3. Mintafeladat. *A MALÉV 4 társasutazásra a hét utolsó három napjára különböző számú jegyet adott el. Ezeket az adatokat a következő táblába foglaltuk:*

	Kairó	Bonn	Pozsony	Genf
Péntek	20	19	28	12
Szombat	8	22	21	11
Vasárnap	30	9	19	14

Az egyes utazások ára: $p = \begin{bmatrix} 111, & 114, & 139, & 161 \end{bmatrix}^T$ *pénzegység. Írja fel mátrixművelettel, és számítsa ki, hogy*

a) mennyi volt a MALÉV bevétele naponta;

b) a három nap alatt az egyes városokba hány jegyet adtak el?

Határozza meg, hogy

c) mennyi jegyet adtak el szombaton;

d) mennyivel több a bevétel pénteken mint szombaton,

e) mennyi az egyes napokon szerzett bevétele a MALÉV-nak városonként?

Megoldás. Jelöljük A-val az eladott jegyek mátrixát, azaz legyen

$$A = \begin{bmatrix} 20 & 19 & 28 & 12 \\ 8 & 22 & 21 & 11 \\ 30 & 9 & 19 & 14 \end{bmatrix}.$$

a) Mivel a naponként eladott jegyek számát a sorok tartalmazzák, ezért az A mátrixot a p oszlopvektorral meg kell szorozni, vagyis az Ap utószorzást kell elvégezni. Tehát az A mátrix minden sorát skalárisan szorozzuk a p -vektorral, azaz rendre kiszámítjuk a következő skaláris szorzatokat:

$$\begin{bmatrix} 20, & 19, & 28, & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 111 \\ 114 \\ 139 \\ 161 \end{bmatrix} = 10\,210,$$

$$\begin{bmatrix} 8, & 22, & 21, & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 111 \\ 114 \\ 139 \\ 161 \end{bmatrix} = 8\ 086,$$

$$\begin{bmatrix} 30, & 9, & 19, & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 111 \\ 114 \\ 139 \\ 161 \end{bmatrix} = 9\,251.$$

Így

$$Ap = [10\,210,\ 8\,086,\ 9\,251]^T.$$

A napi bevétel tehát rendre $10\,210$, $8\,086$, $9\,251$ pénzegység volt.

b) A három nap alatt az egyes városokba való társasutazásra eladott jegyek vektora $\mathbf{1}^T A$. Ennek a műveletnek az elvégzéséhez a következő skaláris szorzatokat kell elvégezni:

$$\begin{bmatrix} 1, & 1, & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 \\ 8 \\ 30 \end{bmatrix} = 58,$$

$$\begin{bmatrix} 1, & 1, & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 19 \\ 22 \\ 9 \end{bmatrix} = 50,$$

$$\begin{bmatrix} 1, & 1, & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 28 \\ 21 \\ 19 \end{bmatrix} = 68,$$

$$\begin{bmatrix} 1, & 1, & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 \\ 11 \\ 14 \end{bmatrix} = 37.$$

Így $\mathbf{1}^T A = \begin{bmatrix} 58, & 50, & 68, & 37 \end{bmatrix}$.

c) A szombaton eladott jegyek száma: $e_2^T A\mathbf{1}$. Ezt a szorzást kétféleképpen is el lehet végezni: a szorzás asszociativitása miatt vagy az $\left(e_2^T A\right)\mathbf{1}$ műveletet vagy az $e_2^T\left(A\mathbf{1}\right)$ műveletet hajtjuk végre. Megmutatjuk mindkét esetet. Az $\left(e_2^T A\right)\mathbf{1}$ kiszámításához először az $e_2^T A$ sorvektort határozzuk meg, ami nem más, mint az A mátrix második sora, azaz $e_2^T A = \begin{bmatrix} 8, & 22, & 21, & 11 \end{bmatrix}$. Így

$$\left(e_2^T A\right)\mathbf{1} = \begin{bmatrix} 8, & 22, & 21, & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 62.$$

A második számítási lehetőségnél, vagyis az $e_2^T\left(A\mathbf{1}\right)$ skaláris szorzat meghatározásánál, először az $A\mathbf{1}$ oszlopvektort számítjuk ki:

$$A\mathbf{1} = \begin{bmatrix} 20 & 19 & 28 & 12 \\ 8 & 22 & 21 & 11 \\ 30 & 9 & 19 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 79 \\ 62 \\ 72 \end{bmatrix},$$

majd ezt a kapott vektort skalárisan összeszorozzuk a 3-dimenziós második egységvektorral:

$$e_2^T\left(A\mathbf{1}\right) = \begin{bmatrix} 0, & 1, & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 79 \\ 62 \\ 72 \end{bmatrix} = 62.$$

d) Mivel értelemszerűen az Ap vektor a napi bevételt jelöli, ezért a kérdéses bevételtöbblet:

$$\left(e_1^T - e_2^T\right)Ap = \begin{bmatrix} 1, & -1, & 0 \end{bmatrix} Ap.$$

