ALKALMAZOTT LINEÁRIS ALGEBRA PÉLDATÁR

AGBEKO KWAMI NUTEFE - GALÁNTAI AURÉL - NAGY TAMÁS

Szerkesztette: NAGY TAMÁS

2004

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Vektorok és mátrixok

1.1. Műveletek vektorokkal

Mintafeladat. Adott az alábbi két vektor

$$a = \begin{bmatrix} -23 \\ 21 \\ 22 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 25 \\ 10 \\ 34 \end{bmatrix}.$$

- Sámítsa ki a vektorok összegét, különbségét és 10-zel való szorzását:

  Megoldás

$$a + b = \begin{bmatrix} -23 \\ 21 \\ 22 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 25 \\ 10 \\ 34 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -23+25 \\ 21+10 \\ 22+34 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 31 \\ 56 \end{bmatrix}$$

$$a - b = \begin{bmatrix} -23 \\ 21 \\ 22 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 25 \\ 10 \\ 34 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -23-25 \\ 21-10 \\ 22-34 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -48 \\ 11 \\ -12 \end{bmatrix}$$

  Mivel a kivonás nem kommutatív, ezért a $b - a$ különbségvektort is kiszámítsuk:

$$b - a = \begin{bmatrix} 25 \\ 10 \\ 34 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -23 \\ 21 \\ 22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25-(-23) \\ 10-21 \\ 34-22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 48 \\ -11 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$$10a = 10 \begin{bmatrix} -23 \\ 21 \\ 22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10*(-23) \\ 10*21 \\ 10*22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -230 \\ 210 \\ 220 \end{bmatrix}$$

$$10b = 10 \begin{bmatrix} 25 \\ 10 \\ 34 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10*25 \\ 10*10 \\ 10*34 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 250 \\ 100 \\ 340 \end{bmatrix}$$

- Határozza meg az a^Tb skaláris és ab^T diadikus szorzatokat!

  Megoldás
  Megjegyzzük, hogy skaláris szorzat egy szám és a diadikus szorzat pedig egy matrix.

–

$$a^T b = \begin{bmatrix} -23; & 21; & 22 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 25 \\ 10 \\ 34 \end{bmatrix} = (-23) * 25 + 21 * 10 + 22 * 34 = 383$$

–

$$ab^T = \begin{bmatrix} -23 \\ 21 \\ 22 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 25; & 10; & 34 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -575 & -230 & -782 \\ 525 & 210 & 714 \\ 550 & 220 & 748 \end{bmatrix}$$

- Oldja meg az alábbi vektoregyenletet! $2x - 20a + 20b = 0 \in \mathbb{R}^3$

  Megoldás

$$2x - 20a + 20b = 0$$

$$2x = 20a - 20b$$

$$x = 10a - 10b = \begin{bmatrix} 10 * (-23) \\ 10 * 21 \\ 10 * 22 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 10 * 25 \\ 10 * 10 \\ 10 * 34 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -480 \\ 110 \\ -120 \end{bmatrix}$$

- Határozza meg az alábbi vektorműveletet: $v_2^T + v_{12}^T + v_{24}^T$, ha $v_j^T = \begin{bmatrix} \frac{24}{j}, & \frac{48}{j}, & \frac{-120}{j} \end{bmatrix}$, $j \in \mathbb{N}$.

  Megoldás Állítsuk elő a v_2, v_{12} és v_{24} vektorokat úgy, hogy a rekurziós formulában behelyettesítjük rendre $j = 2$, $j = 12$ és $j = 24$.

$$v_2 = \begin{bmatrix} 12 \\ 24 \\ -60 \end{bmatrix}; \quad v_{12} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -10 \end{bmatrix}; \quad v_{24} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$v_2^T + v_{12}^T + v_{24}^T = \begin{bmatrix} 12 \\ 24 \\ -60 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12+2+1 \\ 24+4+2 \\ -60-10-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 30 \\ -75 \end{bmatrix}$$

1. Feladat. Határozza meg az alábbi összegvektorokat:

a) $v_2^T + v_{12}^T + v_{24}^T$, ha $v_j^T = \begin{bmatrix} \frac{24}{j}, & \frac{48}{j}, & \frac{-120}{j} \end{bmatrix}$, $j \in \mathbb{N}$;

b) $\sum\limits_{k=1}^{5} (-1)^k k v_k^T$, ha $v_k^T = \begin{bmatrix} \frac{100}{2k}, & \frac{-300}{3k}, & \frac{-120}{k} \end{bmatrix}$, $k \in \mathbb{N}$;

c) $\sum\limits_{j=1}^{4} v_j$, ha $v_k^T = \begin{bmatrix} -\frac{k^2}{2k-1}, & \frac{2k-5}{3k-1}, & \frac{20}{k+1} \end{bmatrix}$, $k \in \mathbb{N}$;

d) $\sum\limits_{k=2}^{5} (-2)^{k-2} (k-1) v_k$, ha $v_k^T = \begin{bmatrix} \frac{10}{4(k-1)}, & \frac{5}{k-1}, & \frac{20}{k-1}, & k^2 - k \end{bmatrix}$, $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$;

e) $\sum\limits_{k=1}^{5} v_{10k}$, ha $v_k^T = \begin{bmatrix} \frac{7\,200}{2k}, & \frac{1\,200}{3k}, & \frac{600}{k} \end{bmatrix}$, $k \in \mathbb{N}$;

