Mátrixok particionálása

~~2~~ 3. h1

<u>def</u>:

l. $x \in \mathbb{R}^n$ tetsz., $x^{(1)} = [x_1, \to x_r]^T$ és $x^{(2)} = [x_{r+1}, \to x_n]^T$, $1 \le r < n$.

Ha felírjuk

$$x = \begin{bmatrix} x^{(1)} \\ x^{(2)} \end{bmatrix}$$

$$\cancel{x = \left[\begin{array}{c} x_1 \\ \vdots \\ x_r \\ \hline x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{array}\right]}$$

akkor az $x^{(1)}$, $x^{(2)}$ vektorokat az x vektor részvektorainak (partícióinak) nev.

A vektor felbontását particionálásnak nev.

$$x = \left[\begin{array}{c} x_1 \\ \vdots \\ x_r \\ \hline x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{array}\right] = \begin{bmatrix} x^{(1)} \\ \\ x^{(2)} \end{bmatrix}$$

3. h2

All. Ha $x = \begin{bmatrix} x^{(1)} \\ x^{(2)} \end{bmatrix}$, $y = \begin{bmatrix} y^{(1)} \\ y^{(2)} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ (ahol $x^{(1)} \in \mathbb{R}^r$, $y^{(1)} \in \mathbb{R}^r$), és $\lambda \in \mathbb{R}$ tetsz.

$\Longrightarrow$

1. $x + y = \begin{bmatrix} x^{(1)} + y^{(1)} \\ x^{(2)} + y^{(2)} \end{bmatrix}$,

2.) $\lambda x = \begin{bmatrix} \lambda x^{(1)} \\ \lambda x^{(2)} \end{bmatrix}$,

~~3.)~~ $\cancel{x^T y = x^{1T} y^1 + x^{2T} y^2}$

3. $x^T y = [x^{(1)T}, x^{(2)T}] \begin{bmatrix} y^{(1)} \\ y^{(2)} \end{bmatrix} =$

$= x^{(1)T} y^{(1)} + x^{(2)T} y^{(2)}$

Mátrixok particionálása

2×2-es blokkmátrix

Legyen $A \in \mathbb{R}^{m \times n}_{n-r}$ mátrix.

$$A = \begin{array}{c} \\ s \\ \\ m-s \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \cdots & a_{1r} & a_{1,r+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & & & \\ a_{s1} & \cdots & a_{sr} & a_{s,r+1} & \cdots & a_{sn} \\ \hline a_{s+1,1} & \cdots & a_{s+1,r} & a_{s+1,r+1} & \cdots & a_{s+1,n} \\ \vdots & & \vdots & & & \\ a_{m1} & & a_{m,r} & a_{m,r+1} & \cdots & a_{m,n} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix},$$

ahol $A_{11} \in \mathbb{R}^{s \times r} \Longleftrightarrow$

$\Downarrow$

$\Longleftrightarrow$

$A_{12} \in \mathbb{R}^{s \times (n-r)}$

$A_{21} \in \mathbb{R}^{(m-s) \times r}$ és $A_{22} \in \mathbb{R}^{(m-s) \times (n-r)}$.

3 · h4

<u>Áll:</u> Legyen a $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ azonos módon felbontva mint az A mátrix, ~~és~~ $x \in \mathbb{R}^n$ ~~vekt~~, és $\lambda \in \mathbb{R}$ legyenek tetsz-k.

$\Longrightarrow$

1.) $$A+B = \begin{bmatrix} A_{11}+B_{11} & A_{12}+B_{12} \\ A_{21}+B_{21} & A_{22}+B_{22} \end{bmatrix}$$

2.) $$\lambda A = \begin{bmatrix} \lambda A_{11} & \lambda A_{12} \\ \lambda A_{21} & \lambda A_{22} \end{bmatrix}$$

3.) $$Ax = \begin{bmatrix} A_{11}x^{(1)} + A_{12}x^{(2)} \\ A_{21}x^{(1)} + A_{22}x^{(2)} \end{bmatrix},$$

~~ahol $x^1 \in \mathbb{R}^r$~~.

ahol $x = \begin{bmatrix} x^{(1)} \\ x^{(2)} \end{bmatrix}$,

$x^{(1)} \in \mathbb{R}^r$

$x^{(2)} \in \mathbb{R}^{n-r}$, A_{11} és $B_{11} \in \mathbb{R}^{s \times r}$

3.5

Áll.: Legyenek

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

és

$$B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times p}$$

mátrixok, ahol $A_{11} \in \mathbb{R}^{s \times r}$ és $B_{11} \in \mathbb{R}^{r \times \sigma}$.

