Bázistranszformációval kapcsolatos mintafeladatok

Mintafeladat:

Oldja meg az alábbi LER-t bázis transzformációval hosszú valamint rövid táblázat segítségével úgy, hogy a bázis mátrix $B=[a_1, a_3, a_2]$ legyen!

$$2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 4$$
$$4x_1 + x_2 + 3x_3 = 6$$
$$2x_1 + x_2 + 2x_3 = 8$$

MEGOLDÁS

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}; \quad b = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

legyen a_i az A mátrix i-edik oszlopa.

Hosszú táblat

	a_1	a_2	a_3	b
e_1	2	3	2	4
e_2	4	1	3	6
e_3	2	1	2	8

	a_1	a_2	a_3	b
e_1	−4	0	−4	−20
e_2	2	0	1	−2
a_2	2	1	2	8

	a_1	a_2	a_3	b
e_1	4	0	0	−28
a_3	2	0	1	−2
a_2	−2	1	0	12

	a_1	a_2	a_3	b
a_1	1	0	0	−7
a_3	0	0	1	12
a_2	0	1	0	−2

$$x = \begin{bmatrix} -7 \\ -2 \\ 12 \end{bmatrix}$$

(a sorok átrendezés után)!!!

Rövid táblás bázistranszformáció

1.) A bázisba jövő és a bázisból kimenő vektorok helyet cserélnek a szegélyeken.
2.) Pivot helyére ~~p~~ a pivot reciproka kerül.
3.) A pivotsor többi elemét elosztjuk a pivottal
4.) A pivotoszlop többi elemét elosztjuk a pivot ~~mínuszegy~~ (-1)-szeresével.

$$
\begin{array}{c|ccc|c|}
 & a_1 & a_2 & a_3 & b \\
\hline
e_1 & 2 & 3 & 2 & 4 \\
e_2 & 4 & 1 & 3 & 6 \\
e_3 & 2 & 1 & 2 & 8 \\
\hline
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|ccc|c|}
 & a_1 & e_3 & a_3 & b \\
\hline
e_1 & -4 & -3 & -4 & -20 \\
e_2 & 2 & -1 & 1 & -2 \\
a_2 & 2 & 1 & 2 & 8 \\
\hline
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c|ccc|c|}
 & a_1 & e_3 & e_2 & b \\
\hline
e_1 & 4 & -7 & 4 & -28 \\
a_3 & 2 & -1 & 1 & -2 \\
a_2 & -2 & 3 & -2 & 12 \\
\hline
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|ccc|c|}
 & e_1 & e_3 & e_2 & b \\
\hline
a_1 & 0{,}25 & -1{,}75 & 1 & -7 \\
a_3 & -0{,}5 & 2{,}5 & -1 & 12 \\
a_2 & 0{,}5 & -0{,}5 & 0 & -2 \\
\hline
\end{array}
$$

A megoldás: $x = \begin{bmatrix} -7 \\ -2 \\ 12 \end{bmatrix}$.

Leolvashatjuk az együttható mátrix inverzét:

$$
A^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}25 & 1 & -1{,}75 \\ 0{,}5 & 0 & -0{,}5 \\ -0{,}5 & -1 & 2{,}5 \end{bmatrix}
$$

sorok és oszlopok átrendezése után

Számítások hosszú táblához

$\boxed{a_2 \rightarrow e_3}$:

A pivotsor végig osztjuk a pivottal. Így a pivot helyére 1-es keletkezik és a többi ~~oszto~~ kapott számok (az osztás után) egy-egy átszámolandó oszlophoz tartozó δ jelenik meg.

A pivot oszlopának többi ~~elemei~~ helyére nullákat írjuk. ~~Így a bemenő~~

Így az a_2 bemenő vektor helyére ~~a~~ 3. egységvektor keletkezik.

~~a_1 átszámítása:~~

a_1 oszlop 1. és 2. elemének átszámolása:

$\delta_3 = \frac{2}{1} = 2$

1. elem esete: $2 - 2 \cdot 3 = -4$

2. elem esete: $4 - 2 \cdot 1 = 2$

a_3 oszlop 1. és 2. elemének átszámolása:

$\delta_3 = \frac{2}{1} = 2$

1. elem: $2 - 2 \cdot 3 = -4$

2. elem: $3 - 2 \cdot 1 = 1$

b oszlop 1. és 2. elemének átszámolása

$\delta = \frac{8}{1} = 8$

1. elem: $4 - 8 \cdot 3 = -20$

2. elem: $6 - 8 \cdot 1 = -2$

$\boxed{a_3 \Rightarrow e_2}$: azaz a_3 bemegy a bázisba e_2 helyére.

