

Mátrixok particionálása

2. h1
3.

def:

l. $x \in \mathbb{R}^n$ tetsz., $x^{(1)} = [x_1, \dots, x_r]^T$ és
 $x^{(2)} = [x_{r+1}, \dots, x_n]^T$, $1 \leq r < n$.

Ha felírjuk

$$x = \begin{bmatrix} x^{(1)} \\ x^{(2)} \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \\ \hline x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

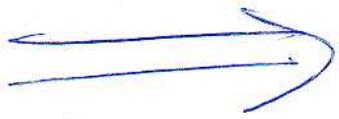
akkor az $x^{(1)}$, $x^{(2)}$ vektorokat az x vektor részvektorainak (parti-
ciójainak) neve.

A vektor felbontását particionálás-
nak neve.

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \\ \hline x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^{(1)} \\ x^{(2)} \end{bmatrix}$$

(3. h2)

All. Ha $x = \begin{bmatrix} x^{(1)} \\ x^{(2)} \end{bmatrix}$, $y = \begin{bmatrix} y^{(1)} \\ y^{(2)} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$
(also $x^{(1)} \in \mathbb{R}^k$, $y^{(1)} \in \mathbb{R}^k$), es $\lambda \in \mathbb{R}$
tutor.



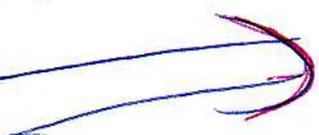
$$1. \quad x + y = \begin{bmatrix} x^{(1)} + y^{(1)} \\ x^{(2)} + y^{(2)} \end{bmatrix},$$

$$2. \quad \lambda x = \begin{bmatrix} \lambda x^{(1)} \\ \lambda x^{(2)} \end{bmatrix},$$

~~3. $x^T y = x^{(1)T} y^{(1)} + x^{(2)T} y^{(2)}$~~

$$3. \quad x^T y = \begin{bmatrix} x^{(1)T} & x^{(2)T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y^{(1)} \\ y^{(2)} \end{bmatrix} = \\ = x^{(1)T} y^{(1)} + x^{(2)T} y^{(2)}$$

All: legyen a $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$
 azonos módon felbontva mint
 az A mátrix, $x \in \mathbb{R}^n$ vekt, és
 $\lambda \in \mathbb{R}$ legyen tetsz-k.



$$1.) A+B = \begin{bmatrix} A_{11}+B_{11} & A_{12}+B_{12} \\ A_{21}+B_{21} & A_{22}+B_{22} \end{bmatrix}$$

$$2.) \lambda A = \begin{bmatrix} \lambda A_{11} & \lambda A_{12} \\ \lambda A_{21} & \lambda A_{22} \end{bmatrix}$$

$$3.) Ax = \begin{bmatrix} A_{11}x^{(1)} + A_{12}x^{(2)} \\ A_{21}x^{(1)} + A_{22}x^{(2)} \end{bmatrix},$$

~~ahol $x^{(1)} \in \mathbb{R}^r$~~

ahol $x = \begin{bmatrix} x^{(1)} \\ x^{(2)} \end{bmatrix},$

$x^{(1)} \in \mathbb{R}^r$

$x^{(2)} \in \mathbb{R}^{n-r}$

$A_{11}, B_{11} \in \mathbb{R}^{s \times r}$

All.: Legyenek

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

és

$$B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times p}$$

mátrixok, ahol $A_{11} \in \mathbb{R}^{s \times t}$ és

$$B_{11} \in \mathbb{R}^{t \times s}$$

$$\begin{array}{l}
 \longrightarrow \\
 AB = \left[\begin{array}{c|c}
 A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\
 \hline
 A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22}
 \end{array} \right] \\
 \in \mathbb{R}^{m \times p}
 \end{array}$$

, ahol

M

- $1 < s \leq m$
- $1 < t \leq n$
- $1 < \sigma \leq p$

Meg:

1.) Ha $r = m \Rightarrow A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \end{bmatrix}$
 1×2 -es blokkmátrixot kapunk,
 ahol $A_1 \in \mathbb{R}^{m \times r}$

2.) Ha $r = n \Rightarrow$

$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}$ 2×1 -es blokkmátrixot
 kapunk, ahol $A_1 \in \mathbb{R}^{s \times n}$.

