# Képlettár Numerikus Módszerek című tárgyból

Agbeko Kwami Nutefe és Nagy Ferenc
Matematikai Intézet
Miskolci Egyetem

2015.

## 1. Gauss-módszer algoritmusa:

**I. (eliminációs) fázis:**

**for** $k = 1 : n-1$
  **for** $i = k+1 : n$
    $\lambda_{ik} = \frac{a_{ik}}{a_{kk}}$
    $b_i = b_i - \lambda_{ik} b_k$
    **for** $j = k+1 : n$
    $a_{ij} = a_{ij} - \lambda_{ik} * a_{kj}$
    **end**
  **end**
**end**

**II. Visszahelyettesítő algoritmus felső háromszög mátrixú l.e.r. megoldásához**

$x_n = b_n / a_{nn}$
**for** $i = n-1 : -1 : 1$
  $x_i = \frac{1}{a_{ii}} \left( b_i - \sum\limits_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j \right)$
**end**

**III. Visszahelyettesítő algoritmus alsó háromszög mátrixú l.e.r. megoldásához**

$x_1 = b_1 / a_{11}$
**for** $i = 2 : n$
  $x_i = \frac{1}{a_{ii}} \left( b_i - \sum\limits_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j \right)$
**end**

## 2. Gauss-Jordan eljárás:

**for** $k = 1 : n$
  **for** $i = 1 : n, \quad i \neq k$
    $\lambda_{ik} = a_{ik}/a_{kk}$
    $b_i = b_i - \lambda_{ik} b_k$
    **for** $j = k : n$
    $a_{ij} = a_{ij} - \lambda_{ik} * a_{kj}$
    **end**
  **end**
**end**

## 3. LU-felbontás

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj} \qquad (i \leq j)$$

$$l_{ij} = \frac{1}{u_{jj}} \left( a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj} \right) \qquad (i > j)$$

## 4. A Cholesky-felbontás algoritmusa:

### 4.1. Első lehetőség

$$\lambda_{kk} = \left( a_{kk} - \sum_{j=1}^{k-1} \lambda_{kj}^2 \right)^{1/2}$$

$$\lambda_{ik} = \frac{1}{\lambda_{kk}} \left( a_{ik} - \sum_{j=1}^{k-1} \lambda_{ij} \lambda_{kj} \right)$$

$k = 1 : n$ és $i = k + 1 : n$

### 4.2. Gauss eliminációs módszer esete

Legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ egy szimmetrikus és pozitív definit mátrix.

1. $A \xrightarrow{\text{G.e.}} U \longrightarrow \widetilde{U} \longrightarrow \widetilde{U}^T$
2. $e_i^T \widetilde{U} = \frac{1}{\sqrt{u_{ii}}} e_i^T U, \quad i = 1 : n$

## 5. LU-módszer algoritmus (I.)

Legyen $Ax = b$ ($A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ nemszinguláris mátrix, $b \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$) lineáris egyenletrendszer.

1. Meghatározzuk az $A = LU$-felbontást
2. Megoldjuk $Ly = b$ lineáris egyenletrendszert alkalmas visszahelyettesítő algoritmussal.
3. Megoldjuk $Ux = y$ lineáris egyenletrendszert alkalmas visszahelyettesítő algoritmussal.

## 6. LU-módszer algoritmus (II.)

Legyen $Ax = b$ ($A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ nemszinguláris mátrix, $b \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$) lineáris egyenletrendszer. Akkor $PA$ mátrixnak létezik $LU$-felbontása, valamilyen $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ permutáció mátrix esetén.

1. Meghatározzuk a $PA = LU$-felbontást
2. Megoldjuk $Ly = Pb$ lineáris egyenletrendszert alkalmas visszahelyettesítő algoritmussal.
3. Megoldjuk $Ux = y$ lineáris egyenletrendszert alkalmas visszahelyettesítő algoritmussal.

## 7. Cholesky-módszer algoritmus

Legyen $Ax = b$ ($A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ szimmetrikus és pozitív definit mátrix, $b \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$) l.e.r.

1. Meghatározzuk az $A = \widetilde{U}^T\widetilde{U}$ Cholesky-felbontást.
2. Megoldjuk $\widetilde{U}^T y = b$ lineáris egyenletrendszert alkalmas visszahelyettesítő algoritmussal.
3. Megoldjuk $\widetilde{U}x = y$ lineáris egyenletrendszert alkalmas visszahelyettesítő algoritmussal.

