Gauss - Jordan eljárás

Gauss-módszer Jordan-féle változatában is a főelemeket a főátló mentén választjuk. Még kinullázás előtt a pivotsort végigosztjuk a pivottal. Ez az új sor a pivotelem sora helyére kerül az új táblázatba. Az új táblázat többi sorát megkapjuk, ha a pivotelem fölötti és alatti számokat kinullázzuk.

Megjegyzés:

Gauss-Jordan eljárással úgy invertálunk mátrixot, hogy bővítsük a mátrixot egység mátrixszal és hajtjuk végre a fenti eljárást.

A kinullázás során az egységoszlop vektorokat, amiket kiszámítottuk, beírjuk az új táblázatba.

A kinullázandók helyére zérust írjuk.

Mintafeladat!

Gauss-Jordan eljárással oldja meg az alábbi LER-t és határozza az együttható mátrix inverzét.

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 11$$
$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 9$$
$$3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 19$$

MEGOLDÁS

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}; \quad b = \begin{bmatrix} 11 \\ 9 \\ 19 \end{bmatrix}.$$

Bővítsük az A mátrixot b vektorral és az egység mátrixszal.

$$\left[\begin{array}{ccc|c|ccc} 2 & 1 & 1 & 11 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 9 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 19 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\boxed{k=1}} \left[\begin{array}{ccc|c|ccc} 1 & 0,5 & 0,5 & 5,5 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 1,5 & 0,5 & 3,5 & -0,5 & 1 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0,5 & 2,5 & -1,5 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c|ccc} 1 & 0 & 0,3334 & 4,3335 & 0,6667 & -0,3333 & 0 \\ 0 & 1 & 0,3333 & 2,3333 & -0,3333 & 0,6667 & 0 \\ 0 & 0 & 0,3334 & 1,3335 & -1,3334 & -0,3333 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\boxed{k=3}}$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 2,0001 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1,0002 & 0,9997 & 0,9999 & -0,9997 \\ 0 & 0 & 1 & 3,9997 & -3,9994 & -0,9997 & 2,9994 \end{array}\right]$$

Az egyenletrendsz. megoldása:

$$x = \begin{bmatrix} 3 \\ 1{,}0002 \\ 3{,}9997 \end{bmatrix}$$

Az együttható mátrix inverze:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2{,}0001 & 0 & -1 \\ 0{,}9997 & 0{,}9999 & -0{,}9997 \\ -3{,}9994 & -0{,}9997 & 2{,}9994 \end{bmatrix}$$

