BÁZISTRANSZFORMÁCIÓ ~~ESETE~~

7.h5

<u>def</u>: Ha az $\mathbb{R}^n$ vektortér egyik bázisából egy másik bázisba térünk át, akkor <u>bázistranszformációról</u> beszélünk.

<u>def</u>:

<u>Elemi bázistranszformációról</u> beszélünk (akkor), ha az $\mathbb{R}^n$ vektortér egyik bázisából egy másik bázisba térünk át oly módon, hogy az új bázis a régi bázistól csak egyetlen vektorban különbözzék.

7. h 6

Vizsgáljuk meg, hogy mi a feltétele annak, hogy egy vektor beírható legyen a bázisba, illetve az új bázisba való áttérés milyen változást idéz elő az egyes vektorok régi bázisra vonatkozó koordinátáiban.

T. f. az $\mathbb{R}^n$ egy bázisa

$b_1, b_2, \ldots, b_n$

továbbá legyen $c \in \mathbb{R}^n$ egy zérusvektortól különböző vektor.

Mint ismeretes a c vektor egyértelműen felírható a

$$c = c_1 b_1 + \dots + c_k b_k + \dots + c_n b_n$$

alakban, ahol a

$c_1, c_2, \dots, c_n$

számok a c vektor

$b_1, b_2, \dots, b_n$

bázisra vonatkozó koordinátai.

Tétel: Legyen $b_1, \dots, b_k, \dots, b_n$ az $\mathbb{R}^n$ egy bázisa, továbbá $0 \neq c \in \mathbb{R}^n$ e bázisra vonatkozó koordinátai $\left(\text{azaz } c = \sum_{j=1}^{n} c_j b_j\right)$. $c_1, \dots, c_k, \dots, c_n$

Ha $c_k \neq 0$,

$\Rightarrow$ a $b_1, \dots, b_{k-1}, c, b_{k+1}, \dots, b_n$ ~~bázist~~ vektorok bázist alkotnak az $\mathbb{R}^n$-ben.

(7.h 8)

Biz: Elég belátni, $b_1, \dots, b_{k-1}, c, b_k, \dots, b_n$ lin. ftlen vektrendszer!

Uv. l.-k $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ #-k.

T.f.

$$0 = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \lambda_i b_i + \lambda_k c.$$

mivel $c = \sum_{i=1}^{n} c_i b_i$

$$\Rightarrow 0 = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \lambda_i b_i + \lambda_k \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} c_i b_i + c_k b_k \right)$$

$$0 = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} (\lambda_i + \lambda_k c_i) b_i + \lambda_k c_k b_k$$

$\Rightarrow$ (bázis volta miatt)

$$\begin{cases} \lambda_k c_k = 0 \\ \lambda_i + \lambda_k c_i = 0, \quad i \neq k. \end{cases}$$

$\Rightarrow \lambda_k = 0$, mert $c_k \neq 0$

$\Rightarrow \lambda_i = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ ✓.

7. h 9

KÖV.:

A c vektor annyi bázisvektor helyébe vihető be, ahány zérustól különböző koordinátája van.

Most vizsgáljuk meg, hogy ~~az új bázisba~~ ~~bázisra áttérés~~ az új bázisra való áttérés milyen változást idéz elő egy tetszőleges $x \in \mathbb{R}^n$ vektor régi bázisra vonatkozó, koordinátáiban.

7. h 10

Legyen $x \in \mathbb{R}^n$ vektor tetszőleges.

$\Longrightarrow$

(1) $c = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} c_i b_i + c_k b_k$

(2) $x = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} x_i b_i + x_k b_k$

Fejezzük ki a b_k vektort az (1) felbontásból és helyettesítsük be a (2.) felbontásba

$\Longrightarrow$

$$b_k = -\frac{1}{c_k} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} c_i b_i + \frac{1}{c_k} c$$

$$x = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} x_i b_i + x_k \left(-\frac{1}{c_k} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} c_i b_i + \frac{1}{c_k} c \right)$$

Vonjuk össze a b_i tagokat.

$\Longrightarrow$

$$x = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \left(x_i - \frac{x_k}{c_k} c_i \right) b_i + \frac{x_k}{c_k} c$$

$$x = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \left(x_i - \delta c_i \right) b_i + \delta c$$

ahol $\delta := \frac{x_k}{c_k}$

Tehát tetszőleges $x \in \mathbb{R}^n$ vektornak az új bázisra vonatkozó koordinátái:

$x_1 - \delta c_1, \ldots, x_{k-1} - \delta c_{k-1}, \delta, x_{k+1} - \delta c_{k+1}, \ldots, x_n - \delta c_n.$

7. h 12

A konkrét számításokat célszerű az alábbi egyszerű elrendezésben végrehajtani.

