1. Mintafeladat: Adott

x	0.01	0.04	0.09	0.16
$f(x)$	2	4	-4	2

függvénytáblázat. Illesszen a $g(x) = a_1 g_0(x) + a_2 g_1(x)$ függvényt a táblázathoz, ha $g_0(x) = \sqrt{x}$ és $g_1(x) = e^x$ alkotják a bázisfüggvényeket! Használja a legkisebb négyzetek módszerét, a számításokat 4-tízedes pontossággal végezve!

MEGOLDÁS

Az alapfeladat: $f(x) \approx g(x)$, vagyis az $f(x)$ függvényt közelítjük a $g(x)$ függvénnyel. Mivel több adatunk van, mint ahány egütthatő, ezért legkisebb négyzetek módszerét használjuk fel a kívánt approximációhoz.
Jelölje $y := f(x)$. Helyettesítsük be az alappontokat a bázisfüggvényekbe. Így két vektort kapunk eredményül, melyet egymásmellé oszlopba írjuk. Bővítjük ezt a táblázatot a bal szegélyen az alappontokból álló oszlopvektorral, a jobb szegélyen az $f(x)$ függvényértékeiből álló oszlopvektorral és a felső szegélyen pedig a bázisfüggvények fölé felírjuk a megfelelő együtthatókat. Ekkor az alábbi táblázathoz jutunk.

	a_1	a_2	
x	$g_0(x)$	$g_1(x)$	$f(x) = y$
0.01	0.1	1.0101	$-2 = y_1$
0.04	0.2	1.0408	$4 = y_2$
0.09	0.3	1.0942	$-4 = y_3$
0.16	0.4	1.1735	$2 = y_4$

Azért kell így járnunk, mert a $g(x) = a_1 g_0(x) + a_2 g_1(x)$ függvény a_1 és a_2 együtthatói nem ismertek és közelítően tudjuk csak kiszámítani. Ha sikerült, ekkor $f(x) \approx g(x)$ approximációhoz jutunk. A fenti táblázat úgy hoztuk létre, hogy az alappontokat a $g(x)$ függvénybe behelyettesítve $X * a = y + \epsilon$ egyenletrendszert kapunk, ahol ϵ egy 4 elemű véletlen hibavektor (melynek négyzetösszegét minimálizáljuk) és

$$X = \begin{bmatrix} 0.1 & 1.0101 \\ 0.2 & 1.0408 \\ 0.3 & 1.0942 \\ 0.4 & 1.1735 \end{bmatrix}; \quad y = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}; \quad a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

A legkisebb négyzetek módszeréhez meg kell oldanunk $X^T X a = X^T y$ linearis egyenletrendszert, ahol

$$X^T X = \begin{bmatrix} 0.3 & 1.1068 \\ 1.1068 & 4.6778 \end{bmatrix}; \quad X^T y = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.1135 \end{bmatrix}$$

Majd felírjuk az ún. normálegyenletet (ami lényegében egy lineáris egyenletrendszer):

$$\begin{aligned} 0.3a_1 + 1.1068a_2 &= 0.2 \\ 1.1068a_1 + 4.6778a_2 &= 0.1135 \end{aligned}$$

Az egyenletrendszer megoldása: $a = [4.5417; -1.0503]^T$.
Felírjuk az approximációs függvényt:

$$\boxed{g(x) = 4.5417\sqrt{x} - 1.0503e^x.}$$

2. Mintafeladat: Az alábbi függvénytáblazathoz határozza meg $g(x) = a_1 + a_2 x + a_3\sqrt{x}$ approximációs függvényt a legkisebb négyzetek módszerével!

x	0.25	0.36	0.49	0.64
$f(x)$	-1	2	-2	4

MEGOLDÁS

Az approximációs függvényt definiáló bázis függvények a következők:

$$g_0(x) = 1; \quad g_1(x) = x; \quad g_2(x) = \sqrt{x}.$$

	a_1	a_2	a_3	
x	$g_0(x)$	g_1	$g_2(x)$	$f(x) = y$
0.25	1	0.25	0.5	$-1 = y_1$
0.36	1	0.36	0.6	$2 = y_2$
0.49	1	0.49	0.7	$-2 = y_3$
0.64	1	0.64	0.8	$4 = y_4$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0.25 & 0.5 \\ 1 & 0.36 & 0.6 \\ 1 & 0.49 & 0.7 \\ 1 & 0.64 & 0.8 \end{bmatrix}; \quad y = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}; \quad a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