Számítások az VI. Fázis lépésekre

$\boxed{k=1}$

$\lambda_{21} = \frac{1}{2} = 0{,}5$

$2 - 0{,}5 \cdot 1 = 1{,}5$

$1 - 0{,}5 \cdot 1 = 0{,}5$

$9 - 0{,}5 \cdot 11 = 3{,}5$

$0 - 0{,}5 \cdot 1 = -0{,}5$

$1 - 0{,}5 \cdot 0 = 1$

$0 - 0{,}5 \cdot 0 = 0$

$\lambda_{31} = \frac{3}{2} = 1{,}5$

$2 - 1{,}5 \cdot 1 = 0{,}5$

$2 - 1{,}5 \cdot 1 = 0{,}5$

$19 - 1{,}5 \cdot 11 = 2{,}5$

$0 - 1{,}5 \cdot 1 = -1{,}5$

$0 - 1{,}5 \cdot 0 = 0$

$1 - 1{,}5 \cdot 0 = 1$

$\boxed{k=2}$

$\lambda_{12} = \frac{0{,}5}{1{,}5} = 0{,}3333$

$0{,}5 - 0{,}3333 \cdot 0{,}5 = 0{,}3334$

$5{,}5 - 0{,}3333 \cdot 3{,}5 = 4{,}3335$

$0{,}5 - 0{,}3333 \cdot (-0{,}5) = 0{,}6667$

$0 - 0{,}3333 \cdot 1 = -0{,}3333$

$0 - 0{,}3333 \cdot 0 = 0$

$\lambda_{32} = \frac{0{,}5}{1{,}5} = 0{,}3333$

$0{,}5 - 0{,}3333 \cdot 0{,}5 = 0{,}3334$

$2{,}5 - 0{,}3333 \cdot 3{,}5 = 1{,}3335$

$-1{,}5 - 0{,}333 \cdot (-0{,}5) = -1{,}3334$

$0 - 0{,}3333 \cdot 1 = -0{,}3333$

$1 - 0{,}3333 \cdot 0 = 1$

$\boxed{k=3}$

$\lambda_{23} = \frac{0{,}3333}{0{,}3334} = 0{,}9997$

$2{,}3333 - 0{,}9997 \cdot 1{,}3335 = 1{,}0002$

$-0{,}3333 - 0{,}9997 \cdot (-1{,}3334) = 0{,}9997$

$0{,}6667 - 0{,}9997 \cdot (-0{,}3333) = 0{,}9999$

$0 - 0{,}9997 \cdot 1 = -0{,}9997$

λ_{13} esete HF!!!

Mintafeladat:

Határozza meg az alábbi mátrix Cholesky felbontását!

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 16 \\ 4 & 20 & 20 \\ 16 & 20 & 74 \end{bmatrix}$$

MEGOLDÁS:

$$A \xrightarrow{G.e.} U \longrightarrow \tilde{U} \longrightarrow \tilde{U}^T, \text{ ahol}$$

$$e_i^T \tilde{U} = \frac{1}{\sqrt{u_{ii}}} e_i^T U$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 & 16 \\ 4 & 20 & 20 \\ 16 & 20 & 74 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 4 & 4 & 16 \\ 0 & 16 & 4 \\ 0 & 4 & 10 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 4 & 4 & 16 \\ 0 & 16 & 4 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 16 \\ 0 & 16 & 4 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\cancel{\left(e_1^T \tilde{U} = [4, 4, 16] \cdot \frac{1}{\sqrt{4}} = [2, 2, 8] \text{ stb.}\right)}$$

$$\tilde{U} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 8 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}; \quad \tilde{U}^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 8 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

G.e. számításai:

$\boxed{k=1}$

$$\lambda_{21} = \frac{4}{4} = 1$$

$$20 - 1\cdot 4 = 16$$

$$20 - 1\cdot 16 = 4$$

$$\lambda_{31} = \frac{16}{4} = 4$$

$$20 - 4\cdot 4 = 4$$

$$74 - 4\cdot 16 = 10$$

$\boxed{k=2}$

$$\lambda_{32} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

$$10 - 0{,}25\cdot 4 = 9$$

$\tilde{U}$ sorai számítása:

$$e_1^T\tilde{U} = \frac{1}{\sqrt{4}}\cdot[4,\ 4,\ 16] = [2,\ 2,\ 8]$$

$$e_2^T\tilde{U} = \frac{1}{\sqrt{16}}[0,\ 16,\ 4] = [0,\ 4,\ 1]$$

$$e_3^T\tilde{U} = \frac{1}{\sqrt{9}}\cdot[0,\ 0,\ 9] = [0,\ 0,\ 3]$$

FELADATOK

2. Feladat. Egy szállítási programot mutat az S mátrix, melynek s_{ij} eleme az i-edik feladóhelyről a j-edik rendeltetési állomásra szállítandó mennyiséget jelenti tonnában. Az S mátrix sorvektorai rendre a következők:

$$[\ 3,\ 5,\ 4,\ 2\ ],\ [\ 3,\ 2,\ 1,\ 4\ ],\ [\ 5,\ 5,\ 2,\ 3\ ],\ [\ 5,\ 4,\ 5,\ 1\ ].$$

Határozza meg a szállítás egység árvektorát, ha a megrendelő szállítási költsége $[\ 3\,844,\ 3\,720,\ 3\,844,\ 3\,844\ ]^T$ (millió forintban).

