1. Mintafeladat: Igaz-e, hogy az

$S: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$$x \mapsto S(x) := \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 - x_2 \\ 2x_1 + x_2 \end{bmatrix}$$

leképezés lineáris? Ha igen írja le a mátrixát!

(Megoldás)

Megj.:
Az S leképezés úgy képezi le az $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ 2-dim vektort a 3-dim vektortérbe, hogy az x ~~vs~~ vektor S képének (mint 3-dim/elemű vektor)

első eleme: az x-nek 2. eleme

a kép második eleme: az x vekt. első és második elemének különbsége

a kép 3. eleme: az x vektor első elemének kétszerese + a második eleme.

A fenti megjegyzés után, vegyünk $u, v \in \mathbb{R}^2$ ~~és~~ vektort és $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ skalárt tetszőlegesen. Kiszámítjuk az

$$\alpha u + \beta v = \begin{bmatrix} \alpha u_1 + \beta v_1 \\ \alpha u_2 + \beta v_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$$ ~~vekt.~~ S képét.

Tehát, a megjegyzésnek megfelelően az $S(\alpha u + \beta v) \in \mathbb{R}^3$ vektor elemeit le tudjuk írni:

$$S(\alpha u+\beta v)=S\left(\begin{bmatrix}\alpha u_1+\beta v_1\\ \alpha u_2+\beta v_2\end{bmatrix}\right)=$$

$$=\begin{bmatrix}\alpha u_2+\beta v_2\\ \alpha u_1+\beta v_1-(\alpha u_2+\beta v_2)\\ 2(\alpha u_1+\beta v_1)+(\alpha u_2+\beta v_2)\end{bmatrix}$$

felbontjuk a zárójeleket.

$$=\begin{bmatrix}\alpha u_2+\beta v_2\\ \alpha u_1+\beta v_1-\alpha u_2-\beta v_2\\ 2\alpha u_1+2\beta v_1+\alpha u_2+\beta v_2\end{bmatrix}$$

összevonjuk α együttha- ~~tó ta~~ tójú tagokat, β-va hasonlóan

$$=\begin{bmatrix}\alpha u_2+\beta v_2\\ \alpha u_1-\alpha u_2+\beta v_1-\beta v_2\\ 2\alpha u_1+\alpha u_2+2\beta v_1+\beta v_2\end{bmatrix}$$

kiemelés

$$=\begin{bmatrix}\alpha u_2+\beta v_2\\ \alpha(u_1-u_2)+\beta(v_1-v_2)\\ \alpha(2u_1+u_2)+\beta(2v_1+v_2)\end{bmatrix}$$

← ez szépen látszik, hogy két vekt. összege

$$=\begin{bmatrix}\alpha u_2\\ \alpha(u_1-u_2)\\ \alpha(2u_1+u_2)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\beta v_2\\ \beta(v_1-v_2)\\ \beta(2v_1+v_2)\end{bmatrix}$$

← a 2 vektorból kiemeljük az α és β együtthatókat!!

$$=\alpha\underbrace{\begin{bmatrix}u_2\\ u_1-u_2\\ 2u_1+u_2\end{bmatrix}}_{S(u)}+\beta\underbrace{\begin{bmatrix}v_2\\ v_1-v_2\\ 2v_1+v_2\end{bmatrix}}_{S(v)}$$

$$=\alpha S(u)+\beta S(v)\Longrightarrow$$ S egy lineáris leképezés.

~~Az~~ S mátrixának meghatározása:

az

$$S(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 - x_2 \\ 2x_1 + x_2 \end{bmatrix}$$

~~kell~~ (az S képletéből kell felhasználni :))

$$= \begin{bmatrix} 0 \cdot x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \\ 2x_1 + x_2 \end{bmatrix}$$

ez egy mátrix és x vektor szorzata

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

és

$$A_S = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$ a leképezés mátrixa

---

<u>Megjegyzés</u>: $A_S = \left[S(e_1), S(e_2)\right]$ = képei

azaz, az i-edik egységvektorok S képei alkotják rendre a leképezés mátrixának oszlopai. Tehát

$$S(e_1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1-0 \\ 2\cdot 1+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}; \text{ és } S(e_2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0-1 \\ 2\cdot 0+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A_S = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Mintafeladat.

