T * V = [2,\ -2,\ -4,\ 4] * \begin{bmatrix} -0.0667 & 0.2000 & 0.0667 & -0.2000 \\ 0.1250 & -0.2500 & -0.6250 & 0.7500 \\ -0.0833 & 0.0000 & 0.5833 & 0.5000 \\ 0.0250 & 0.0500 & -0.0250 & -0.0500 \end{bmatrix} = [0.0500;\ 1.1000;\ -1.0500;\ -4.1000],$$

ami tartalmazza a $p(x)$ Lagrange interpoláció együtthatóit, azaz rendre:
x^3 monom együtthatója: 0.0500
x^2 monom együtthatója: 1.1000
x monom együtthatója: -1.0500
konst: -4.1000.
Okvetlenül felírjük a keresett polinomot !!!

$$\underline{p(x) = 0.0500 * x^3 + 1.1000 * x^2 - 1.0500 * x - 4.1000}$$

És végül: $\underline{f(1.7500) \approx p(1.7500) = -2.3008}$

2. Mintafeladat: Határozza meg az $f(x) = 4^x$ függvényt a $-1; 0; 1; 2$ pontokban interpoláló $p(x)$ polinomot. Ennek ismeretében adjon közelítést az $\sqrt[4]{4^5}$ függvényértékre és az $f(x)$ függvény görbéje alatti területre az $[-1,\ 2]$ intervallumon! Az interpolációs polinom meghatározására használja a Newton-féle osztott differenciákra vonatkozó ismereteiket!

MEGOLDÁS

A Newton-féle osztott differenciáltáblázat

x	$[x_1]_f$	$[x_1, x_2]_f$	$[x_1, x_2, x_3]_f$	$[x_1, x_2, x_3, x_4]_f$
-1.0000	$\boxed{0.25}$			
		$\frac{1-0.25}{0-(-1)} = \boxed{0.75}$		
0	1		$\frac{3-0.75}{1-(-1)} = \boxed{1.125}$	
		$\frac{4-1}{1-0} = 3$		$\frac{4.5-1.125}{2-(-1)} = \boxed{1.125}$
1	4		$\frac{12-3}{2-0} = 4.5$	
		$\frac{16-4}{2-1} = 12$		
2	16			

$$\begin{aligned} p(x) &= 0.25 \\ &+ 0.75 * (x - (-1)) \\ &+ 1.125 * (x - (-1)) * (x - 0) \\ &+ 1.125 * (x - (-1)) * (x - 0) * (x - 1) \end{aligned}$$

Egyszerűsítés után adódik:

$$\begin{aligned} p(x) &= 0.25 \\ &+ 0.75 * (x + 1) \\ &+ 1.125 * \left(x^2 + x\right) \\ &+ 1.125 * \left(x^3 - x\right) \end{aligned}$$

vagyis

$$\begin{aligned} p(x) &= 0.25 \\ &+ 0.75 * (x + 1) \\ &+ 1.125 * \left(x^2 + x + 0\right) \\ &+ 1.125 * \left(x^3 + 0 * x^2 - x + 0\right) \end{aligned}$$

A következő lépésben kiszámítjuk a $p(x)$ polinom együtthatóit:
x^3: $1.125 * 1 = 1.125$
x^2: $1.125 * 0 + 1.125 * 1 = 1.125$
x: $1.125 * (-1) + 1.125 * 1 + 0.75 * 1 = 0.75$
konst: $1.125 * 0 + 1.125 * 0 + 0.75 * 1 + 0.25 = 1.$
A polinom alakja a következő:

$$\underline{p(x) = 1.1250 * x^3 + 1.1250 * x^2 + 0.7500 * x + 1.0000.}$$

Mivel az adott intervallumban $f(x) \approx p(x)$ közelítés érvényes, ezért

$$\sqrt[4]{4^5} = 4^{5/4} = f(5/4) \approx p(5/4) = p(1.2500) = 5.8926.$$

$$I := \int_{-1}^{2} f(x)\,dx \approx \int_{-1}^{2} p(x)\,dx = \left[\tfrac{1.125}{4}x^4 + \tfrac{1.125}{3}x^3 + \tfrac{0.75}{2}x^2 + x\right]_{-1}^{2} = 11.7188.$$

Feladatok

1. Oldja meg a

$$\begin{bmatrix} 10 & 5 & -1 \\ 1 & 50 & 2 \\ 3 & -1 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -36 \\ 9 \\ 111 \end{bmatrix}$$

lineáris egyenletrendszert Gauss eliminációval, teljes főelemkiválasztással!

