Gyakorló feladatok

Agbeko Kwami Nutefe és Nagy Noémi

2015

Tartalomjegyzék

1. Klasszikus hibaszámítás

1) Tegyük fel, hogy $\sqrt{15}$ értéke 10^{-8} hibakorláttal számolható. Az alábbi két (elméletileg egyenlő) kifejezés közül melyiket lehet kisebb relatív hibával kiszámítani? Mekkora ez a hiba a nagyobb hibához képest?

   a) $\frac{1}{\left(4+\sqrt{15}\right)^6}$.

   b) $119071 - 30744\sqrt{15}$.

2) Közelítse az $e \cdot \pi$ értéket $2,178 \cdot 3,142$-vel. Adja meg a közelítés abszolút és relatív hibakorlátját, ha ismert, hogy e és π három tizedesjegyre kerekített értékét használtuk!

3) Az $\frac{1}{\pi}$ értéket $\frac{1}{3{,}14}$-gyel közelíthetjük. Adja meg a közelítés abszolút és relatív hibakorlátját, ha tudjuk, hogy 3,14 a π két tizedesjegyre kerekített értéke!

2. Lineáris egyenletrendszerek

Határozza meg az alábbi lineáris egyenletrendszerek esetében a következőket:

1) a megoldást, valamint az együtthatómátrix LU-felbontását és determinánsát Gauss-eliminációval,

2) a megoldást, valamint az együtthatómátrix alkalmas LU-felbontását és determinánsát Gauss-eliminációval, részleges főelemkiválasztást alkalmazva,

3) a megoldást, valamint az együtthatómátrix alkalmas LU-felbontását és determinánsát Gauss-eliminációval, teljes főelemkiválasztást alkalmazva,

4) a megoldást, valamint az együtthatómátrix determinánsát és inverzének második oszlopát Gauss-Jordan eljárással,

5) a megoldást, valamint az együtthatómátrix determinánsát és inverzének második oszlopát LU-módszer I-es algoritmussal,

6) részleges főelemkiválasztást alkalmazva a megoldást, valamint az együtthatómátrix determinánsát és inverzének harmadik oszlopát LU-módszer II-es algoritmussal,

7) teljes főelemkiválasztást alkalmazva a megoldást, valamint az együtthatómátrix determinánsát és inverzének harmadik oszlopát LU-módszer II-es algoritmussal,

8) a megoldást és az együtthatómátrix Cholesky-felbontását!

$$\begin{bmatrix} 10.1 & 1.1 & 2.1 \\ 20.3 & 25.3 & 2.3 \\ 3.2 & 5.2 & 61.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 101 \\ -13 \\ 79 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & -3 \\ 2 & -3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 \\ 0 \\ 50 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

3. Interpoláció

1) Határozza meg az alábbi függvénytáblázatokhoz illeszkedő Lagrange interpolációs polinomot és annak alapján az $f(1.44)$, $f(0.5)$ és $f(2)$ függvényérték közelítését, ahol lehet

   a) a Lagrange alapfüggvények segítségével,

   b) a Newton-féle osztott differenciálokkal,

   c) lineáris egyenletrendszeren alapuló megoldással!

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-15	-4	-1	0	5

x	-1.1	2.1	3.1	4
$f(x)$	4.1	2.1	2.1	4.1

x	1	4	9
$f(x)$	1	2	3

x	-1	0	1	2
$f(x)$	0.5	1	2	4

2) Határozza meg az $f(x) = x \cdot e^{-x}$ függvényt a $0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1$ pontokban interpoláló polinomot. Adjuk meg az $f\left(\frac{1}{2}\right)$ racionális közelítését a polinom segítségével és becsüljük meg a hibát a megadott pontban a hibaformulával!

3) Határozza meg az $f(x) = \sin(\pi x)$ függvényt a $0, \frac{1}{6}, \frac{5}{6}, 1$ pontokban interpoláló polinomot. Adjuk meg az $f\left(\frac{1}{3}\right)$ racionális közelítését a polinom segítségével és becsüljük meg a hibát a megadott pontban a hibaformulával!