I. táblázat

BÁZISVEKTOROK

	c	x	b_k
b_1	c_1	x_1	0
b_2	c_2	x_2	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
			0
b_k	c_k	x_k	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
b_n	c_n	x_n	0

II. táblázat

	c	b_k	x
b_1	0	$-c_1/c_k$	$x_1-\delta c_1$
b_2	0	$-c_2/c_k$	$x_2-\delta c_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	0		
c	1	$1/c_k$	δ
	0	$-c_{k+1}/c_k$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
b_n	0	$-c_n/c_k$	$x_n-\delta c_n$

Az I. táblázat az eredeti (régi) bázisra vonatkozik.

EZEKET BÁZISTÁBLÁZAT-nak nev.

7. h 13

• Az I. táblázat az eredeti (v. régi) bázisra vonatkozó koordinátáit tartalmazza a bázisba kerülő $\mathbf{c}$, az ~~át~~ átszámítandó $\mathbf{x}$ és a bázisból kikerülő $\mathbf{b}_k$ vektoroknak.
Ebben a táblázatban a $\mathbf{c}$ vektor azon koordinátáját amelyik a cserélendő bázisvetorra vonatkozik bekarikázzuk (és generáló v. pivotelemnek nev.)

7. h 14

.. A II. táblázat a bázisba került **c**, az ~~átszám~~ átszámítandó **x** és a bázisból kiment **b**$_k$ vektor új bázisra vonatkozó koordinátáit tartalmazza. Nyilvánvaló/ a bázisba bekerült **c** vektor új bázisra vonatkozó koordinátái megegyeznek a k-adik egységvektor koordinátáival.

7. h 15'

Meg (FONTOS)

def: Azt a táblát, melyben az összes vektort szerepeltetjük a felső szegélyen teljes v. hosszú táblának nev.

def: Azt a táblát, melyben a felső szegélyen csak a nem bázis vektorok szerepelnek tömör v. rövid táblának nev.

7h.15'

Meg.

A rövid tábla használatakor a felső szegély vektorai is változnak. A bázisba bejövő és a bázisból kimenő vektorok helyett cserélnek a szegélyeken.

A #-olás szabályai:

1.) a pivotelem helyére a pivotelem reciprokát írjuk

2.) a pivot sorának többi elemét elosztjuk a pivotelemmel.

3.) a pivot oszlopának többi elemét elosztjuk a pivotelemmel és ellenkező előjelűre változtatjuk.

4.) a táblázat fennmaradó elemeit a megismert módon számoljuk.

Mátrixok rangja

8.h6

def (oszlop-(sor)-rang)

- Az $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mátrix oszloprangján az A oszlopai közül kiválasztható lineárisan ftlen vektorok maximális számát értjük.
- Az A sorrangján az A mátrix sorai közül kiválasztható lin.san ftlen vektorok ~~szo~~ maximális számát értjük.

Tétel:
Bármilyen $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mátrix oszlop és sor rangja egyenlő!

8.h7

Def: (rang)

Az $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mátrix rangján ~~az~~ az A mátrix oszlopai vagy sorai közül kiválasztható lin.$^{\text{san}}$ ftlen vektorok maximális számát értjük.

Jelölés: rank(A). ~~vagy~~

~~r(A)~~:

Áll: Legyenek

A és B alkalmas mátrixok,

$\Longrightarrow$

1. $\operatorname{rank}(A+B) \leq \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B)$
2. $\operatorname{rank}(AB) \leq \min(\operatorname{rank}(A), \operatorname{rank}(B))$
3. $\operatorname{rank}(AB) = \operatorname{rank}(B)$, ha $\exists A^{-1}$.
4. $\operatorname{rank}(BA) = \operatorname{rank}(B)$, ha $\exists A^{-1}$.

Tétel:

Az $Ax = b$ $(A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m)$ egyenletrendszernek akk és csak akk van megoldása ha $\operatorname{rank}([A, b]) = \operatorname{rank}(A)$.

Továbbá a megoldás pontosan csak akk egyértelmű ha ~~rank~~ $(A) =$ A oszlop rangú (azaz $\operatorname{rank}(A) = n$).

<u>Tétel</u>: (Bázisfaktorizáció) $\boxed{8.h9}$

Legyen $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, melynek az $r := \text{rank}(A) \geq 1$.

$\Longrightarrow$

$\exists$-nek $G \in \mathbb{R}^{m \times r}$ és $H \in \mathbb{R}^{r \times n}$ mátrixok úgy, hogy

1.) G oszlopai és a H sorai lin. ftlenek (és így $\text{rank}(G) = \text{rank}(H) = r$)

~~2.)~~

2.) $A = GH$.

<u>MEG</u>: A bázisfaktorizáció nem egyértelmű.