## 8. Lineáris egyenletrendszer megoldása Jacobi iterációval

Az $Ax = b$ ($A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ nemszinguláris mátrix, $b \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$) l.e.r. helyett tekintsük az $x = Cx + d$ iteratív lineáris egyenletrendszert, ahol a $C$ mátrix $i$-edik sora és a $d$ vektor $i$-edik eleme:

$$e_i^T C = \left[\frac{a_{i1}}{-a_{ii}}, \cdots, \frac{a_{i,i-1}}{-a_{ii}}, 0, \frac{a_{i,i+1}}{-a_{ii}}, \cdots, \frac{a_{in}}{-a_{ii}}\right] \quad \text{és} \quad d_i = \frac{b_i}{a_{ii}}$$

$i = 1 : n.$

$\forall \quad x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ kezdő közelítés esetén tegyük fel, hogy az $x^{(k)}$ $k$-adik közelítést már kiszámítottuk. Akkor az $x^{(k+1)}$ $(k+1)$-edik közelítést az alábbi módon határozzuk meg:

$$x_i^{(k+1)} = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j^{(k)} + d_i, \quad i = 1 : n, \quad k = 0, 1, 2, 3, \cdots$$

Hibaképlet:

$$h_{k+1} := \frac{\|C\|_\infty}{1 - \|C\|_\infty} \left\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\right\|_\infty < \varepsilon \longrightarrow \text{STOP},$$

ha $\|C\|_\infty < 1$.

# 9. Lineáris egyenletrendszer megoldása Gauss-Seidel iterációval

Az $Ax = b$ ($A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ nemszinguláris mátrix, $b \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$) l.e.r. helyett tekintsük az $x = Cx + d$ iteratív l.e.r.-t, ahol a $C$ mátrix $i$-edik sora és a $d$ vektor $i$-edik eleme:

$e_i^T C = \left[\frac{a_{i1}}{-a_{ii}}, \cdots, \frac{a_{i,i-1}}{-a_{ii}}, 0, \frac{a_{i,i+1}}{-a_{ii}}, \cdots, \frac{a_{in}}{-a_{ii}}\right]$ és $d_i = \frac{b_i}{a_{ii}}$

$i = 1 : n.$

$\forall \quad x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ kezdő közelítés esetén tegyük fel, hogy az $x^{(k)}$ $k$-adik közelítést már kiszámítottuk. Akkor az $x^{(k+1)}$ $(k+1)$-edik közelítést az alábbi módon határozzuk meg:

$$x_i^{(k+1)} = \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij} x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i+1}^{n} c_{ij} x_j^{(k)} + d_i, \quad i = 1 : n, \quad k = 0, 1, 2, 3, \cdots$$

Hibaképlet:

$h_{k+1} := \frac{\|C\|_\infty}{1-\|C\|_\infty} \left\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\right\|_\infty < \varepsilon \longrightarrow \text{STOP},$

ha $\|C\|_\infty < 1.$

# 10. Hatvány módszer

Adottak $\varepsilon \in (0,1)$ hibakorlát, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix, $q_0$ és $v^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ kezdő közelítések.

$k = 1, 2, 3, \cdots$

$z^{(k)} = Av^{(k-1)}$

Meghatározzuk azon $t$ indexet, melyre

$\left\|z^{(k)}\right\|_\infty = \max\limits_{1\le j\le n} \left|z_j^{(k)}\right| = \left|z_t^{(k)}\right|$

legyen $y$ a $t$-edik egységvektor

$q_k = \frac{y^T z^{(k)}}{y^T v^{(k-1)}}$, ha $y^T v^{(k-1)} \neq 0$, egyébként választhatjuk

$y$-t bármely $i$-edik egységvektornak, melyre $e_i^T v^{(k-1)} \neq 0$

$v^{(k)} = \frac{z^{(k)}}{\left\|z^{(k)}\right\|_\infty}$

$h_{k+1} = |q_{k+1} - q_k| < \varepsilon \quad \longrightarrow \quad \text{STOP}$

# 11. Inverz hatvány módszer

Adottak $\varepsilon \in (0,1)$ hibakorlát, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ nemszinguláris mátrix, $q_0$ és $v^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ kezdő közelítések.