4) Adott az alábbi függvénytáblázat:

x	1.1	2.1	3.1
$f(x)$	4.1	2.1	2.1
$f'(x)$	1.1	0.1	2

Határozza meg az $f(1.7015)$, valamint az $f'(1.7015)$ függvényértékek közelítését

a) Lagrange interpolációs polinommal, Newton I. formula segítségével;
b) köbös elsőrendű spline-nal;
c) természetes spline-nal!

A fenti eredmények ismeretében határozza meg az $I = \int\limits_{1.1}^{3.1} f(x)dx$ integrál közelítését!

5) Határozza meg az alábbi függvénytáblázathoz illeszkedő Hermite interpolációs polinomot, valamint a köbös első rendű spline polinomot!

x	0.1	1.1
$g(x)$	-1.1	1.1
$g'(x)$	1.1	2.1

A fenti eredmények ismeretében határozza meg az $I = \int\limits_{0.1}^{1.1} f(x)dx$ integrál közelítését!

6) Írja fel az f-et közelítő Hermite interpolációs polinomot, valamint köbös elsőrendő spline-t ha

x	-1	1
$f(x)$	1	2
$f'(x)$	1	-1

A fenti eredmények ismeretében határozza meg az $I = \int\limits_{-1}^{1} f(x)dx$ integrál közelítését!

7) Írja fel az f-et közelítő Hermite interpolációs polinomot, valamint a köbös elsőrendű spline-t, ha

x	0	2
$f(x)$	-1	-1
$f'(x)$	-4	4

Az eredmények ismeretében határozza meg az $I = \int\limits_{0}^{2} f(x)dx$ integrál közelítését!

8) Tekintse az $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ és a $\{-1, 0, 1\}$ alappontrendszert és Határozza meg az f-et interpoláló köbös természetes spline-t! Az eredmény ismeretében határozza meg az $I = \int\limits_{-1}^{1} f(x)dx$ integrál közelítését!

9) Határozza meg azt az f-et interpoláló Hermite polinomot, valamint a köbös első spline-t, melyre

x	-1	1
$f(x)$	-1	1
$f'(x)$	-1	3

A fenti eredmények ismeretében határozza meg az $I = \int\limits_{-1}^{1} f(x)dx$ integrál közelítését!

10) Írja fel azt az f-et interpoláló természetes spline-t, melyre

x	-1	0	1
$f(x)$	-1	1	3
$f'(x)$	4	2	4

Az eredmény ismeretében határozza meg az $I = \int\limits_{-1}^{1} f(x)dx$ integrál közelítését!

4. Sajátérték, sajátvektor

1) Határozza meg

a) hatványmódszerrel az A_i mátrix domináns sajátértékének közelítő értékét valamint a hozzá tartozó közelítő sajátvektort, adott hibakorlát mellett!

b) hatványmódszerrel az A_i mátrix domináns sajátértékének közelítő értékét, valamint a hozzá tartozó közelítő sajátvektort! A kilépési feltétel: 4 a maximális iterációszám vagy az eredő hiba ε_i adott hibakorlátnál kisebb.

c) inverz hatványmódszerrel az A_i^{-1} mátrix domináns sajátértékének közelítését, valamint a hozzá tartozó közelítő sajátvektort, adott hibakorlát mellett!

d) inverz hatványmódszerrel az A_i^{-1} mátrix domináns sajátértékének közelítő étékét, valamint a hozzá tartozó közelítő sajátvektort, adott 4 maximális iterációszám mellett!

$$A_1 = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}, q_1^{(0)} = 0, v_1^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \varepsilon_1 = 0.05$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}, q_2^{(0)} = 0, v_2^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \varepsilon_2 = 0.5$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 6 \end{bmatrix}, q_3^{(0)} = 0, v_3^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \varepsilon_3 = 0.05$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}, q_4^{(0)} = 0, v_4^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \varepsilon_4 = 0.2$$

$$A_5 = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & -4 \end{bmatrix}, q_5^{(0)} = 0, v_5^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \varepsilon_5 = 0.2$$

$$A_6 = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}, q_6^{(0)} = 0, v_6^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \varepsilon_6 = 0.45$$

2) Határozza meg az alábbi A mátrix valamennyi sajátértékét és a hozzájuk tartozó sajátvektort! Ennek ismeretében döntsön a mátrix szingularitásáról és állítsa elő a $B = p(A)$ sajátértékeit, ahol $p(z) = -z^{10} + z^5 - 10$! Ha az A mátrix nemszinguláris, akkor határozza meg az inverzének valamennyi sajátértékét is! A mátrix sorai rendre a következők:

a) [9, 0, 9]; [0, 9, 9]; [9, 1, 9].

