Lin. leképezések

A geom.-ban a művelettartó leképezéseket nev. lineárisaknak. ~~Itt~~ ebben az alfejezetben meg-keressük a mátrix műveletek és az $\mathbb{R}^n$ ~~halmaz~~ ~~vekté~~ halmaz lineáris leképezései közötti szoros kapcsolatát!!

Def1. (lin. leképezés)

A $T: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ leképezést lineárisnak nev., ha

$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$,

$\forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ és $\forall\ x, y \in \mathbb{R}^n$.

def2: (ekvivalens def.) ~ ~

\+ belátni / def 1 $\Longleftrightarrow$ def 2

3. h 19

3. h 16

def. (lin. lekép. λ-szorosa)

A $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lin. lekép. λ-szorosán a $\lambda T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$,

$$(\lambda T)(x) = \lambda T(x),$$

leképezést értjük.

---

def. (Összeg leképezés)

A $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ és $S: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lin. leképezések összegén az a $T+S: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ leképezést értjük, melyre

$$(T+S)(x) = T(x) + S(x)$$

$\forall x \in \mathbb{R}^n$.

---

def: (szorzat leképezés) 3. h17 $\boxed{3.\,h17}$

A $T:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ és $Q:\mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^p$ lin. leképezések szorzatán a

$Q \circ T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ leképezést

értjük, melyre

$$(Q \circ T)(x) = Q\left(T(x)\right), \ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Áll: $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$ esetén

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i \, e_{(i)}$$

(azaz $\forall$ vektor felírható standard egységvektorok lin. kombinációjaként).

Biz:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \dots + x_n \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= x_1 e^1_{(n)} + x_2 e^2_{(n)} + \dots + x_n e^n_{(n)}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} x_j e^j_{(n)} .$$

~~Tétel: $\forall$ lin. lekép. $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$~~

Tétel: $\forall$ $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lin. lekép. felírható a

$$T(x) = Ax \quad (x \in \mathbb{R}^n)$$

alakban (ahol $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ a T lekép. mátrixa).

Biz: l. $x \in \mathbb{R}^n$ tetsz. vekt. 3.h.19

Mivel $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ és / T lin. lekép

ezért $T(x) = \sum_{i=1}^{n} T(x_i \cdot e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot T(e_i)$.

Nyilván való, hogy

$T(e_1), T(e_2), \dots, T(e_n) \in \mathbb{R}^m$

Írjuk az

$A = [T(e_1), T(e_2), \dots, T(e_n)]$

~~vekt~~ oszlopvektor alakú mátrixot.

$\Longrightarrow A \cdot x = [T(e_1), \dots, T(e_n)] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} =$

$= x_1 T(e_1) + \dots + x_n T(e_n) = T(x)$

$\boxed{3.\ h\ 20}$

Áll: Ha a $T: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ lin. leképezés mátrixa $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$\Longrightarrow$

a T λ-szorosának mátrixa a λA.

Áll: Ha a $T: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ és $S: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ lin. leképezések mátrixa A és B,

$\Longrightarrow$

$T+S$ mátrixa $A+B$.

<u>Áll</u>: Ha a $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ és $Q : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^p$ lin. leképezések mátrixa ~~A és B~~ $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ és $B \in \mathbb{R}^{p \times m}$

$\Longrightarrow$

$Q \circ T$ ~~mát~~ $\left(: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p \right)$ mátrixa $BA \in \mathbb{R}^{p \times n}$.

<u>Biz</u>: Legyen $x \in \mathbb{R}^n$ tetsz. vekt.

$\Longrightarrow$

$$(Q \circ T)(x) = Q(T(x)) =$$
$$= Q(Ax) = B(Ax) = (BA)x.$$

~~Def: A $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ lin. leképezést lin. transzformációnak nev.~~

~~Meg: A lin. transzformáció~~

def (lin. transzformáció) 3. h22

A $T: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ lin. leképezést az $\mathbb{R}^n$ halmaz lin. transzformációjának nev.

Meg:

A lin. transzformáció mátrixa n-egyzetes