$k = 1, 2, 3, \cdots$

Megoldjuk az alábbi l.e.r.-t $\quad Az^{(k)} = v^{(k-1)} \quad$ a $z^{(k)}$ ismeretlenre.

Meghatározzuk azon a $t$ indexet, melyre

$\left\|z^{(k)}\right\|_\infty = \max\limits_{1\le j\le n} \left|z_j^{(k)}\right| = \left|z_t^{(k)}\right|$

legyen $y$ a $t$-edik egységvektor

$q_k = \frac{y^T z^{(k)}}{y^T v^{(k-1)}}$, ha $y^T v^{(k-1)} \neq 0$, egyébként választhatjuk

$y$-t bármely $i$-edik egységvektornak, melyre $e_i^T v^{(k-1)} \neq 0$

$v^{(k)} = \frac{z^{(k)}}{\left\|z^{(k)}\right\|_\infty}$

$h_{k+1} = |q_{k+1} - q_k| < \varepsilon \quad \longrightarrow \quad \text{STOP}$

# 12. Nemlineáris egyenletek gyökének közelítése

Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ tetszőleges függvény és tekintsük $f(x) = 0$ nemlineáris egyenletet.

## 12.1. Intervallumfelező eljárás

Tegyük fel, hogy $f(x)$ folytonos az $[a, b]$ intervallumon.

$\boxed{\text{k=1}}$

$\left[a^{(1)}, b^{(1)}\right] = [a, b]$

$x^{(1)} = \frac{a^{(1)}+b^{(1)}}{2}$

$\boxed{\text{k=k+1}}$

$$\left[a^{(k+1)}, b^{(k+1)}\right] = \begin{cases} \left[a^{(k)}, x^{(k)}\right], & \text{ha } f\left(a^{(k)}\right) * f\left(x^{(k)}\right) < 0 \\ \left[x^{(k)}, b^{(k)}\right], & \text{egyébként} \end{cases}$$

$x^{(k+1)} = \frac{a^{(k+1)}+b^{(k+1)}}{2}$
$k = 1, 2, 3, \cdots$
Hibaképlet:
$h_{k+1} \approx \frac{b^{(k+1)}-a^{(k+1)}}{2} < \varepsilon \longrightarrow \text{STOP}$

## 12.2. Fixpont iterációs módszer

$f(x) = 0$ nemlineáris egyenlet helyett, tekintsük $x = g(x)$ iteratív egyenletet.
Adott rendre egy hibakorlát és egy kezdő közelítés:
$\varepsilon \in (0, 1)\,,\ x^{(0)} \in [a, b]$

**While** (kilépési feltéltel) nem teljesül
$x^{(k)} = g\left(x^{(k-1)}\right)$
$k = k + 1$
**End**
Hibaképlet:
$h_{k+1} \approx \frac{q}{1-q}\left|x^{(k+1)} - x^{(k)}\right| < \varepsilon \longrightarrow \text{STOP},$
ahol $f,\ g \in C[a, b]\,,\ g([a, b]) \subseteq [a, b]$ és $q := \max\limits_{x\in[a,b]} |g'(x)| < 1.$

## 12.3. Newton módszer

$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f\left(x^{(k)}\right)}{f'\left(x^{(k)}\right)}$
$k = 0, 1, 2, 3, \cdots$
Hibaképlet:
$h_{k+1} = \frac{M_2}{2m}\left|x^{(k+1)} - x^{(k)}\right|^2 < \varepsilon \longrightarrow \text{STOP},$
ahol $m := \min\limits_{x\in[a,b]} |f'(x)|\,,\ M_2 := \max\limits_{x\in[a,b]} |f''(x)|$
és $f \in C^2[a, b]\,.$

### 12.4. Szelőmódszer

$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{x^{(k)} - x^{(k-1)}}{f\left(x^{(k)}\right) - f\left(x^{(k-1)}\right)} \cdot f\left(x^{(k)}\right)$
$k = 0, 1, 2, 3, \cdots$
Hibaképlet:
$h_{k+1} = \frac{M_2}{2m} \cdot \left|x^{(k+1)} - x^{(k)}\right| \cdot \left|x^{(k+1)} - x^{(k-1)}\right| < \varepsilon \longrightarrow \text{STOP}$
ahol $\quad m := \min\limits_{x \in [a,b]} |f'(x)|, \quad M_2 := \max\limits_{x \in [a,b]} |f''(x)|, \quad f \in C^2[a,b].$

## 13. Nemlieáris egyenletrendszerek közelítése

Legyen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ egy folytonosan differenciálható függvény $(n \geq 2)$ és tekintsük az $f(x) = 0 \in \mathbb{R}^n$ nemlineáris egyenletrendszert.