b) [9, 9, 0]; [9, 9, 9]; [0, 9, 9].

c) [9, 9, 0]; [1, 9, 9]; [0, 9, 9].

d) [11, 11, 0]; [11, 11, 11]; [0, 11, 11].

e) [110, 110, 0]; [111, 110, 110]; [0, 110, 110].

f) [11, 11, 0]; [11, 0, 11]; [11, 11, 0].

5. Lineáris és nemlineáris egyenletrendszer iterációs módszerei

1) Az $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 3, & 3, & 3 \end{bmatrix}^T$ kezdővektor esetén határozza meg az alábbi lineáris egyenletrendszer megoldásának közelítő értékét

a) Gauss-Seidel iterációval!

b) Jacobi iterációval!

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 2 \\ 1 & -6 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12.1 \\ 14.1 \\ 16.1 \end{bmatrix}$$

Akkor ér véget az eljárás, ha az iteráció száma 4 vagy az eredő hiba kisebb mint $\varepsilon = 0.09$.

2) Adott az $f(x) = 0$ nemlineáris egyenlet és az $x^{(0)}$ kezdőérték, ahol

a) $f(x) = x^3 - 4x^2 - 44x + 76, \quad x \in [7.19\,; 9]; \quad x^{(0)} = 7.501,$

b) $f(x) = x^3 - 4x^2 - 44x + 76, \quad x \in [1.1\,; 3.1]; \quad x^{(0)} = 1.501,$

c) $f(x) = x^3 - 4x^2 - 44x + 76, \quad x \in [-7.19\,; -5.1]; \quad x^{(0)} = -7.051,$

d) $f(x) = 4x^3 + 7x^2 - 34x + 8, \quad x \in [0\,; 1.09]; \quad x^{(0)} = 0.051,$

e) $f(x) = 4x^3 + 7x^2 - 34x + 8, \quad x \in [1.1\,; 3.1]; \quad x^{(0)} = 1.1521,$

f) $f(x) = 4x^3 + 7x^2 - 34x + 8, \quad x \in [-5\,; -3.1]; \quad x^{(0)} = -4,9501.$

Határozza meg

a) fixpontos iterációval (egyenletenként használja a megadott $x^{(0)}$ értéket kezdő közelítésnek),

b) intervallumfelező módszerrel,

c) Newton-módszerrel

a 4. lépésig és adjon hibabecslést!

3) Newton módszerrel, valamint Broyden módszerrel határozza meg az

$$\begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, x_3) \\ f_2(x_1, x_2, x_3) \\ f_3(x_1, x_2, x_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

nemlineáris egyenletrendszer megoldásának $x^{(2)}$ közelítő értékét és adjon hibabecslést a kapott eredményre! Az ismert adatok:

a) $f_1(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^4 - 3x_2^3 + x_3$
$f_2(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 - x_2^4 - x_3$
$f_3(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2 - x_3^2$
$x^{(0)} = [1,\ 1,\ 1]^T$.

b) $f_1(x_1, x_2, x_3) = \ln(x_1^4 + 1) - 3x_2^3 + x_3$
$f_2(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 - x_2^4 - x_3$
$f_3(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2^2 - \ln(x_3^2 + 1)$
$x^{(0)} = [1,\ 1,\ 1]^T$.

c) $f_1(x_1, x_2, x_3) = \ln(x_1 + 1) - \ln(x_2 + 2) + x_3$
$f_2(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 - x_2^4 - x_3$
$f_3(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2^2 - \ln(x_3^2 + 1)$
$x^{(0)} = [1,\ 1,\ 1]^T$.

d) $f_1(x_1, x_2, x_3) = \sin(x_1^2) - 3x_2^3 + x_3$
$f_2(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - \sin(x_2^2) - x_3$
$f_3(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2^2 - \sin(x_3^2 + 1)$
$x^{(0)} = [1,\ 1,\ 1]^T$.

4) Az $f(x) = x^3 - 5x + 2$ függvény $[0; 1]$-beli gyökét közelítse 0.1 pontossággal a három tanult módon!

