

BÁZISTRANSZFORMÁCIÓ ~~ESETE~~

7. h 5

def: Ha az \mathbb{R}^n vektortér egyik bázisából egy másik bázisba térünk át, akkor bázistranszformációról beszélünk.

def:

Elemi bázistranszformációról beszélünk (akkor), ha az \mathbb{R}^n vektortér egyik bázisából egy másik bázisba térünk át oly módon, hogy az új bázis a régi bázistól csak egyetlen vektorban különbözzék.

Vizsgáljuk meg, hogy mi a
feltétele annak, hogy egy
vektor bennihető legyen a bázis-
ba, illetve az új bázisba
változtatás milyen válto-
zást idéz elő az egyes
vektorok régi bázisra
vonatkozó koordinátaiban.

T. f. az \mathbb{R}^n egy bázisa

b_1, b_2, \dots, b_m

továbbá legyen $c \in \mathbb{R}^n$ egy
 zérusvektortól különböző
 vektor.

Mint ismeretes a c
 vektor felírható a
egyértelműen

$$c = c_1 b_1 + \dots + c_k b_k + \dots + c_n b_n$$

alakban, ahol a

c_1, c_2, \dots, c_n
számok a c vektor

b_1, b_2, \dots, b_n
bázisra vonatkozó koordinátái.

Tétel: Legyen $b_1, \dots, b_k, \dots, b_n$
az \mathbb{R}^n egy bázisa, továbbá

$0 \neq c \in \mathbb{R}^n$ e bázisra
vonatkozó koordinátái
 $c_1, \dots, c_k, \dots, c_n$ (azaz $c = \sum_{j=1}^n c_j b_j$).

Ha $c_k \neq 0$,

\Rightarrow $b_1, \dots, b_{k-1}, c, b_{k+1}, \dots, b_n$
~~bázis~~ vektorok bázist alkotnak
az \mathbb{R}^n -ben.

BWZ: Elegendő belátani

$b_1, \dots, b_{k-1}, b_k \rightarrow b_n$ lin. füglen vektrendszerek!

Uv. $1-k$ $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R} \neq -k$.

T.f. $0 = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \lambda_i b_i + \lambda_k e$.

Mivel $e = \sum_{i=1}^n c_i b_i$

$\Rightarrow 0 = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \lambda_i b_i + \lambda_k \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n c_i b_i + c_k b_k \right)$

$0 = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n (\lambda_i + \lambda_k c_i) b_i + \lambda_k c_k b_k$

\Rightarrow (bázisunk van miatt)

$\lambda_k c_k = 0$

$\Rightarrow \lambda_k = 0$, mert $c_k \neq 0$

$\lambda_i + \lambda_k c_i = 0, i \neq k$

$\Rightarrow \lambda_i = 0$

[7. h 9]

KÖV.:

A c vektor annyi bázisvektor helyébe vihető be, ahány zérustól különböző koordinátája van.

Most vizsgáljuk meg, hogy az új bázisra átírás az új bázisra való átírás milyen változást idéz elő egy tetszőleges $x \in \mathbb{R}^n$ vektor régi bázisra vonatkozó koordinátaiban.

Legyen $x \in \mathbb{R}^n$
vektor tetszőleges.

7. h 10

$$\Rightarrow (1) c = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n c_i b_i + c_k b_k$$

$$(2) x = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n x_i b_i + x_k b_k$$

Fejessük ki a b_k vektort az (1) felbontásból és helyettesítsük be a (2.) felbontásba

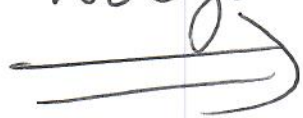
$$\Rightarrow b_k = -\frac{1}{c_k} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n c_i b_i + \frac{1}{c_k} c$$

$$x = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n x_i b_i + x_k \left(-\frac{1}{c_k} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n c_i b_i + \frac{1}{c_k} c \right)$$

~~-----~~

Vonjuk össze a b_i tagokat.

7. h 11



$$x = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \left(x_i - \frac{x_k}{c_k} c_i \right) b_i + \frac{x_k}{c_k} c$$

$$x = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \left(x_i - \delta c_i \right) b_i + \delta c$$

ahol $\delta := \frac{x_k}{c_k}$

Tehát tetszőleges $x \in \mathbb{R}^n$ vektornak az új bázisra vonatkozó koordinátái:

$$x_1 - \delta c_1, \dots, x_{k-1} - \delta c_{k-1}, \delta, x_{k+1} - \delta c_{k+1}, \dots, x_n - \delta c_n.$$

A konkrét számításokat elszerezni az alábbi egyszerű elrendezésben végrehajtani.

