4.B12

1

A lin. alg. alaptétele

MEGJ: Legyenek

a és b ∈ $\mathbb{R}$ tetsz. #-k.

$\Longrightarrow$

az

$$a \cdot x + b \cdot y = 0$$

homogén egyenletnek

~~lét.~~ van nem-

triviális megoldása.

A. h12

2

Biz:

1.) Ha $a = b = 0$

$\Longrightarrow$ ~~triviális~~ nyilvánvaló a dolog.

2.) Ha pontosan egyik nulla pl. $a = 0$ és $b \neq 0$

$by = 0 \Rightarrow y = 0$

$\Longrightarrow$ így $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\underbrace{ax}_{=0} + by = 0$$

3.) Ha $a \neq 0$ és $b \neq 0$

$\Longrightarrow y = -\frac{a}{b}x$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\Longrightarrow$ Ha $x = 1 \Rightarrow y = -\frac{a}{b}$

Tehát $x = 1$ és $y = -\frac{a}{b}$

nem triviális megoldás. %

A lin. alg. alaptétele

Tétel (lin. alg. alaptétele)

Bármely $n+1$ db n-dim. vektor ~~lin. öss~~ lineárisan összefüggő.

Biz: (Teljes indukció)

T.f. igaz az állítás $(k-1)$-dim. vektorokra $(k \geq 2)$. ⟹ ~~bár~~ ~~∀en~~ A $(k-1) \times k$ típusú ~~mátrix lin. összefüggő.~~ mátrix oszlopai lin. összefüggők.

Legyen $A_{\cancel{1}} \in \mathbb{R}^{k \times (k+1)}$,

$$A_{\cancel{1}} = \left[\begin{array}{c|c} A & b \\ \hline c^T & \delta \end{array}\right], \quad \cancel{A \in \mathbb{R}^{(k-1) \times k}}, \quad \cancel{b \in \mathbb{R}^{k-1}},$$

ahol $A \in \mathbb{R}^{(k-1)\times k}$

$b \in \mathbb{R}^{k-1}$

$c \in \mathbb{R}^{k}$ és $\delta \in \mathbb{R}$.

Belátjuk, A_1 oszlopai lin. összefüggők. Ui.:

Ha ~~az~~ A_1 utolsó oszlopa zérusvektor $\Longrightarrow$ nincs mit bizonyítani. Feltehetjük tehát, $\begin{bmatrix} b \\ \delta \end{bmatrix} \neq 0$.

Továbbá feltehetjük azt is, ~~$\delta \neq 0$~~, ~~mert $\delta = 0$~~ ~~esetén~~ ~~abban az esetben~~ ~~lenne~~

$\delta \neq 0$, mert abban az esetben, ~~δ~~ amikor $\delta = 0$, A.k14

$\Longrightarrow$ biztosan
~~található~~ olyan $\underline{P} \in \mathbb{R}^{k \times k}$
permutáció mátrix | $\underline{P}A_1$
utolsó oszlopának utolsó eleme
nem zérus és A_1 oszlopai
~~lineáris összefüggése nem~~
~~változik.~~
lineáris [összefüggése/ függetlensége] nem
változik.

Most keressünk olyan
$\begin{bmatrix} x \\ \hline \sigma \end{bmatrix} \neq 0$ vektort $\left(x \in \mathbb{R}^k, \sigma \in \mathbb{R}\right)$

$$A_1 \begin{bmatrix} x \\ \sigma \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} A & b \\ \hline c^T & \delta \end{array}\right] \begin{bmatrix} x \\ \hline \sigma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ax + b\sigma \\ \hline c^T x + \delta\sigma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \hline 0 \end{bmatrix}$$

~~azaz~~ azaz.

$$\begin{cases} Ax + b\sigma = 0 \\ c^T x + \delta\sigma = 0 \Longrightarrow \sigma = -\frac{1}{\delta} c^T x \end{cases}$$

$$\Longrightarrow$$

$$Ax + b\left(-\frac{1}{\delta} c^T x\right) = 0$$

$$Ax - \frac{1}{\delta} b \left(c^T x\right) = 0$$

$$Ax - \frac{1}{\delta}\left(b c^T\right) x = 0$$

$$\left(A - \frac{1}{\delta} b c^T\right) x = 0$$

Nyilván $\mid A - \frac{1}{\delta} b c^T \in \mathbb{R}^{(k-1)\times k}$.

Az indukció feltevés miatt az $A - \frac{1}{\delta} b c^T$ mátrix oszlopai lin $\underline{\text{san}}$ összefüggők. Tehát

$\exists$ olyan $x_0 \neq 0$ /

$$\left(A - \frac{1}{\delta} b c^T\right) x_0 = 0.$$

(4.h16)

$\Longrightarrow \begin{bmatrix} x_0 \\ 0 \end{bmatrix} \neq 0$ /

$A_1 \begin{bmatrix} x_0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$ azaz

A_1 oszlopai lin. összefüggők.