### 13.1. Newton módszer

Adott rendre egy hibakorlát és egy kezdő közelítés:
$\varepsilon \in (0,1)$, $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$
Megoldjuk $y^{(k)}$ismeretlenre az alábbi lineáris egyenlterendszert:
$J\left(x^{(k)}\right) y^{(k)} = -f\left(x^{(k)}\right), \quad$ ahol $\quad J(x) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ az eredő Jacobi mátrix.
$x^{(k+1)} = x^{(k)} + y^{(k)}$
$k = 0, 1, 2, 3, \cdots$
Hibaképlet:
$h_{k+1} = \left\|f\left(x^{(k+1)}\right)\right\|_\infty < \varepsilon \longrightarrow \text{STOP}$

### 13.2. Broyden módszer

Adottak az alábbi kezdő közelítések:
$x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, $B_0 = I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ egységmátrix
Megoldjuk $s^{(k)}$ismeretlenre az alábbi lineáris egyenlterendszert:
$B_k s^{(k)} = -f\left(x^{(k)}\right);$
$x^{(k+1)} = x^{(k)} + s^{(k)};$
$y^{(k)} = f\left(x^{(k+1)}\right) - f\left(x^{(k)}\right);$
$B_{k+1} = B_k + \frac{\left(y^{(k)} - B_k s^{(k)}\right) s^{(k)T}}{s^{(k)T} s^{(k)}}$
$k = 0, 1, 2, 3, \cdots$
Hibaképlet:
$h_{k+1} = \left\|f\left(x^{(k+1)}\right)\right\|_\infty < \varepsilon \longrightarrow \text{STOP}$

# 14. Interpolációs polinomok

Legyen adott az alábbi függvénytáblázat:

| $x$ | $a = x_1$ | $x_2$ | $\cdots$ | $x_n = b$ |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $f(x_1)$ | $f(x_2)$ | $\cdots$ | $f(x_n)$ |

## 14.1. Interpolációs polinom Lagrange alappolinomokkal

$$p(x) = \sum_{k=1}^{n} f(x_i)\, l_i(x)$$

$$l_i(x) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} \frac{x - x_k}{x_i - x_k}$$

$i = 1, 2, \cdots, n$

Hibaképlet:

$$h = \frac{M_n}{n!} \left| \prod_{j=1}^{n} (x^\star - x_j) \right|, \quad M_n = \max_{\eta \in [a,b]} \left| f^{(n)}(\eta) \right|, \quad f \in C^n[a, b].$$

## 14.2. Interpolációs polinom Newton-féle osztott differenciákkal

$$\begin{aligned} p(x) = {} & [x_1]_f \\ & + [x_1, x_2]_f \cdot (x - x_1) \\ & + [x_1, x_2, x_3]_f \cdot (x - x_1)(x - x_2) \\ & + [x_1, x_2, x_3, x_4]_f \cdot (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \\ & + \cdots \\ & + [x_1, x_2, \cdots, x_n]_f \cdot (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_{n-1}) \end{aligned}$$

$$[x_j, \cdots, x_{j+k}]_f := \frac{[x_{j+1}, \cdots, x_{j+k}]_f - [x_j, \cdots, x_{j+k-1}]_f}{x_{j+k} - x_j}$$

$k = 1, 2, \cdots, n$

$j = 1, 2, \cdots, n - 1$

Hibaképlet:

$$h = \frac{M_n}{n!} \left| \prod_{j=1}^{n} (x^\star - x_j) \right|, \quad M_n = \max_{\eta \in [a,b]} \left| f^{(n)}(\eta) \right|, \quad f \in C^n[a, b].$$

