Gauss-módszer

A Gauss-módszer 2 fázisból áll.
Az I. fázisban az $Ax=b$ ($A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$) LER-t azonos átalakításokkal felső háromszög alakra hozzuk.
Majd a II. fázisban a kapott felső háromszög LER-t a visszahelyettesítő algoritmussal megoldjuk.

Megjegyzés: Ha az I. fázisban a k-adik lépésben redukálandó mátrix a_{kk} eleme zérus, de valamilyen i-re ($i=k+1,\dots,n$) az $a_{ik} \neq 0$, akkor a k-adik sort felcseréljük az i-edik sorral, és így haladunk tovább.

Felső háromszög lineáris egyenletrendszer visszahelyettesítő algoritmusa

$$
\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + \cdots + a_{1i}x_i + a_{1,i+1}x_{i+1} + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
\qquad \ddots \qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\
\qquad\qquad a_{ii}x_i + a_{i,i+1}x_{i+1} + \cdots + a_{in}x_n = b_i \\
\qquad\qquad\qquad \ddots \qquad\qquad \vdots \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad a_{nn}x_n = b_n
\end{array}
$$

Ennek együttható mátrixa

$$
A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{ii} \cdots & a_{in} \\ & & a_{nn} \end{bmatrix}
$$

Ha $\det(A) := a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn} \neq 0$

$\Rightarrow$

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$$

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j\right),$$

$$i = n-1, n-2, \ldots, 1$$

Mintafeladat:

Határozza meg az alábbi LER megoldását!

$$4x_1 + 8x_2 + 8x_3 = 12$$
$$-3x_2 + 18x_3 = 24$$
$$6x_3 = -24$$

MEGOLDÁS!

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 8 & -8 \\ 0 & -3 & 18 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}; \quad b = \begin{bmatrix} 12 \\ 24 \\ -24 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = 4 \cdot (-3) \cdot 6 = -72 \neq 0$$

$$x_3 = \frac{-24}{6} = -4$$

$$x_2 = \frac{1}{-3}\left(24 - 18 \cdot (-4)\right) = -32$$

$$x_1 = \frac{1}{4}\left(12 - 8 \cdot (-32) - (-8) \cdot (-4)\right)$$
$$= 59$$

$$x = \begin{bmatrix} 59 \\ -32 \\ -4 \end{bmatrix}$$

ELLENŐRZÉS!

$$A \cdot x = \begin{bmatrix} 4 & 8 & -8 \\ 0 & -3 & 18 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 59 \\ -32 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 24 \\ -24 \end{bmatrix}$$

Mintafeladat:

Egy üzletben 3 termék (T1, T2, T3) forgalma egy bizonyos hét utolsó ~~napján~~ 3 napján (P, SZ, V) az alábbi módon oszlik

	T1	T2	T3
P:	40	20	30
SZ:	–	10	40
V:	–	–	60

A napi bevételek rendre 190000, 80000 és 60000. Mennyi a termékek egység ára?

$\boxed{\text{MEGOLDÁS}}$

I. A a forgalommátrix, b a napi bevétel és $x=[x_1, x_2, x_3]^T$ az árvektor.

$$\Rightarrow A=\begin{bmatrix}40 & 20 & 30\\ 0 & 10 & 40\\ 0 & 0 & 60\end{bmatrix};\quad b=\begin{bmatrix}190000\\ 80000\\ 60000\end{bmatrix}.$$

KÖTELEZŐEN fel kell írni a matematikai modellt!!!

A modell:

$$\boxed{\begin{aligned} 40x_1+20x_2+30x_3&=190000\\ 10x_2+40x_3&=80000\\ 60x_3&=60000\end{aligned}}$$

((Megjegyzés: csak létező LER-t lehet megoldani!!!))!!!

Mivel

$$\det(A) = 40 \cdot 10 \cdot 60 = 24\,000 \neq 0$$

ezért

$$x_3 = \frac{60\,000}{60} = 1000$$

$$x_2 = \frac{1}{10}\left(80\,000 - 40 \cdot 1000\right) = 4000$$

$$x_1 = \frac{1}{40}\left(190\,000 - 20 \cdot 4000 - 30 \cdot 1000\right)$$

$$= 2000$$

$$\underline{\underline{x = \begin{bmatrix} 2000 \\ 4000 \\ 1000 \end{bmatrix}}}$$

Gauss elimináció algoritmusa

I. Fázis

$k = 1 : n-1$ (azaz $k = 1, 2, \dots, n-1$)

$i = k+1 : n$

$$\lambda_{ik} = \frac{a_{ik}}{a_{kk}}$$

$$b_i = \frac{b_k}{a_{kk}}$$

$j = k+1 : n$

$$a_{ij} = a_{ij} - \lambda_{ik} a_{kj}$$

II. Fázis

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$$

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=k+1}^{n} a_{ij} x_j \right)$$

$i = n-1, \dots, 1.$

Fontos megjegyzés I. fázissal kapcsolatban

Bővítsük az együttható mátrixot a jobboldali vektorral.

$$\left[\begin{array}{c|c} \text{az A együttható mátrix} & \text{a b jobboldali Vekt.} \end{array}\right] = [A \mid b] \in \mathbb{R}^{n \times (n+1)}$$

A k-adik lépésben az a_{kk} elemet, amivel osztunk majd főelemnek v. pivotnak nevezzük.