Meg:

A blokkmátrixok szorzása
 ugyan úgy \mathbb{A} végberüheto!
 mint vekt-vekt, ~~mátrix~~
 vekt-mátrix-vekt, vagy
 mátrix-mátrix szorzásnál.

Pelda:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A_1} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}}_{A_2} = A_1 B_1 + A_2 B_2$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 6 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 6 & 10 \end{bmatrix}$$

MEG: ← FONTOS!!!

Ha A és B alkalmas blokkmatrixok úgy ^{hogy} A·B szorzat leh. ⇒ az A·B sorblokkjai #-a = A sorblokkjai #-val és AB oszlopblokkjai #-a = B oszlopblokkjai #-val

Fő minormátrixok

3. h 8

def: $(-|-)$

Az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix

$$A^{(r)} := [a_{ij}]_{i,j=1}^r \quad (1 \leq r \leq n)$$

részmátrixát az A mátrix r -edrendű fő minormátrixának nevezzük.

Példa: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$A^{(1)} = [2] \leftarrow$ első rendű fő minormátrix

$A^{(2)} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \leftarrow$ 2. orderű fő minormátrix

~~$A^{(3)} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \leftarrow$ 3. orderű $-|+$ $-|+$~~

Lin. függetlenség

A. h1

def: ($\lim_{\text{szám}}$ összefüggés)

1.) Az $\{a_1, \dots, a_n\} \subset \mathbb{R}^m$ vektorok $\lim_{\text{szám}}$ összefüggők ~~nev.~~, ha

~~az~~ \exists k olyan $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ számok amelyek nem mindegyike zérus, hogy

$$\sum_{j=1}^n x_j a_j = x_1 a_1 + \dots + x_n a_n = 0.$$

Öggyűthetőnek is nev.

2.) Ha nincsenek ilyen számok, akkor azt mondjuk, hogy $\{a^1, \dots, a^n\}$ vektorok \lim lineárisan függetlenek.

All.: Az $e_1, \dots, e_n \in \mathbb{R}^n$ standard egység vekt-~~orok~~ \lim ftlenek:

Besz: Ha $x_1 e_1 + \dots + x_n e_n = 0 \in \mathbb{R}^n \Rightarrow$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n x_i e_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ \vdots \\ x_n = 0 \end{cases} \quad \forall i$$

Kérdés:

Hogyan értelmezzük a lineáris függetlenséget?

Meg:

Az $\{a_1, \dots, a_n\} \in \mathbb{R}^m$ vektorok rendszer ~~lineárisan~~ lineárisan függetlenek ha abból, hogy

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j a_j = 0 \implies$$

↑ $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$.

(azaz az a_1, \dots, a_n vektorok lin. kombinációként állítják elő a nullvektort \forall a zérus vekt. ~~által~~
 ~~által~~ az a_1, \dots, a_n vekt.-k lin. komb. ^{ként})

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mátrixa
oszlopai lin.^{sem} összefüggők, ha
 $\exists x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ vekt., hogy

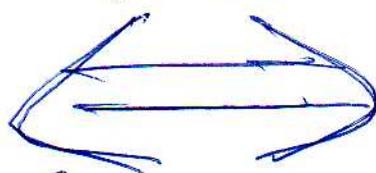
$$Ax = 0.$$

Ha nincs ilyen vekt.,
akkor ^{az} A oszlopait lin.^{sem}
függetlenek ~~nek~~ mondjuk

Tétel:

Az $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

függetlenek



mátrixa (oszlopai lin.^{sem})

~~lin.~~

$$Ax \neq 0 \quad (\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}).$$

Pelda

Az $a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$, $a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $a_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

vektorok lin. összefüggők,

mert

$$(-1) a_1 + (-1) a_2 + 2 a_3 + 1 \cdot a_4 =$$

$$= \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$Ax = 0$, $A = [a_1, \dots, a_4]$
 $x \in \mathbb{R}^4$

2. Pelda

Az

~~$e^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $e^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $e^3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$~~