Tehát

$$\begin{bmatrix} 1, & -1, & 0 \end{bmatrix} Ap = \begin{bmatrix} 1, & -1, & 0 \end{bmatrix} (Ap) = 10\,210 - 8\,086 = 2\,124,$$

így 2 124-gyel több a bevétel pénteken mint szombaton.

e) Utószorozzuk az eladott jegyek mátrixát az ármátrixszal (ahol az ármátrix az árvektor által generált diagonális mátrix). Tehát először képezzük az ármátrixot az árvektorból:

$$< p >= \begin{bmatrix} 111 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 114 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 139 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 161 \end{bmatrix}.$$

Ezután kiszámítjuk az $A < p >$ szorzatmátrixot. Megjegyezzük, hogy az $A < p >$ mátrix k-adik oszlopát megkapjuk, ha az A mátrix k-adik oszlopát megszorozzuk a $< p >$ diagonális mátrix főátlója k-adik elemével (vagyis a p vektor k-adik koordinátájával), ahol $k = 1, \ldots, 4$.

$$\begin{aligned} A < p > &= \begin{bmatrix} 20 & 19 & 28 & 12 \\ 8 & 22 & 21 & 11 \\ 30 & 9 & 19 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 111 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 114 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 139 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 161 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2\,220 & 2\,166 & 3\,892 & 1\,932 \\ 888 & 2\,508 & 2\,919 & 1\,771 \\ 3\,330 & 1\,026 & 2\,641 & 2\,254 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

4. Mintafeladat. *Határozzuk meg az AB szorzatot, ha*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 6 & 2 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}!$$

1. Megoldás. Rendre meghatározzuk az AB mátrix oszlopait, azaz rendre utószorozzuk az A mátrixot a B mátrix oszlopaival, mivel ezek a kapott oszlopvektorok alkotják az AB mátrix oszlopait.

$$A\,(Be_1) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 6 & 2 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix},$$

$$A\,(Be_2) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 6 & 2 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Tehát

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

2. Megoldás. Rendre meghatározzuk az AB mátrix sorait, azaz rendre előszorozzuk a B mátrixot az A mátrix soraival (mivel ezek a kapott sorvektorok alkotják az AB mátrix sorait).

$$\left(e_1^T A\right) B = \begin{bmatrix} 3, & 1, & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1, & 2 \end{bmatrix},$$

$$\left(e_2^T A\right) B = \begin{bmatrix} 6, & 2, & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2, & 4 \end{bmatrix}.$$

Tehát

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

3. Megoldás. Most az AB mátrixot diadikus mátrixok összegeként állítjuk elő, azaz az A mátrix oszlopait rendre diadikusan összeszorozzuk a B mátrix megfelelő soraival (mivel annyi oszlopa van az A mátrixnak ahány sora a B mátrixnak) és a diadikus mátrixokat összeadjuk.

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2, & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1, & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2, & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 6 & -6 \\ 12 & -12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8 & 8 \\ -16 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

4. Megoldás. A negyedik számítási módja az AB mátrixnak az, hogy az A mátrix minden sorát skalárisan összeszorozzuk a B mátrix minden oszlopával.

$$\begin{bmatrix} 3, & 1, & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = -1,$$

$$\begin{bmatrix} 3, & 1, & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = 2,$$

$$\begin{bmatrix} 6, & 2, & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = -2,$$

$$\begin{bmatrix} 6, & 2, & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = 4.$$

Így

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

5. Számítási technika. Végezetül megemlítjük, hogy a szorzatmátrix kiszámításakor könnyű hibázni, a kiszámított elemet rossz helyre írni. Ezért célszerű a két összeszorzandó mátrixot úgy elhelyezni, hogy a beírandó elem helyét ne lehessen eltéveszteni. Az alábbi elrendezés egy ilyen lehetőséget mutat, melyet *Falk-módszernek* neveznek:

$$\begin{array}{ccc|cc|} \multicolumn{3}{c|}{} & \multicolumn{2}{c}{\mathrm{B}} \\ \cline{4-5} & & & 2 & -2 \\ & & & 1 & 0 \\ & \mathrm{A} & & -2 & 2 \\ \hline \multicolumn{1}{|c}{3} & 1 & 4 & -1 & 2 \\ \multicolumn{1}{|c}{6} & 2 & 8 & -2 & 4 \\ \hline \end{array}.$$

Így az eredménymátrix eleme éppen annak a sornak és oszlopnak a kompozíciója, amelyeknek metszéspontjában áll. Tehát

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

1. Feladat. Az A mátrix i-edik sorának és j-edik oszlopának közös eleme a_{ij} jelentse az i-edik feladóhelyről a j-edik rendeltetési állomásra szállítandó egységnyi mennyiség szállítási költségét. Az A mátrix sorvektorai rendre a következők:

$$\left[\begin{array}{ccc} 49, & 107, & 65 \end{array}\right], \left[\begin{array}{ccc} 193, & 173, & 137 \end{array}\right], \left[\begin{array}{ccc} 77, & 45, & 100 \end{array}\right], \left[\begin{array}{ccc} 146, & 102, & 145 \end{array}\right].$$

Mindegyik feladóhelyről az 1. és a 2. rendeltetési állomásra 20-20, a 3. rendeltetési állomásra viszont 8 egységnyi kerül szállításra. Mennyi a szállítási költség feladóhelyenként?