3. Feladat. Egy ország 4 legszebb városában 4-4 múzeum van. Egy hétvégén a múzeumok látogatottságának alakulását (100 ember egységben) az alábbi A mátrixba foglalták össze, melynek sorai a városokra vonatkoznak rendre a következők:

$$[\ 2\ 1\ 1\ 1\ ],\ [\ 1\ 2\ 2\ 1\ ],\ [\ 1\ 2\ 3\ 2\ ],\ [\ 1\ 1\ 2\ 2\ ].$$

Határozza meg a belépőjegyek árát, ha a városonként a bevétel

$$[\ 2200\ \ 3200\ \ 4400\ \ 3400\ ]^T,$$

feltéve, hogy várostól függetlenül adott múzeumba a belépőjegyek ára állandó. Az együttható mátrix Cholesky felbontását!

4. Feladat. Egy üzemben 4 erőforrásból 4 terméket állítanak elő. Az A technológiai mátrix sorai, melyek az erőforrásokra vonatkoznak, rendre a következők:

$$[\ 9,\ 6,\ 5,\ 10\ ],\ [\ 1,\ 10,\ 5,\ 7\ ],\ [\ 8,\ 7,\ 1,\ 1\ ],\ [\ 1,\ 4,\ 7,\ 2\ ].$$

Mennyit termeljenek az egyes termékekből, ha az erőforrásonkénti felhasználások rendre: 4 080, 4 080, 3 060, 3 060? (*Megjegyezzük, hogy két eset lehetséges az A mátrixszal kapcsolatban: vagy a sorai vagy az oszlopai vonatkoznak az erőforrásokra.*)

5. Feladat. Egy salátabárban 3 hallgató az S_1, S_2, S_3 jelzésű salátából rendelt. Az 1. hallgató a különböző salátákból $[\ 1,\ 4,\ 2\ ]$, a második $[\ 1,\ 1,\ 4\ ]$, a harmadik pedig $[\ 3,\ 2,\ 1\ ]$ adagot rendelt. Határozza meg egy-egy salátaadag egységárát, ha a hallgatók rendre 700, 350, 700 forintot fizettek!

6. Feladat. Három étteremben 3 féle ételből egy napon eladott adagok számát mutatja az A mátrix, melynek sorai az éttermekre vonatkoznak rendre a következők:

$$[\ 70,\ 100,\ 100\ ],\ [\ 100,\ 70,\ 100\ ],\ [\ 100,\ 100,\ 70\ ].$$

Határozza meg az ételek egységárát forintban, ha mindegyik étterem napi bevétele 8 100 forint!

7. Feladat. A MOL, a TVK, a Richter és a MATÁV részvényeknél egy bizonyos hét első négy napján megfigyelték, hogy rendre

$$[\ 1,\ 3,\ 0,\ 3\ ],\ [\ 4,\ 2,\ 0,\ 2\ ],\ [\ 0,\ 1,\ 2,\ 1\ ],\ [\ 1,\ 4,\ 1,\ 0\ ]$$

darab cserélt gazdát a nyitás első 5 percében. (Általában a nyitás első 5 perce után az árak változásba mennek át.) Határozza meg a részvények nyitóárát, ha a napi megfigyelt időszakban mindegyik nap első 5 percében a bevétel 80 000 Ft! Mi állítható, ha a fenti sorok a részvényekre vonatkoznak és a bevétel feltételei nem változnak?

1. Feladat. Határozza meg az alábbi 2×2-es típusú mátrixok inverzét Gauss-Jordan eljárással és bázis transzformáció módszerrel (rövid és hosszú táblával)! A mátrixok sorai rendre a következők:

$$\text{i)}\ [\,-1,\ 4\,],\,[\,-4,\ 1\,]; \qquad \text{ii)}\ [\,-3,\ 1\,],\,[\,1,\ -2\,];$$
$$\text{iii)}\ [\,2,\ 4\,],\,[\,4,\ -3\,]; \qquad \text{iv)}\ [\,-4,\ 2\,],\,[\,-4,\ 1\,].$$

2. Feladat. Határozza meg az alábbi 3×3-as típusú mátrixok inverzét Gauss-Jordan eljárással és bázis transzformáció módszerrel (rövid és hosszú táblával)! A mátrixok sorai rendre a következők:

i) $[\,-4,\ -1,\ -1\,],\,[\,3,\ 2,\ 0\,],\,[\,-1,\ 4,\ 1\,]$;

ii) $[\,6,\ 1,\ 1\,],\,[\,3,\ 3,\ 3\,],\,[\,0,\ 2,\ 5\,]$;

iii) $[\,2,\ 3,\ 2\,],\,[\,6,\ 6,\ 2\,],\,[\,4,\ 4,\ 5\,]$;

iv) $[\,4,\ 4,\ 6\,],\,[\,6,\ 5,\ 5\,],\,[\,4,\ 3,\ 6\,]$.