$$\Longrightarrow AB = \left[\begin{array}{c|c} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ \hline A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{array}\right] \in \mathbb{R}^{m \times p},$$

ahol

$$1 \le s \le m$$
$$1 \le r \le n$$
$$1 \le \sigma \le p$$

M

3. hó

Meg:

1.) Ha $\cancel{A} = m \Longrightarrow A = [A_1, A_2]$

1×2-es blokkmátrixot kapunk, ahol $A_1 \in \mathbb{R}^{m \times r}$

2.) Ha $r = n \Longrightarrow$

$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}$ 2×1-es blokkmátrixot kapunk, ahol $A_1 \in \mathbb{R}^{s \times n}$.

Meg:

A blokkmátrixok szorzása ugyan úgy ~~a~~ végbemehető!! mint vekt-vekt, ~~mátrix~~ vekt-mátrix-vekt, vagy mátrix-mátrix szorzásnál.

Példa

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]}_{A_1 \quad A_2} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{array}\right]^{B_1}_{B_2} = A_1 B_1 + A_2 B_2 =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 6 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 6 & 10 \end{bmatrix}$$

FONTOS!!!

MEG: ←

Ha A és B alkalmas blokkmatrixok úgy, hogy A·B szorzat lét. ⟹ az A·B sorblokkjai #-a = A sorblokkjai #-val és AB oszlopblokkjai #-a = B oszlopblokkjai #-val

Fő minormátrixok

def: (-||-)

Az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix

$A^{(r)} := [a_{ij}]_{i,j=1}^{r}$ $(1 \le r \le n)$

részmátrixát az A mátrix r-edrendű fő minormátrixának nev.

Példa: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$A^{(1)} = [2]$ ⇐ első rendű fő minormát

$A^{(2)} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ⇐ 2odrendű fő minormátr.

~~$A^{(3)} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ⇐ 3adrendű~~ -||- -||-

Lin. függetlenség

def: (lin. ~~$\,$~~ összefüggés)

1.) Az $\{a_1, \dots, a_n\} \subset \mathbb{R}^m$ vektorok linsan összefüggők ~~nev~~, ha ~~lé~~ $\exists_k$ olyan $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ számok amelyek nem mindegyike zérus, hogy

$$\sum_{j=1}^{n} x_j a^j = x_1 a_1 + \dots + x_n a_n = 0.$$

együtthatónak is nev.

2.) Ha nincsenek ilyen számok, akk azt mondjuk, hogy $\{a^1, \dots, a^n\}$ vektorok ~~lin.~~ lineárisan függetlenek.

Áll.: Az $e_1, \dots, e_n \in \mathbb{R}^n$ standard egység vekt-rok lin. ftlenek!

Biz.: Ha $x_1 e_1 + \dots + x_n e_n = 0 \in \mathbb{R}^n \Rightarrow$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} = \sum^{n} x_i e_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = 0 \\ \vdots \\ x_n = 0. \end{matrix} \quad \checkmark$$

4. h2

Kérdés:

Hogyan értelmezzük a lineáris függetlenséget?

Meg:

Az $\{a_1, \dots, a_n\} \in \mathbb{R}^m$ vektorok ~~rendszer~~ lineárisan függlenek ha abból, hogy

$$\underbrace{\sum_{j=1}^{n} x_j a_j = 0}_{} \Longrightarrow$$

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0.$$

(azaz az $a_1, \dots, a_n$ vektorok lin. kombinációként állítják elő a nullvektort) V. a zérus vekt. előáll az $a_1, \dots, a_n$ vekt-k lin. kombként)

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mátrix oszlopai lin.san összefüggők, ha $\exists\ x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ vekt., hogy

$$Ax = 0.$$

Ha nincs ilyen vekt., akk az A oszlopait lin.san függetleneknek ~~nev~~ mondjuk.