2. Határozza meg az alábbi mátrix valamennyi sajátértékét és a hozzájuk tartozó sajátvektort! Elenőrizze, hogy a kapott vektorok valóban sajátvektorok!

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \end{bmatrix}.$$

3. Adottak az alábbi lineáris egyenletrendszer és vektor

$$\begin{bmatrix} 100 & -2 & 1 \\ 1 & -100 & 2 \\ -2 & 2 & 100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200 \\ 300 \\ 400 \end{bmatrix}; \qquad x^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Határozza meg az $y + z \in \mathbb{R}^3$ vektort, ahol $y \in \mathbb{R}^3$ és $z \in \mathbb{R}^3$ rendre a megoldásnak a Jacobi iterációból és Seidel iterációból eredő második közelítését jelöli. Mindkét iteráció esetben használja a megadott $x^{(0)}$ vektort kezdő közelítésnek!

4. Adott az alábbi függvénytáblázat:

x	0	1	2	3
$f(x)$	1	0	1	6

Határozza meg a táblázathoz illeskedő Lagrange interpolációs polinomot Newton I. formulával! Ennek ismeretében állítsa elő az $I = \int_0^3 f(x)\,dx$ integrál közelítő értékét!

5. Határozza meg a $\|z\|_2$ értéket, ahol a $z \in \mathbb{R}^3$ vektor az alábbi lineáris egyenletrendszer Cholesky-módszerrel való megoldása

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ 43 \\ 55 \end{bmatrix}$$

6. Adottak az alábbi lineáris egyenletrendszer és vektor

$$\begin{bmatrix} -100 & -2 & 1 \\ 1 & 100 & 2 \\ -2 & 2 & -100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200 \\ 300 \\ 400 \end{bmatrix}; \qquad x^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Határozza meg az $y+z \in \mathbb{R}^3$ összegvektort, ahol $y \in \mathbb{R}^3$ és $z \in \mathbb{R}^3$ rendre a megoldásnak a Jacobi iterációból és Seidel iterációból eredő második közelítését jelöli. Mindkét iteráció esetben használja a megadott $x^{(0)}$ vektort kezdő közelítésnek!

7. Adott az alábbi lineáris egyenletrendszer és a P permutáció mátrix.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 40 \\ 50 \end{bmatrix}; \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A permutáció mátrix ismeretében határozza meg

a.) az egyenletrendszer megoldását LU-módszerrel II-es algoritmussal,

b.) az $\|x\|_2 + \|A\|_1$ értéket, ahol x és A rendre a lineáris egyenletrendszer megoldását és együttható mátrixát jelölik!

8. Adott az alábbi függvénytáblázat:

x	-1	$-0,75$	$-0,5$	$-0,25$	0	$0,25$	$0,5$	$0,75$	1
$f(x)$	$-0,1$	$0,3$	$0,05$	$0,8$	$0,9$	$-0,65$	$0,45$	$0,056$	$0,85$

Határozza meg az $|A-B|$ értéket, ahol az A az $I := \int_{-1}^{1} f(x)\,dx$ integrálnak az összetett érintő formulával és a B az I integrálnak az összetett Simpson formulával való közelítését jelölik! Mindkét közelítéshez használja a $h = 0,5$ értéket lépésköznek.

9. Határozza meg az alábbi mátrix valamennyi sajátértékét és a domináns sajátértéknek második közelítését hatvány módszerrel. A rendelkezésre álló kezdő közelítések: $q_0 = 0$ és $v^{(0)} = [1,1,1]^T$. A mátrix sorai rendre a következők: [11, 11, 0]; [11, 11, 11]; [0, 11, 11].

10. Adottak az $\varepsilon = 0.005$ hibakorlát, az $f(x) = 0$ nemlineáris egyenlet, ahol $f(x) = x^4 - e^{-x-1} + \ln\left(\frac{1}{x+1}\right)$, valamint $[-1.1; -0.41]$, $[0.51; 1.1]$ intervallumok. Mindegyik intervallumban döntse el, hogy

a.) van-e megoldása az egyenletnek,

b.) alkalmazható-e a fixpontos iteráció, valamint a Newton módszer?

c.) Határozza a gyök közelítését azzal a módszerrel, mely alkalmazható. A fixpont iteráció esetén induljon ki az intervallum bármely beslő pontjából!