3. Feladat. Határozza meg az alábbi 4×4-es típusú mátrixok inverzét Gauss-Jordan eljárással és bázis transzformáció módszerrel (rövid és hosszú táblával)! A mátrixok sorai rendre a következők:

i) $[\,1,\ 3,\ 3,\ 3\,],\,[\,0,\ 3,\ 4,\ 2\,],\,[\,2,\ 4,\ 4,\ 3\,],\,[\,0,\ 0,\ 2,\ 1\,]$;

ii) $[\,2,\ 2,\ 3,\ 2\,],\,[\,2,\ 3,\ 2,\ 2\,],\,[\,4,\ 0,\ 2,\ 2\,],\,[\,4,\ 2,\ 4,\ 0\,]$;

iii) $[\,6,\ 0,\ 4,\ 6\,],\,[\,0,\ 4,\ 4,\ 2\,],\,[\,1,\ 6,\ 2,\ 5\,],\,[\,6,\ 4,\ 5,\ 1\,]$;

iv) $[\,0,\ 1,\ 7,\ 9\,],\,[\,0,\ 0,\ 6,\ 9\,],\,[\,3,\ 1,\ 4,\ 6\,],\,[\,3,\ 2,\ 1,\ 3\,]$;

vi) $[\,0,\ 0,\ 3,\ 3\,],\,[\,1,\ 8,\ 1,\ 2\,],\,[\,7,\ 6,\ 4,\ 1\,],\,[\,9,\ 9,\ 6,\ 3\,]$.

Feladat. Határozza meg az alábbi mátrixok Cholesky felbontását! A mátrixok sorai rendre a következők:

i) [9, 2, 4, 0], [2 6 2 −2], [4, 2, 3, 0], [0, −2, 0, 6];

ii) [8, 2, −4, 0], [2, 6, −5, 1], [−4, −5, 5, −1], [0, 1, −1, 5];

iii) [5, 3, 3, 1], [3, 3, 4, 0], [3, 4, 11, 3], [1, 0, 3, 3];

iv) [1, 0, −1, 1], [0, 14, 6, −2], [−1, 6, 7, −3], [1, −2, −3, 2];

v) [1, 0, −1, 2], [0, 6, 4, 1], [−1, 4, 4, −1], [2, 1, −1, 5];

vi) [3, 1, 1, 2], [1, 5, 0, −1], [1, 0, 1, 1], [2, −1, 1, 3];

vii) [1, 1, −3, −3], [1, 2, −3, 1], [−3, −3, 12, 3], [−3, 1, 3, 160];

viii) [5, 2, 3, 1], [2, 5, 3, 2], [3, 3, 7, −3], [1, 2, −3, 5];

ix) [5, 1, 2, −2], [1, 6, 3, 2], [2, 3, 14, −1], [−2, 2, −1, 2];

x) [10, −1, −1, −3], [−1, 5, 2, 1], [−1, 2, 1, 2], [−3, 1, 2, 14].

Ellenőrzési lehetőségek

(i.) **Ha az $\widetilde{U}^T\widetilde{U}$ mátrixszorzat megegyezik az adott mátrixszal, akkor helyes a Cholesky-felbontás!!!!**

(ii.) **Ha az LU mátrixszorzat megegyezik az adott mátrixszal, akkor helyes az LU-felbontás!!!!**

(iii.) **A lineáris egyenletrendszer megoldása akkor helyes, ha az együttható mátrixszal való szorzata a jobboldali vektort eredményez!!!**

(iv.) **Akkor helyes a kapott inverz mátrix, ha az eredeti mátrixszal való szorzata az egységmátrix eredményez!!!!**