~~egységvektorok lin. ft. nek,~~

~~kk. $\sum_{j=1}^3 x_j e^j = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$~~

~~ami csak akkor lehet zérusvektor ha $x_1 = x_2 = x_3 = 0$~~

3. Példa: Az

A.h5

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, a_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ vektorok}$$

lin. span stencel, mi

$$x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3 = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 - x_3 \\ x_2 + x_3 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

csak akkor nullvektor ha

$$x_1 + x_2 - x_3 = 0$$

$$x_2 + x_3 = 0$$

$$x_3 = 0$$

Visszont ezek az egyenlet-
rendszernek egyetlen
megoldása

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0$$

Meg

1. $\forall a \neq 0$ vekt. lin. span ftlen.
2. Ha az $\{a_1, \dots, a_n\} \subset \mathbb{R}^m$ vektorok között a nullvektor is szerepel, akkor a vektorok lin. összefüggők.
3. Hasonlóképpen definiálhatjuk az sorvektorok lineáris összefüggését ill. ftlenségét.

A. 17

Tétel. Az $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mátrixa
oszlopainak lin. összefüggése,
vagy lin. függetlensége nem
változik, ha az A sorait
felcseréljük.

Biz. a) T.f. A oszlopai linsem
összefüggők. $\implies \exists x \in \mathbb{R}^n$,
 $x \neq 0$ / $Ax = 0$, legyen
 $P \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ~~teljes~~ teljes permuta-
ció mátrix.

$$\implies P(Ax) = P \cdot 0$$

$$(PA)x = P \cdot 0 = 0$$

azaz PA oszlopai linsem
összefüggők.

b). T.f. A oszlopai linsem ftenek,
és l. $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$, teljes,

$$\implies Ax \neq 0 \implies P(Ax) =$$

$$(PA)x \neq 0 \text{ mert } P y \neq 0 \text{ ha } y \neq 0$$

Tétel:

Ha egy vektor előáll $\lim_{n \rightarrow \infty}$ $\lim_{n \rightarrow \infty}$ $\lim_{n \rightarrow \infty}$ vektorok
lim. kombinációként

\implies ez az előállítás egyértelmű.

Biz:

l -k $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^m$ $\lim_{n \rightarrow \infty}$ $\lim_{n \rightarrow \infty}$ $\lim_{n \rightarrow \infty}$ vektorok és t.f. $b = \sum_{j=1}^n \lambda_j a_j$

valamint $b = \sum_{j=1}^n s_j a_j$

$\implies \sum_{j=1}^n \lambda_j a_j = \sum_{j=1}^n s_j a_j$

$\sum_{j=1}^n \lambda_j a_j - \sum_{j=1}^n s_j a_j = 0 \in \mathbb{R}^m$

$\sum_{j=1}^n (\lambda_j - s_j) a_j = 0$

$\implies \lambda_j = s_j$ mert a_1, \dots, a_n lin. fle. $\lim_{n \rightarrow \infty}$

Tétel: legyenek $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^m$ 4. h. 9. 11
lim. sem ftlen vektorok.
T.f. $b \in \mathbb{R}^m$ olyan vekt./ az
 a_1, \dots, a_n, b vektorok lim. sem összfügg.

\longrightarrow
a b vektor egyértelműen előáll az
 a_1, \dots, a_n lineáris kombinációjaként.

Biz:
Mivel a_1, \dots, a_n, b lim. összfügg. vektorok
 $\Rightarrow \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n, \delta \in \mathbb{R}$ számok mind nem
zérus / $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n + \delta b = 0 \in \mathbb{R}^m$
Ha $\delta = 0 \Rightarrow \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n = 0 \in \mathbb{R}^m$
 $\Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ mert a_1, \dots, a_n
lim. sem ftlen vektorok. ∇

$\Rightarrow \delta \neq 0$
 $\Rightarrow \left(-\frac{\lambda_1}{\delta}\right)a_1 + \dots + \left(-\frac{\lambda_n}{\delta}\right)a_n = b \in \mathbb{R}^m$
és az előző tétel miatt ez az előállítás
egyértelmű. $\%$