Képezzük $X^T X$ mátrixot és $X^T y$ vektort:

$$X^T X = \begin{bmatrix} 4 & 1.74 & 2.6 \\ 1.74 & 0.8418 & 1.196 \\ 2.6 & 1.196 & 1.74 \end{bmatrix}; \quad X^T y = \begin{bmatrix} 3 \\ 2.05 \\ 2.5 \end{bmatrix}$$

A normálegyenletet:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 4a_1 & + & 1.74a_2 & + & 2.6a_3 & = & 3 \\ 1.74a_1 & + & 0.8418a_2 & + & 1.196a_3 & = & 2.05 \\ 2.6a_1 & + & 1.196a_2 & + & 1.74a_3 & = & 2.5 \end{array}$$

A megoldás: $a = [24.35; 75; -86.5]^T$. Így a keresett approximációs függvény:

$$\boxed{g(x) = 24.35 + 75x - 86.5\sqrt{x}.}$$

3. Mintafeladat: Határozza meg az alábbi pontonkon átmenő Hermite interpolációs polinomot!

x	-1	1
$f(x)$	-2	-4
$f'(x)$	-2	-4

MEGOLDÁS

Tudjuk, hogy n alappont esetén a Hermite interpolációs polinom legfeljebb $2n-1$-edfokú. Ezért $n=2$ alappontszám esetén a keresett $p(x)$ Hermite interpolációs polinom legfeljebb 3-adfokú, melynek általános alakja és deriváltja

$$\begin{array}{rcl} p(x) &=& a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 \\ p'(x) &=& a_2 + 2a_3 x + 3a_4 x^2 \end{array}$$

és teljesíti a következő feltételeket (ún. paraméteres egyenleteket):

$$\begin{array}{rcl} p(-1) &=& -2 \\ p(1) &=& -4 \\ p'(-1) &=& -2 \\ p'(1) &=& -4 \end{array}$$

Helyettesítsük be az alappontokat $p(x)$ és $p'(x)$ polinomokba. Akkor a paraméteres egyenletek alapján hozzuk létre a következő lineáris egyenletrendszert:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} a_1 &-& a_2 &+& a_3 &-& a_4 &=& -2 \\ a_1 &+& a_2 &+& a_3 &+& a_4 &=& -4 \\ && a_2 &-& 2a_3 &+& 3a_4 &=& -2 \\ && a_2 &+& 2a_3 &+& 3a_4 &=& -4 \end{array}$$

A megoldás pedig: $a = [-2.5; 0; -0.5; -1]^T$. Így a keresett polinom:

$$\boxed{p(x) = -2.5 - 0.5x^2 - x^3} \quad ; \quad \boxed{p'(x) = -x - 3x^2}$$

Feladat

1. Az alábbi függvénytáblazatokhoz

x	25	36	49	64	83
$f(x)$	-0.4	0.9	-0.9	0.5	-1.4

;

x	2.5	3.6	4.9	6.4	8.3
$f(x)$	-0.1	0.2	-0.2	0.4	1.4

   határozza meg
   $g(x) = a_1 + a_2\cos(3x) + a_3e^{-x}$,
   $g(x) = a_1\sqrt[5]{x+3} + a_2\sin(x) + a_3e^{-x}$,
   $g(x) = a_1 + a_2\cos(3x) + a_3\ln(x+1)$
   approximációs függvényt a legkisebb négyzetek módszerével!

2. Az alábbi táblázat esetén, határozza a 6 részintervallum mindenegyikéhez a Hermite interpolációs polinomot!

x	-4	-2	0	2	4	5	8
$f(x)$	-2	-4	1	-2	4	-5	5
$f'(x)$	-10	4	3	-5	6	1	-7