2. Feladat. Három erőforrás felhasználásával három terméket gyártanak. A termékegységekre jutó ráfordításokat a következő táblázat mutatja:

	I. termék	II. termék	III. termék
1. erőforrás	4	2	6
2. erőforrás	4	0	8
3. erőforrás	4	5	0

Jelölje A a technológiai mátrixot (azaz a_{ij} jelentse azt, hogy az i-edik erőforrásból mennyi szükséges a j-edik termék 1 egységének előállításához). Továbbá legyen $p = \left[\begin{array}{ccc} 200, & 100, & 250 \end{array}\right]^T$ az egyes termékekből tervezett mennyiségeket mutató vektor (azaz a *programvektor*) és $k = \left[\begin{array}{ccc} 8000, & 9000, & 7000 \end{array}\right]^T$ az erőforrások kapacitását mutató vektor. Az erőforrások egységárvektora Ft-ban legyen $b = \left[\begin{array}{ccc} 10, & 12, & 50 \end{array}\right]^T$.

a) Határozza meg az egyes erőforrásokból felhasznált mennyiséget!

b) Határozza meg az egyes termékek egy egységének előállításához szükséges erőforrásköltséget, azaz a *fajlagos erőforrásköltséget*!

c) Határozza meg az egyes erőforrásokból fel nem használt mennyiséget!

d) Mennyi a program termelési összköltsége?

e) Képezze a következő szorzatokat és magyarázza meg jelentésüket: $p^T A^T$, $A^T b$.

3. Feladat. Egy üzem 3 erőforrásból 2 terméket állít elő. Az A technológiai mátrix sorai rendre a következők:

$$\left[\begin{array}{cc} 8, & 6 \end{array}\right], \left[\begin{array}{cc} 8, & 1 \end{array}\right], \left[\begin{array}{cc} 10, & 4 \end{array}\right].$$

Az erőforrások egységárvektora és az egy-egy termék eladási árvektora legyen:

$$x = \left[\begin{array}{ccc} 4, & 8, & 6 \end{array}\right]^T \quad \text{és} \quad y = \left[\begin{array}{cc} 914, & 460 \end{array}\right]^T.$$

a) Mennyi az üzem haszna termékenként?

b) Mekkora mennyiségre van szükség az egyes erőforrásokból, ha a programvektor $p = \left[\begin{array}{cc} 158, & 180 \end{array}\right]^T$?

c) Mennyi lesz az üzem összes haszna, ha a gyártott mennyiségeket el is adják?

4. Feladat. Egy üzemben 3 erőforrásból 4 terméket állítanak elő. Az A technológiai mátrix sorai rendre a következők:

$$\left[\begin{array}{cccc} 1, & 1, & 2, & 4 \end{array}\right], \left[\begin{array}{cccc} 4, & 3, & 2, & 1 \end{array}\right], \left[\begin{array}{cccc} 3, & 1, & 2, & 2 \end{array}\right].$$

Az erőforrások egységárvektora és a programvektor legyen:

$$\left[\begin{array}{ccc} 40, & 80, & 60 \end{array}\right]^T \quad \text{és} \quad \left[\begin{array}{cccc} 10, & 30, & 20, & 40 \end{array}\right]^T.$$

a) Mennyi az egyes termékek 1-1 darabjának előállítási költsége?

b) Mennyi szükséges az egyes erőforrásokból a program megvalósításához?

c) Számítsa ki, hogy hány egység kell az első erőforrásból ahhoz, hogy mindegyik termékből 1-1 darabot állítsanak elő.

d) Mennyi a második termék előállításának költsége (egységre vetítve és összesen a tervezett programnak megfelelően)?

5. Feladat. Egy forgalmas levesbárban 4 féle levesből eladott adagok számát az alábbi táblázatban foglalták össze:

	Gulyásleves	Bableves	Csontleves	Húsleves
Péntek	300	400	200	100
Szombat	400	400	400	200
Vasárnap	300	200	200	200

Az egyes levesek ára forintban $p^T = \left[\begin{array}{cccc} 400, & 300, & 200, & 100 \end{array} \right]$.

a) Mennyi a levesforgalom naponként forintban?

b) Mennyi a levesforgalom összesen a 3 nap alatt forintban?

c) Hány adag fogyott el az egyes levesfajtákból a három nap alatt együttesen?

d) Számítsa ki, hogy az egyes napokon gulyáslevesből hány adaggal adtak el többet, mint húslevesből.

e) Számítsa ki, hogy az egyes napokon gulyáslevesből mennyivel volt több a bevétel, mint húslevesből.