Befejezésül, belátjuk / az állítás igaz $n = 1$. HF

Mi az 1×2-es típusú mátrixok alakja $[a_{11}, a_{12}]$ ahol $a_{11}, a_{12} \in \mathbb{R}$. De mivel $a_{11} x_1 + a_{12} x_2 = 0$ egyenletnek mindig lett nem zérus megoldás

$\Longrightarrow$ ~~$[a_{11}, a_{12}]$ lin. összefüggő,~~

a_{11}, a_{12} lin. összefüggők. ∘/∘

(4. h 15) ~~4. h 15~~

Tétel:

Bármely $n+r$ db n-dim. vektor (ahol $r \geq 1$), lin. függ. összefüggő.

Tétel: NO

Bármely r db n-dim. vektorhoz (ahol $1 \leq r < n$), $\exists\, x \neq 0$ vektor, amely $\perp$ az összes vektorra.

Mátrixok inverzei

def. (jobb inverz)
Az $X_j \in \mathbb{R}^{n \times m}$ mátrixot az $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mátrix jobb inverzének nev. ha

$$AX_j = I_m$$

def. (bal inverz)
Az $X_b \in \mathbb{R}^{n \times m}$ mátrixot az $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mátrix bal inverzének nev. ha $X_b A = I_n$.

All. Ha egy $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mátrixnak van bal és jobb inverze $\Rightarrow$ egyenlők.

Biz: $X_b = X_b I_m = X_b (A X_j) =$
$$= \underbrace{(X_b A)}_{I_n} X_j = I_n X_j = X_j.$$
q.e.d.

def: (mátrix inverze)

Az $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixot az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix inverzének nev. ha $XA = AX = I$

Jelölés: A^{-1}.

Meg: Ha az inverz mátrix lét. $\Longrightarrow$ az egyértelmű.

Áll.: Ha A és $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixok-nak lét. inverze $\Longrightarrow$

1. $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$
2. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T =: A^{-T}$

Biz:

1. $(AB)^{-1}(AB) =$

$(B^{-1} A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1} A) B =$
$= B^{-1} B = I$

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1}$$
$$= AA^{-1} = I.$$

Hasonlóképpen látható be a másik azonosságot! ./.

Tétel :

Ha $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mátrix sorai lineárisan összefüggők

$\Longrightarrow$

A - nak nem lét. jobb inverze.

Biz. t.f. lét. $X_j \in \mathbb{R}^{n \times m}$ jobb inverze az A mátrixnak.

$\Longrightarrow$

$$AX_j = I_m.$$

Mivel A sorai lin. összefüggők ezért $\exists\ y \in \mathbb{R}^m,\ y \neq 0$ /

$$y^T A = 0^T \in \mathbb{R}^n.$$

$\Longrightarrow$

$$y^T (AX_j) = y^T I_m$$

$$\underbrace{(y^T A)}_{\boxed{\overset{\|}{0^T}}} X_j = y^T I_m = y^T$$
$$\|$$
$$0^T$$

$\lightning$ mert $y \neq 0$.

./.

Tétel:

Ha $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ oszlopai lin. össze-függők

$\Longrightarrow$

A-nak ~~b~~ nincs bal inverze.

(Hasonlóképpen látható be mint az előző tétel.)

A·h21

~~**Tétel:**~~
~~Ha $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ mátrix oszlopai lin. ftlenek~~
~~$\Longrightarrow$ A^{-1} lét.~~
~~Biz~~

Tétel: Ha $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, akk.
az alábbi 3 áll. ekvivalens:
1.) A oszlopai lin. ftlenek.
2.) A sorai " " .
3.) Az A mátrixnak van
e inverze.

Def (szinguláris / nemszing. mátrix)
Ha az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixnak van inverze, akk <u>nemszingulárisnak</u> nev.
Ha nem lét. inverze, akk <u>szingulárisnak</u> nev.

Speciális mátrixok

A.h22

def (ortogonális mátrix)

Az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix ortogonálisnak nev., ha $A^{-1} = A^T$.

~~Példa~~

Áll: Ha $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ~~perm~~ egy permutáció mátrix $\Longrightarrow$ P ortogonális.

Áll. l. $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. (4. h24)
Akkor
$I - 2xx^T$ ortogonális
mátrix $\Longleftrightarrow$ $|x| = 1$.