Tétel:

Az $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mátrix oszlopai lin. függetlenek $\Longleftrightarrow$ ~~ha~~

$$Ax \neq 0 \quad (\forall\, x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}).$$

1. Példa

Az $a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$, $a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $a_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

vektorok linsan összefüggők, mert

$$(-1)\, a_1 + (-1)\, a_2 + 2\, a_3 + 1 \cdot a_4 =$$

$$= \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$Ax = 0$, $A = [a^1, \dots, a^4]$ és $x \in \mathbb{R}^4$

---

2. Példa

Az $e^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $e^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $e^3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

egységvektorok lin. ftlenek, mert

$$\sum_{j=1}^{3} x_j e^j = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix},$$

~~ami~~ csak akkor ~~lehet~~ ~~zérusvektor~~ ha $x_1 = x_2 = x_3 = 0$

3. Példa: Az $\boxed{A.h5}$

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$ vektorok

lin. fan ftlenek, ui.

$$x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3 = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 - x_3 \\ x_2 + x_3 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

csak akkor nullvektor ha

$$x_1 + x_2 - x_3 = 0$$
$$x_2 + x_3 = 0$$
$$x_3 = 0$$

Viszont ennek az egyenletrendszernek egyetlen megoldása

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0$$

4. hó

Meg

1. $\forall$ $a \neq 0$ vekt. lineáris ftlen.

2. Ha az $\{a_1, \dots, a_n\} \subset \mathbb{R}^m$ vektorok között a nullvektor is szerepel, akk a vektorok lin. összefüggők.

3. Hasonlóképpen definiálhatjuk ~~sov~~ sorvektorok lineáris összefüggését ill. ftlenségét.

A. R7

<u>Tétel.</u> Az $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mátrix oszlopainak lin. összefüggése, vagy lin. ftlensége nem változik, ha az A sorait felcseréljük.

<u>Biz.</u> a) T.f. A oszlopai linsan összefüggők. $\Longrightarrow \exists x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$ / $Ax = 0$. Legyen $P \in \mathbb{R}^{m\times m}$ ~~teltz~~ tetsz. permutáció mátrix.

$$\Longrightarrow P(Ax) = P0$$
$$(PA)x = P0 = 0$$

azaz PA oszlopai linsan összefüggők.

b). T.f. A oszlopai linsan ftlenek, és l. $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$ tetsz.

$\Longrightarrow Ax \neq 0 \Longrightarrow P(Ax) = (PA)x \neq 0$ mert $Py \neq 0$ ha $y \neq 0$

Tétel:

Ha egy vektor előáll linsan ftlen vektorok lin. kombinációként

$\Longrightarrow$ ez az előállítás egyértelmű.

Biz:

l-k $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^m$ linsan ftlen vektorok és t.f. $b = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j a_j$,

valamint

$$b = \sum_{j=1}^{n} \delta_j \cdot a_j$$

$$\Longrightarrow \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cdot a_j = \sum_{j=1}^{n} \delta_j \cdot a_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cdot a_j - \sum_{j=1}^{n} \delta_j \cdot a_j = 0 \in \mathbb{R}^m$$

$$\sum_{j=1}^{n} \underbrace{(\lambda_j - \delta_j)}_{= 0} a_j = 0 \quad \forall j = 1, \dots, n$$

$\Longrightarrow$ $\cancel{\lambda_j}$ mert $a_1, \dots, a_n$ lin. ftlenek.

Tétel: legyenek $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^m$ lin. ftlen ~~v~~ektorok. $\boxed{4.\ h9. \ldots 11}$

T.f. $b \in \mathbb{R}^m$ olyan vekt / az $a_1, \dots, a_n, b$ vektorok lin.sam összfügg.

$\Longrightarrow$

a b vektor egyértelműen előáll az $a_1, \dots, a_n$ lineáris kombinációjaként.

Biz:

Mivel $a_1, \dots, a_n, b$ lin. összefügg. vektorok

$\Longrightarrow \exists\ \lambda_1, \dots, \lambda_n, \delta \in \mathbb{R}$ számok mind nem zérus / $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n + \delta b = 0 \in \mathbb{R}^m$.

Ha $\delta = 0 \Longrightarrow \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n = 0 \in \mathbb{R}^m$

$\Longrightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ mert $a_1, \dots, a_n$ lin.sam ftlen vektorok. $\lightning$.

$\Longrightarrow \delta \neq 0$.

$\Longrightarrow \left(-\frac{\lambda_1}{\delta}\right) a_1 + \dots + \left(-\frac{\lambda_n}{\delta}\right) a_n = b \in \mathbb{R}^m$

és az előző tétel miatt ez az előállítás egyértelmű. $\checkmark$