A pivotsor elemei: $a_{k1}, \dots, a_{kn}, b_k$

A pivot oszlopának elemei: $a_{1k}, \dots, a_{nk}$

A pivot alatti elemek : $a_{k+1,k}, \dots, a_{nk}$

A bővített ~~mátrix~~ táblázatban a k-adik lépésben kiválasztjuk főelemnek az a_{kk} és bekarikázzuk azt a_{kk}, ha nem zérus.

(Amennyiben ~~zérus~~ $a_{kk} = 0$, akkor úgy kell járni, ahogy már megjegyeztük).

Cél: a pivot alatti elemek kinullázása

Lépések: (1) előállítsuk a lambdát

$$\lambda_{ik} = \frac{a_{ik}}{a_{kk}} = \frac{\text{kinullázandó}}{\text{pivot}}$$

(2) $j = k+1 : n$, átszámoljuk az a_{ij}-t és az új értéket a_{ij}-be raktározzuk

$$a_{ij} = a_{ij} - \lambda_{ik} \cdot a_{kj}$$

(3) A táblázatok összefüggőknek kell feltüntetni, csak nyíl lehet 2-2 tábla között.

(4) A pivot bekarikázása után a pivotsort beírjuk az új táblázatba.

(5) Minden korábbi pivotsort is beírjuk az új táblázatba.

(6) Kinullázandó helyére 0-t írjunk.

Mintafeladat:

Egy üzemben 3 ~~erro~~ erőforrásból 3 terméket állítanak elő. Az A technológiai mátrix ~~melynek~~ sorai az erőforrásokra és oszlopai a termékekre vonatkoznak.

~~Az A sorai rendre~~:

Az A mátrix sorai rendre:

[2, 1, 1], [1, 2, 1] és [3, 2, 2].

(1) Mennyit termeljenek az egyes termékekből, ha az erőforrásonkénti felhasználások rendre: 1100; 900 és 1900.

(2) Határozza meg a technológiai mátrix

* LU-felbontását;

** determinánsát!

Gauss-módszerrel oldja meg a feladatot.

MEGOLDÁS

Leírjuk az együttható mátrixot és a jobb oldali vekt.:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}; \quad b = \begin{bmatrix} 1100 \\ 900 \\ 1900 \end{bmatrix}.$$

Legyen $x \in \mathbb{R}^3$ a keresett programvektor.

Írjuk fel a matematikai modellt!

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 1100 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 900 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 1900 \end{aligned}$$

① $\boxed{k=1}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 11 \\ 1 & 2 & 1 & 9 \\ 3 & 2 & 2 & 19 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 11 \\ 0 & 1{,}5 & 0{,}5 & 3{,}5 \\ 0 & 0{,}5 & 0{,}5 & 2{,}5 \end{array}\right] \xrightarrow{\boxed{k=2}} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 11 \\ 0 & 1{,}5 & 0{,}5 & 3{,}5 \\ 0 & 0 & 0{,}3334 & 1{,}3335 \end{array}\right]$$

$\lambda_{21} = \frac{1}{2} = 0{,}5$

$2 - 1 \cdot 0{,}5 = 1{,}5$

$1 - 1 \cdot 0{,}5 = 0{,}5$

$\cancel{\lambda_{31} = \frac{3}{2} = 1{,}5}$

$9 - 0{,}5 \cdot 11 = 3{,}5$

$\lambda_{31} = \frac{3}{2} = 1{,}5$

$2 - 1{,}5 \cdot 1 = 0{,}5$

$2 - 1{,}5 \cdot 1 = 0{,}5$

$19 - 1{,}5 \cdot 11 = 2{,}5$

$\lambda_{32} = \frac{0{,}5}{1{,}5} = 0{,}3333$

$0{,}5 - 0{,}3333 \cdot 0{,}5 = 0{,}3334$

$2{,}5 - 0{,}3333 \cdot 3{,}5 = 1{,}3335$

$$x_3 = \frac{1,3335}{0,3334} = 3,9997$$

$$x_2 = \frac{1}{1,5}\left(3,5 - 0,5 \cdot 3,9997\right) = 1,0001$$

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(11 - 1 \cdot 1,0001 - 1 \cdot 3,9997\right) = 3,0001$$

$$x = \begin{bmatrix} 3,0001 \\ 1,0001 \\ 3,9997 \end{bmatrix}$$

A feladatra a válasz árvektor: $\begin{bmatrix} 300,01 \\ 100,01 \\ 399,97 \end{bmatrix}$

(2)

$$U = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1,5 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0,3334 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0,5 & 1 & 0 \\ 0,5 & 0,3333 & 1 \end{bmatrix}$$

(3)

$$\det(A) = \det(LU) = \underbrace{\det(L)}_{=1} \cdot \det(U) \Rightarrow$$

$$\det(A) = \det(U) = 2 \cdot 1,5 \cdot 0,3334 = 1,0002$$

MEGJEGYZÉS:

Az utolsó táblázatból olvastuk a megoldásokat!!!