Ekkor a_3 oszlopvektor 2. egységvektorrá változik.

a_1 vektor 1. és 3. elemének átszámolás

$\delta = \frac{2}{1} = 2$

$-4 = 2 \cdot (-4) = 4$

$+2 - 2 \cdot 2 = -2$

Mivel a_2 ~~a~~. 2. egységvektorrá változott az a 2. táblában ezért nem változik

b oszlop 1. és 3. elemének átszámolása

$\delta = -2$

$-20 - (-2) \cdot (-4) = -28$

$8 - (-2) \cdot 2 = 12$

$\boxed{a_1 \rightarrow e_1}$ (a_1 bemegy e_1 helyére a bázisban)

Ekkor a_1 oszlopvektor helyére 1. egységvektor kerül.

$\delta = (-28)/4 = -7$

$-2 - (-7) \cdot 2 = 12$

$12 - (-7) \cdot (-2) = -2$

Mintafeladat:

Határozza meg az alábbi mátrix inverzét bázistranszformációval hosszú és rövid tábla segítségével!

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Megoldás

Hosszú tábla:

	a_1	a_2	a_3	e_1	e_2	e_3
e_1	3	2	2	1	0	0
e_2	1	2	1	0	1	0
e_3	2	1	1	0	0	1

	a_1	a_2	a_3	e_1	e_2	e_3
e_1	−1	0	0	1	0	−2
e_2	−3	0	−1	0	1	−2
a_2	2	1	1	0	0	1

	a_1	a_2	a_3	e_1	e_2	e_3
a_1	1	0	0	−1	0	2
e_2	0	0	−1	−3	1	4
a_2	0	1	1	2	0	−3

	a_1	a_2	a_3	e_1	e_2	e_3
a_1	1	0	0	−1	0	2
a_3	0	0	1	3	−1	−4
a_2	0	1	0	−1	1	1

$$A^{-1} = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -4 \end{bmatrix}\begin{array}{l} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{array}$$

$$\qquad\qquad e_1 \qquad e_2 \qquad e_3$$

Rövid tábla

	a_1	a_2	a_3
e_1	3	2	2
e_2	1	2	1
e_3	2	1	1

	e_2	a_2	a_3
e_1	−3	−4	−1
a_1	1	2	1
e_3	−2	−3	−1

	e_2	a_2	e_1
a_3	3	4	−1
a_1	−2	−2	1
e_3	1	1	−1

	e_2	e_3	e_1
a_3	−1	−4	3
a_1	0	2	−1
a_2	1	1	−1

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -4 \end{bmatrix}$$

Az inverz ~~első~~ sorait az alábbi séma szerint olvassuk az utolsó bázistáblából

1. sor: a_1e_1 a_1e_2 a_1e_3

2. sor: a_2e_1 a_2e_2 a_2e_3

3. sor: a_3e_1 a_3e_2 a_3e_3

Meg: a_1e_1 azt jelenti a_1 sor és e_1 oszlop közös eleme, stb.

stb.

Mintafeladat

Határozza meg az alábbi mátrix rangját és bázis felbontását (azaz G H-felbontását)!

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 6 & 9 \\ 6 & -6 & 12 & 18 \\ 2 & 1 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

MEGOLDÁS

$$\begin{array}{c|cccc|} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \hline e_1 & 3 & -3 & 6 & 9 \\ e_2 & 6 & -6 & 12 & 18 \\ e_3 & 2 & 1 & 0 & 6 \\ \hline \end{array}
\qquad
\begin{array}{c|cccc|} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \hline a_2 & -1 & 1 & -2 & -3 \\ e_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ e_3 & 3 & 0 & 2 & 9 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccc|} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \hline a_2 & 2 & 1 & 0 & 6 \\ e_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & 1{,}5 & 0 & 1 & 4{,}5 \\ \hline \end{array}$$

rang(A) = 2 mert ~~maximálisan~~ az A mátrix oszlopai közül maximálisan 2 tudtuk bevinni a bázisba.

$$G = [a_2, a_3] = \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ -6 & 12 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad H = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 6 \\ 1{,}5 & 0 & 1 & 4{,}5 \end{bmatrix}$$

Felírhatjuk a bázis mátrixot.

$$B = [a_2, e_2, a_3] = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 6 \\ -6 & 1 & 12 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$