Az $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineáris transzformáció teljesíti

$$S(e_1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}; \quad S(e_2) = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad S(e_3) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

A $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lin. transzf. képlete legyen

$$T(x) = \begin{bmatrix} x_2 - 2x_1 \\ 2x_1 - x_3 \\ x_1 - 4x_2 \end{bmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}^3.$$

Határozza meg a $T \circ S$ és $S \circ T$ transzformációk mátrixát és képletét!

Megoldás

Az S mátrixa:

$$A_S = [S(e_1), S(e_2), S(e_3)] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ -4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

A T mátrixa:

$$A_T = [T(e_1), T(e_2), T(e_3)];$$

$$T(e_1) = \begin{bmatrix} 0 - 2 \\ 2 - 0 \\ 1 - 4 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$T(e_2) = T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 - 2 \cdot 0 \\ 2 \cdot 0 - 0 \\ 0 - 4 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$T(e_3) = T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 - 0 \\ 0 - 1 \\ 0 - 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A_T = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

$T \circ S$ mátrixa : $\cancel{A}$

$$A_{T \circ S} = A_T \cdot A_S = \begin{bmatrix} 3 & -4 & -3 \\ 4 & 1 & 2 \\ -12 & 9 & -2 \end{bmatrix}$$

$\forall x \in \mathbb{R}^3$

$$(T \circ S)(x) = A_{T \circ S}\, x = \begin{bmatrix} 3x_1 - 4x_2 - 3x_3 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 \\ -12x_1 + 9x_2 - 2x_3 \end{bmatrix}$$

$S \circ T$ mátrixa :

$$A_{S \circ T} = A_S \cdot A_T = \begin{bmatrix} 4 & -8 & -1 \\ -9 & -1 & 2 \\ 12 & -12 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(S \circ T)(x) = A_{S \circ T}\, x = \begin{bmatrix} 4x_1 - 8x_2 - x_3 \\ -9x_1 - x_2 + 2x_3 \\ 12x_1 - 12x_2 - x_3 \end{bmatrix}$$

3. Mintafeladat

Lineáris-e az alábbi leképezés?

$$S : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \longmapsto S\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 + 1 + x_3 \\ x_1 - x_2 + x_3 \end{bmatrix}$$

MEGOLDÁS

pl. $\alpha = 3$, $\beta = 2$, $u = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$; $v = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$

$$\alpha u + \beta v = 3\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 11 \end{bmatrix}$$

$$S(\alpha u + \beta v) = \begin{bmatrix} 7 + 3 + 1 + 11 \\ 7 - 3 + 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 \\ 15 \end{bmatrix}$$

$$\alpha S(u) = 3S\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = 3\begin{bmatrix} 1+1+1+1 \\ 1-1+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\beta S(v) = 2\begin{bmatrix} 2+1+1+4 \\ 2-1+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$\alpha S(u) + \beta S(v) = \begin{bmatrix} 12 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 16 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 \\ 13 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 22 \\ 15 \end{bmatrix}$$

Tehát $3S(u) + 2S(v) \neq S(2u + 3v)$,
azaz S nem lineáris.

5. Mintafeladat. *Az* $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *legyen egy olyan lineáris leképezés, melyre*

$$S(e_1) = [0,\ 3,\ -4]^T, \qquad S(e_2) = [5.1,\ 1,\ 9.05]^T.$$

A $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *lineáris transzformáció képlete legyen*

$$T\left([x_1,\ x_2,\ x_3]^T\right) = [x_2 - 3x_3,\ 2x_1 - x_3,\ 8x_1 - 4x_2]^T.$$

Határozza meg $T \circ S$ *leképezés értelmezési tartományát, értékkészletét mátrixát és képletét!*

Megoldás. Nyilvánvaló, hogy a $T \circ S$ az $\mathbb{R}^2$-t az $\mathbb{R}^3$-ba képezi le. Jelölje A_T a T leképezés mátrixát és A_S az S leképezés mátrixát. (Emlékeztetőül a harmadik mintafeladatban már meghatároztuk az A_S mátrixot.) Az A_T mátrix viszont leolvasható a megadott képletből.

$$A_S = \begin{bmatrix} 0 & 5.1 \\ 3 & 1 \\ -4 & 9.05 \end{bmatrix}; \qquad A_T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & -3 \\ 8 & -4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ekkor mint tudjuk, a $T \circ S$ lineáris leképezés mátrixa

$$A_T \cdot A_S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & -3 \\ 8 & -4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 5,10 \\ 3 & 1,00 \\ -4 & 9,05 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & -26,15 \\ 12 & -16,95 \\ -12 & 36,80 \end{bmatrix}.$$