## 14.3. Interpolációs polinom Newton I. formulával

Tegyük fel, hogy az alappontok ekvidisztánsak, azaz $x_{k+1} - x_k \equiv h$,
$k = 1 : n - 1$.
$p(x) = \binom{t}{0} f_1 + \binom{t}{1} \Delta f_1 + \binom{t}{2} \Delta^2 f_1 + \cdots + \binom{t}{n-1} \Delta^{n-1} f_1$

$$
\begin{array}{llllll}
x_1 & f_1 & & & & \\
 & & \Delta f_1 & & & \\
x_2 & f_2 & & \Delta^2 f_1 & & \\
 & & \Delta f_2 & & \Delta^3 f_1 & \\
x_3 & f_3 & & \Delta^2 f_2 & & \ddots \\
 & & \Delta f_3 & & \ddots & \\
x_4 & f_4 & \dots & \ddots & & \\
\vdots & & \vdots & & & \\
x_n & f_n & & & &
\end{array}
$$

$f_i := f(x_i), \quad i = 1 : n$
$\Delta f_i := f_{i+1} - f_i, \quad i = 1 : n - 1$
$\Delta^k f_i := \Delta^{k-1} f_{i+1} - \Delta^{k-1} f_i, \quad k = 2 : n - 1$

$t = \frac{x - x_1}{h}, \quad \binom{t}{k} = \frac{t(t-1)\cdots(t-k+1)}{k!}$
Hibaképlet:
$$h = \frac{M_n}{n!} \left| \prod_{j=1}^{n} (x^\star - x_j) \right|, \quad M_n = \max_{\eta \in [a,b]} \left| f^{(n)}(\eta) \right|, \quad f \in C^n[a,b].$$

## 14.4. Interpolációs polinom köbös elsőrendű spline-nal

Az $i$-edik köbös elsődrendű spline: $S_i : [x_i, x_{i+1}] \to \mathbb{R}$,
$S_i(x) = f(x_i) U_{i,2}(x) + f(x_{i+1}) U_{i+1,1}(x) + f'(x_i) V_{i,2}(x) + f'(x_{i+1}) V_{i+1,1}(x)$,
$(i = 1 : n - 1)$,
ahol $U_{i,2}$, $U_{i+1,1}$ az $U$-típusú, és $V_{i,2}$, $V_{i+1,1}$ a $V$-típusú bázisfüggvények, amelyek legfeljebb harmadfokú polinomok és az alappontokban a következő feltételeknek tesznek eleget:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $U_{i,2}(x_i) = 1$ | $U_{i+1,1}(x_i) = 0$ | $V_{i,2}(x_i) = 0$ | $V_{i+1,1}(x_i) = 0$ |
| $U_{i,2}(x_{i+1}) = 0$ | $U_{i+1,1}(x_{i+1}) = 1$ | $V_{i,2}(x_{i+1}) = 0$ | $V_{i+1,1}(x_{i+1}) = 0$ |
| $U'_{i,2}(x_i) = 0$ | $U'_{i+1,1}(x_i) = 0$ | $V'_{i,2}(x_i) = 1$ | $V'_{i+1,1}(x_i) = 0$ |
| $U'_{i,2}(x_{i+1}) = 0$ | $U'_{i+1,1}(x_{i+1}) = 0$ | $V'_{i,2}(x_{i+1}) = 0$ | $V'_{i+1,1}(x_{i+1}) = 1$ |

## 14.5. Interpolációs polinom természetes spline-nal

$S_i(x_i) = f(x_i), \quad i = 1 : n-1$
$S_i(x_{i+1}) = f(x_{i+1}), \quad i = 1 : n-1$
$S_i'(x_{i+1}) = S_{i+1}'(x_{i+1}), \quad i = 1 : n-2$
$S_i''(x_{i+1}) = S_{i+1}''(x_{i+1}), \quad i = 1 : n-2$
$S_1''(x_1) = 0$
$S_{n-1}''(x_n) = 0$

Hibaképlet:

$$\max_{a \le x \le b} |f(x) - S(x)| \le h := \frac{5}{384} M_4 \left( \max_{1 \le i \le n-1} |x_{i+1} - x_i| \right)^4$$

$$\max_{a \le x \le b} |f'(x) - S'(x)| \le h := \frac{9+\sqrt{3}}{216} M_4 \left( \max_{1 \le i \le n-1} |x_{i+1} - x_i| \right)^3$$

$$\max_{a \le x \le b} |f''(x) - S''(x)| \le h := \frac{1+3\beta}{12} M_4 \left( \max_{1 \le i \le n-1} |x_{i+1} - x_i| \right)^2,$$

$$\beta := \frac{\max_{1 \le i \le n-1} |x_{i+1} - x_i|}{\min_{1 \le i \le n-1} |x_{i+1} - x_i|}, \quad M_4 = \max_{\eta \in [a,b]} \left| f^{(4)}(\eta) \right|, \quad f \in C^4[a,b].$$