5) Közelítse az $x = \sqrt{x+1}$ egyenlet megoldását a $[0; 3]$ intervallumban 0.3 pontossággal a három tanult módon!

6) Az $f(x) = x^3 - x - 1$ függvény $[1; 2]$-beli gyökét közelítse 0.04 pontossággal a három tanult módon!

6. Numerikus integrálás

1) Adott az alábbi integrál:

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{2 - x^2}} dx.$$

A $[-1, 1]$ intervallum 4 azonos hosszúságú részintervallumra történő felosztása mellett határozza meg

a) az összetett érintőformula segítségével;

b) az összetett trapézformula segítségével;

c) az összetett Simpson formula segítségével

az integrál közelítő értékét és adjon hibabecslést a kapott eredményre! Használja fel azt a tényt, hogy az integrandus sokszor folytonosan differenciálható!

2) Számítsa ki az

$$\int_0^1 x^2 dx, \quad \int_1^2 \frac{1}{x} dx (= \ln 2)$$

$$\int_2^5 \sqrt{x-1} dx, \quad \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx \left(= \arctan(1) = \frac{\pi}{4}\right)$$

integrálok közelítő értékeit a megfelelő intervallumokon 4-6-8 azonos hosszúságú részintervallum felosztása mellett

a) az összetett érintőformula segítségével;

b) az összetett trapézformula segítségével;

c) az összetett Simpson formula segítségével!

Adjon hibabecslést a kapott eredményre!

3) Adott az $f(x)$ függvény az alábbi táblázattal:

x	0	0.25	0.5	0.75	1
$f(x)$	1	0.9846	0.8889	0.7033	0.5

Határozza meg az $I = \int_0^1 f(x) dx$ integrál értékét

a) az összetett trapézformula segítségével;

b) az összetett Simpson formula segítségével;

c) az összetett érintőformula segítségével, ha a lépésköz $h = 0.5$!

4) Adott az $f(x)$ függvény az alábbi táblázattal:

x	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
$f(x)$	2	2.135	2.34	2.755	3.242	3.945	5

Határozza meg az $I = \int_0^3 f(x)dx$ integrál értékét

a.) az összetett trapézformula segítségével;

b.) az összetett Simpson formula segítségével;

c.) az összetett érintőformula segítségével, ha a lépésköz $h = 1$!

5) Az $I = \int_0^{\pi/4} \ln(\cos(x))dx$ integrál közelítése esetén a $[0, \pi/4]$ intervallumot legalább hány részre kell osztani, hogy az integrál értékét $\varepsilon = 5.10^{-4}$-nél kisebb hibával kapjuk

a.) az összetett érintőformula segítségével;

b.) az összetett trapézformula segítségével;

c.) az összetett Simpson formula segítségével?

Határozza meg az integrál értékét mindhárom formulával!

7. Legkisebb négyzetek módszere

1. A legkisebb négyzetek módszerével illesszen $g(x) = A_1 + A_2 \log_3 x$ alakú függvényt az alábbi táblázathoz!

x	0.3	1.1	3.1	9.1	27.1
$f(x)$	-1.1	1.1	3.1	4.1	7.1

2. Határozza meg a $(0;1),(1;3),(2;4),(3;6)$ pontokat négyzetesen legjobban közelítő egyenest!

3. Írja fel a megadott $(x_i; y_i)$ pontokat négyzetesen legjobban közelítő egyenest!

x_i	-2	-1	0	1	2
y_i	-4	-2	1	2	4

4. Írja fel a megadott $(x_i; y_i)$ pontokat négyzetesen legjobban közelítő egyenest!

x_i	-3	-2	0	1	4
y_i	-3	-2	1	2	5

5. Írja fel a megadott $(x_i; y_i)$ pontokat négyzetesen legjobban közelítő egyenest és parabolát!

x_i	-2	-1	1	2
y_i	3	1	0	2

6. Írja fel a megadott $(x_i; y_i)$ pontokat négyzetesen legjobban közelítő egyenest és $f(x) = A + Bx + C \cdot \exp(x)$ alakú függvényt!

x_i	-4	-1	0	2	3
y_i	-4	-2	-1	3	4

[1] **A számolásokat 4 tizedesjegy pontossággal végezze!**