Biz: T.f. $|x| = 1$.
Számoljuk ki
$$(I-2xx^T)^T (I-2xx^T) =$$
$$= I - 2xx^T - 2xx^T + 4(xx^T)(xx^T)$$
$$= I - 4(xx^T) + 4x(x^Tx)x^T$$
$$= I - 4xx^T + 4(x^Tx)xx^T$$
$$= I - 4xx^T + 4|x|^2 \cdot xx^T$$
$$= I - 4xx^T + 4xx^T = I,$$
azaz $(I-2xx^T)^T = (I-2xx^T)^{-1}$.

Fordítva: t.f. $I-2xx^T$ ortogonális
mátrix.

4. h 24

Mint az előbb

$(I-2xx^T)^T(I-2xx^T)=$

$= \underbrace{I-4xx^T+4|x|^2\cdot xx^T}_{\substack{\| \\ I}} \Rightarrow I$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow 4|x|^2\cdot xx^T-4xx^T=0 \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$4xx^T(|x|^2-1)=0$

Mivel $xx^T\neq 0$ a feltevés miatt, ezért

$|x|^2-1=0$, azaz

$|x|=1.$

Tehát ~~igaz~~ ezzel beláttuk az áll-t. ✓

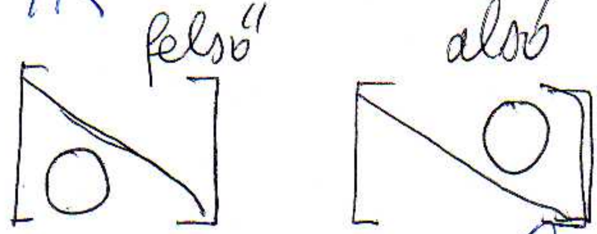
4. h25

Def: (elemi ortogonális mátrix)

Az $I-2xx^T$ mátrixot elemi ortogonális mátrixnak nev., ha $|x|=1$.

Def. (felső/alsó 3∡ mátrix)

Az $A=[a_{ij}]_{i,j=1}^{n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixot



1.) felső 3∡ mátrixnak nev. ha $a_{ij}=0$ $\forall$ $i>j$ esetén

2.) alsó 3∡ mátrixnak nev., ha $a_{ij}=0$ $\forall$ $i<j$ esetén.

3.) **Def** (egység 3∡ mátrix)

Egy $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 3∡ mátrixot egység 3∡ mátrixnak nev. ha $a_{ii}=1$ $i=1,\dots,n$.

Tétel

Az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ alsó, vagy felső $\triangle$ mátrix nemszinguláris $\Longleftrightarrow$ ha $a_{ii} \neq 0$ $\forall i = 1, \ldots, n$.

Def (pozitív/negatív definit)

Az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix

1.) pozitív definitnek nev., ha
$x^T A x > 0$ $(\forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0)$

2.) negatív definitnek nev., ha
$x^T A x < 0$ $(\forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0)$.

Áll. Pozitív/negatív definit mátrix transzponáltja is pozitív/negatív definit.

Biz.: Legyen $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$ tetsz.

$(x^T A^T) x = (Ax)^T x = x^T A x$

Skaláris szorzat kommut. miatt.

~~Pozitív (Neg.) def.ség~~ 5.4.2/D

~~def: $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ pozitív (neg.) definit, ha $x^T A x > 0$ ($x^T A x < 0$) $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.~~

Tétel: Ha $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ poz. vagy neg. definit $\Longrightarrow$ A^{-1} lét.

Biz: Csak a poz. def. esettel foglalkozunk, mert a másik esetnek bizonyítása hasonló.

Ue.: T.f. A pozitív def., de A oszlopai lin. összef.-gők $\Longrightarrow \exists x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ /

$$A x_0 = 0,$$

$$0 < x_0^T A x_0 = x_0^T \underbrace{(A x_0)}_{=0} = 0 \quad ↯ \quad \cdot/\cdot$$

5. h. 4 ~~5. h.~~ ~~4. h30~~

~~**Tétel:** Pozitív definit mátrixok fő minor-mátrixai is pozitív definitek.~~

Tétel: Legyen $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ $\forall$ mátrix.

1.) Ha A oszlopai lin. ftlenek

$\Longrightarrow$ $A^T A$ mátrix pozitív definit.

2.) Ha A sorai lin. ~~ft~~ ftlenek

$\Longrightarrow$

$A A^T$ mátrix pozitív definit.

Következmény: Legyen $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tetsz.

1.) Ha A oszlopai lin. ftlenek

$\Longrightarrow$ A-nak van bal inverze:

$$\cancel{A^T}\,(A^T A)^{-1} A^T$$

2.) Ha A sorai lin. ftlenek

$\Longrightarrow$ A-nak van jobb inverze:

$$A^T (A A^T)^{-1}$$