Tehát a $T \circ S$ lineáris leképezés képlete:

$$A_T \cdot A_S \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15\,x_1 & - & 26,15\,x_2 \\ 12\,x_1 & - & 16,95\,x_2 \\ -12\,x_1 & + & 36,80\,x_2 \end{bmatrix}.$$

1. Feladat. Határozza meg az alábbi lineáris leképezések mátrixát!
i) $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$S\left([x_1,\ x_2]^T\right) = [x_1 + x_2,\ x_1 - 3x_2]^T;$$

ii) $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$,

$$S\left([x_1,\ x_2]^T\right) = [2x_1 - x_2,\ x_1 + x_2,\ x_1 + 3x_2]^T;$$

iii) $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$S\left([x_1,\ x_2,\ x_3]^T\right) = [x_1 + x_2 + x_3,\ x_1 + x_2,\ x_1]^T;$$

iv) $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$,

$$S\left([x_1,\ x_2,\ x_3]^T\right) = [2x_1 + x_2 + x_3,\ x_1 + x_2 + 3x_3]^T;$$

v) $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$S\left([x_1,\ x_2,\ x_3]^T\right) = [x_1 - x_2 + 3x_3,\ x_1 + x_2 + x_3,\ x_1]^T.$$

2. Feladat. Határozza meg a $T \circ S$ lineáris leképezés értelmezési tartományát, értékkészletét, mátrixát és képletét! Képezhető-e az $S \circ T$? Indokolja a válaszát! Ha képezhető, akkor adja meg az értelmezési tartományát, értékkészletét, mátrixát és képletét!

i) $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$S\left([x_1,\ x_2]^T\right) = [x_1 + x_2,\ x_1 - 3x_2]^T$$

és $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$,

$$S\left([x_1,\ x_2]^T\right) = [2x_1 - x_2,\ x_1 + x_2,\ x_1 + 3x_2]^T.$$

ii) $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$S\left([x_1,\ x_2,\ x_3]^T\right) = [x_1 + x_2 + x_3,\ x_1 + x_2 + 9x_3,\ 109.7\,x_1 - x_2 + 7x_3]^T$$

és $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$T\left([x_1,\ x_2,\ x_3]^T\right) = [2x_1 + x_2 + x_3,\ x_1 + x_2 + 3x_3,\ -5x_1 + 19x_2 - 39x_3]^T.$$

iii) $S : R^4 \to R^3$,

$$S\left([x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4]^T\right) = [x_2 - 3x_3,\ 2x_1 - x_2 + 3x_4,\ 8x_1 - 4x_2 + 3x_3 - x_4]^T$$

és $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$,

$$T\left([x_1,\ x_2,\ x_3]^T\right) = [2x_1 + x_2 + x_3,\ x_1 + x_2 + 4x_3,\ x_1 + x_2 + 3x_3,\ 2x_1 - 6x_2 - 2x_3]^T.$$

iv) $S : R^3 \to R^5$,

$$S\left([x_1,\ x_2,\ x_3]^T\right) = [x_2 - 3x_3,\ 2x_1 - x_2 + 3x_3,\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3,\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3,\ 3x_1 - x_3]^T$$

és $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$,

$$T(x) = [2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5,\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 - 2x_5,\ x_4,\ x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 4x_5]^T.$$

3. Feladat. Döntse el, hogy lineárisak-e az alábbi leképezések! Indokolja a válaszát!

i) $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$,

$$S\left([x_1,\ x_2,\ x_3]^T\right) = [x_1 + x_2,\ x_1 - 3x_2]^T;$$ (IGEN)

ii) $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$,

$$S\left([x_1,\ x_2,\ x_3]^T\right) = [0,\ 0,\ 0,\ 0]^T;$$ (IGEN)

iii) $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$,

$$S\left([x_1,\ x_2,\ x_3]^T\right) = [1,\ 1,\ 1,\ 1]^T;$$ (NEM)

iv) $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$,

$$S\left([x_1,\ x_2]^T\right) = [x_1 - x_2,\ x_2 + 1,\ 3x_1 - 2x_2]^T.$$ (NEM)