I. táblázat

II. táblázat

BÁZISVEKTOROK

	c	x	b _k
b ₁	c ₁	x ₁	0
b ₂	c ₂	x ₂	0
...
b _k	c _k	x _k	1
...
b _n	c _n	x _n	0

c	b _k	x
0	-c ₁ /c _k	x ₁ - δ c ₁
0	-c ₂ /c _k	x ₂ - δ c ₂
...
1	1/c _k	δ
0	-c _{k+1} /c _k	...
...
0	-c _n /c _k	x _n - δ c _n

~~AA I. táblázat az eredeti (régő) bázisra vonatkozik.~~

EZEKET BÁZISTÁBLÁZAT-
nak nevé.

• Az I. táblázat az eredeti
 (v. régi) bázisra vonatkozó
 koordinátáit tartalmazza a
 bázisba kerülő c , az át
 átszámítottak x és a bázisból
 kikerülő b_k vektoroknak.
 Ebben a táblázatban a c
 vektor azon koordinátáját,
 amelyik a cserélendő bázisvektorra
 vonatkozik bekarikázzuk
 (és generálb v. pivot elemnek nev.)

•• A II. táblázat a
bázisba került e , az ~~átszám-~~
~~átszámítandó~~ x és a bázisból
kiment b_k vektor új bázisra
vonatkozó koordinátáit
tartalmazza. Nyilván való/~~an~~
a bázisba bekerült e vektor
új bázisra vonatkozó koordinátái
megegyeznek a k -adik
egységvektor koordinátáival.

Meg (FONTOS)

(7. h 15)

def: Azt a táblát, melyben az összes vektort szerepeltetjük a felső szegevényen teljes n . hosszú táblának nevé.

def: Azt a táblát, melyben a felső szegevényen csak a nem bázis vektorok szerepelnek tömör n . rövid táblának

nevé.

Meg.

A rövid tábla használatánál a felső szegély vektorai is változnak. A bázisba bejövő és a bázisból kimenő vektorok helyett cserélnek a szegélyeken.

A ~~#~~ oldalszabályai:

- 1.) a pivotelem helyére a pivot elem reciprokát írjuk
- 2.) a pivot sorának többi elemét elosztjuk a pivotelemmel.
- 3.) a pivot oszlopának többi elemét elosztjuk a pivotelemmel és ellenkező előjelűre változtatjuk.
- 4.) a táblázat fennmaradó elemeit a megismert módon számoljuk.

Mátrixok Rangja

8. h. 6

def (oszlop- (sor)-rang)

• Az $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mátrix oszloprangján az A oszlopai közül kiválasztható lineárisan független vektorok mátriximális számát értjük.

• Az A sorrangján az A mátrix sorai közül kiválasztható lin^{SOM} független vektorok azo mátriximális számát értjük.

Tétel:

Bármilyen $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mátrix oszlop és sorrangja egyenlő.

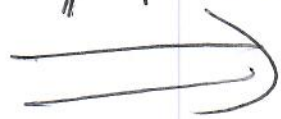
Def: (rang)

Az $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mátrix rangjának az A mátrix oszlopai, vagy sorai közül kiválasztható $\min\{m, n\}$ független vektorok maximális száma érték.

Jelölés : $\text{rank}(A)$, ~~vagy~~
 ~~$\text{rk}(A)$~~

All: Legyenek

A és B alkalmas mátrixok.



1. $\text{rank}(A+B) \leq \text{rank}(A) + \text{rank}(B)$
2. $\text{rank}(AB) \leq \min(\text{rank}(A), \text{rank}(B))$
3. $\text{rank}(AB) = \text{rank}(B)$, ha $\exists A^{-1}$.
4. $\text{rank}(BA) = \text{rank}(B)$, ha $\exists A^{-1}$.

Tétel:

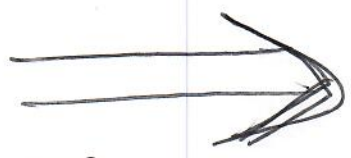
Az $Ax = b$ ($A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$)
 egyenletrendszernek akk és
csak akkor van megoldása

ha $\text{rank}([A, b]) = \text{rank}(A)$.

Továbbá a megoldás pontosan
 csak akkor egyértelmű ha
 $\text{rank}(A) = n$ (azaz $\text{rank}(A) = n$).

Tétel: (Bázisfaktorizáció)

Legyen $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, melynek az $r := \text{rank}(A) \geq 1$.



\exists nek $G \in \mathbb{R}^{m \times r}$ és $H \in \mathbb{R}^{r \times n}$ mátrixok úgy

- 1.) G oszlopai és a H sorai lin. ftlenek. (és úgy
- 2.) $\text{rank}(G) = \text{rank}(H) = r$)

2.) $A = GH$.

MEG: A bázisfaktorizáció nem egyértelmű.