# 15. Numerikus integrálás

$$I := \int\limits_a^b f(x)\,dx$$

## 15.1. Érintőformula

$I \approx I_{\text{É}} = (b-a)\, f\left(\frac{a+b}{2}\right)$
Hibaképlet:
$\delta I_{\text{É}} \approx \frac{M_2(b-a)^3}{24}$,
$M_2 = \max\limits_{\eta\in[a,b]} \left|f^{(2)}(\eta)\right|, \quad f \in C^2[a,b]$.

## 15.2. Összetett érintőformula

Legyen adott az alábbi függvénytáblázat (az alappontok ekvidisztánsak, azaz $x_{k+1} - x_k \equiv h$, $k = 0:1:n-1$):

| $x$ | $a = x_0$ | $x_1$ | $\cdots$ | $x_n = b$ |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $f(x_0)$ | $f(x_1)$ | $\cdots$ | $f(x_n)$ |

Alkalmazva az érintőformulát a részintervallumokra és az

$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx$ integrál additívitását megkapjuk az összetett érintőformulát:

$I \approx I_{\text{ÖÉ}} = h \sum\limits_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_{i+1}+x_i}{2}\right)$
Hibaképlet:
$\delta I_{\text{É}_n} \approx \frac{(b-a)h^2 M_2}{24}$,
$M_2 = \max\limits_{\eta\in[a,b]} \left|f^{(2)}(\eta)\right|, \quad f \in C^2[a,b]$.

## 15.3. Trapézformula

$I \approx T = \frac{b-a}{2}\left[f(a) + f(b)\right]$

Hibaképlet:
$\delta T \approx \frac{(b-a)^3 M_2}{12}$,
$M_2 = \max\limits_{\eta\in[a,b]} \left|f^{(2)}(\eta)\right|, \quad f \in C^2[a,b]$.

## 15.4. Összetett Trapézformula

Legyen adott az alábbi függvénytáblázat (az alappontok ekvidisztánsak, azaz $x_{k+1} - x_k \equiv h$, $k = 0:1:n-1$):

| $x$ | $a = x_0$ | $x_1$ | $\cdots$ | $x_n = b$ |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $f(x_0)$ | $f(x_1)$ | $\cdots$ | $f(x_n)$ |

Alkalmazva a trápézformulát a részintervallumokra és az

$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx$ integrál additívitását megkapjuk az összetett trápézformulát:

$$I \approx T_n = \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + f(x_n)\right]$$

Hibaképlet:

$$\delta T_n \approx \frac{(b-a)h^2 M_2}{12},$$

$$M_2 = \max_{\eta\in[a,b]}\left|f^{(2)}(\eta)\right|, \quad f \in C^2[a,b].$$

## 15.5. Simpson-formula

$$I \approx S = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$$

Hibaképlet:

$$\delta S \approx \frac{(b-a)^5 M_4}{2880},$$

$$M_4 = \max_{\eta\in[a,b]}\left|f^{(4)}(\eta)\right|, \quad f \in C^4[a,b].$$

## 15.6. Összetett Simpson-formula

Legyen adott az alábbi függvénytáblázat (az alappontok ekvidisztánsak, azaz $x_{k+1} - x_k \equiv h$, $k = 0:1:n-1$):

| $x$ | $a = x_0$ | $x_1$ | $\cdots$ | $x_n = b$ |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $f(x_0)$ | $f(x_1)$ | $\cdots$ | $f(x_n)$ |

Alkalmazva a Simpson-formulát a részintervallumokra és az

$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx$ integrál additívitását megkapjuk az összetett Simpson-formulát:

$$I \approx S_n = \frac{h}{6}\left[f(x_0) + 4f\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right) + 2f(x_1) + 4f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) + \ldots + 2f(x_k) + 4f\left(\frac{x_k+x_{k+1}}{2}\right) + \ldots + f(x_n)\right]$$

Hibaképlet:

$$\delta S_n \approx \frac{(b-a)h^4 M_4}{2880}$$

$$M_4 = \max_{\eta\in[a,b]}\left|f^{(4)}(\eta)\right|, \quad f \in C^4[a,b].$$