2. Feladat. Oldja meg az alábbi vektor egyenleteket!

a) $v_2 + x = v_1$, ahol $v_k^T = \begin{bmatrix} \frac{2}{2k}, & \frac{-4}{3k}, & \frac{5}{k-5} \end{bmatrix}$, $k \in \mathbb{N} \setminus \{5\}$;

b) $-v_{20} + x + v_{30} = v_{10}$, ahol $v_k^T = \begin{bmatrix} \frac{100}{2k}, & \frac{-300}{3k}, & \frac{-120}{k} \end{bmatrix}$, $k \in \mathbb{N}$;

c) $v_1 + y - v_9 = v_4$, ahol $v_k^T = \begin{bmatrix} -\frac{k^2}{2k-1}, & \frac{2k-5}{3k-1}, & \frac{20}{k+1} \end{bmatrix}$, $k \in \mathbb{N}$;

d) $v_2 + y - v_4 = v_3$, ahol $v_k^T = \begin{bmatrix} \frac{10}{4k-1}, & \frac{5}{k}, & \frac{20}{k-1}, & k^2 - k \end{bmatrix}$, $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$;

e) $v_{30} + y - v_{20} = v_{60}$, ahol $v_k^T = \begin{bmatrix} \frac{90}{2k}, & \frac{2}{3k}, & \frac{90}{k} \end{bmatrix}$, $k \in \mathbb{N}$;

1.1.1. Skaláris szorzás

Feladat. Számítsa ki az alábbi skaláris szorzatokat:

a) $v_{k+1}^T v_k$, $k \in \{1, \ldots, 10\}$, ha $v_k^T = \begin{bmatrix} \frac{2}{2k}, & \frac{3k}{5}, & \frac{60}{k} \end{bmatrix}$, $k \in \mathbb{N}$;

b) $v_{100k}^T v_{10k}$, $k \in \{1, \ldots, 10\}$, ha $v_k^T = \begin{bmatrix} \frac{7200}{2k}, & \frac{1200}{3k}, & \frac{600}{k} \end{bmatrix}$, $k \in \mathbb{N}$.

1.2. Műveletek mátrixokkal

1.2.1. Összeadás

1. Feladat. Adja össze az alábbi mátrixokat!

1.) $\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 7 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -88 & 31 \\ -16 & -100 \\ -34 & 51 \end{bmatrix}.$ 2.) $\begin{bmatrix} -90 & -65 \\ -22 & -4 \\ -41 & -3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 7 & 7 \\ -7 & 4 \end{bmatrix}.$

3.) $\begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ -5 & 5 & -7 \\ 1 & -1 & 3 \\ 8 & 3 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -9 & -6 & 3 \\ 9 & -9 & -5 \\ 6 & 0 & 1 \\ -7 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$ 4.) $\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 9 & -7 \\ -7 & -3 \\ -7 & -2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 67 \\ 25 & 61 \\ 61 & 6 \\ 23 & 0 \end{bmatrix}.$

2. Feladat. Oldja meg az $A + X = B$ mátrixegyenletet, ha

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 51 \\ -15 & 49 \\ 30 & -37 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad B = \begin{bmatrix} 44 & 85 \\ -31 & -44 \\ -54 & 82 \end{bmatrix}.$$

3. Feladat. Számítsa ki az $A + A^T$ és $A - A^T$ mátrixot, ha

$$A = \begin{bmatrix} -178 & -151 & 191 \\ -7 & 20 & -184 \\ 125 & -121 & 21 \end{bmatrix}!$$

3. Mintafeladat. *A MALÉV 4 társasutazásra a hét utolsó három napjára különböző számú jegyet adott el. Ezeket az adatokat a következő táblába foglaltuk:*

	Kairó	Bonn	Pozsony	Genf
Péntek	20	19	28	12
Szombat	8	22	21	11
Vasárnap	30	9	19	14

Az egyes utazások ára: $p = \begin{bmatrix} 111, & 114, & 139, & 161 \end{bmatrix}^T$ *pénzegység. Írja fel mátrixművelettel, és számítsa ki, hogy*

a) mennyi volt a MALÉV bevétele naponta;
b) a három nap alatt az egyes városokba hány jegyet adtak el?
Határozza meg, hogy
c) mennyi jegyet adtak el szombaton;
d) mennyivel több a bevétel pénteken mint szombaton,
e) mennyi az egyes napokon szerzett bevétele a MALÉV-nak városonként?

Megoldás. Jelöljük A-val az eladott jegyek mátrixát, azaz legyen

$$A = \begin{bmatrix} 20 & 19 & 28 & 12 \\ 8 & 22 & 21 & 11 \\ 30 & 9 & 19 & 14 \end{bmatrix}.$$

a) Mivel a naponként eladott jegyek számát a sorok tartalmazzák, ezért az A mátrixot a p oszlopvektorral meg kell szorozni, vagyis az Ap utószorzást kell elvégezni. Tehát az A mátrix minden sorát skalárisan szorozzuk a p -vektorral, azaz rendre kiszámítjuk a következő skaláris szorzatokat:

$$\begin{bmatrix} 20, & 19, & 28, & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 111 \\ 114 \\ 139 \\ 161 \end{bmatrix} = 10\,210,$$

$$\begin{bmatrix} 8, & 22, & 21, & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 111 \\ 114 \\ 139 \\ 161 \end{bmatrix} = 8\ 086,$$

$$\begin{bmatrix} 30, & 9, & 19, & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 111 \\ 114 \\ 139 \\ 161 \end{bmatrix} = 9\,251.$$

Így

$$Ap = [10\,210,\ 8\,086,\ 9\,251]^T.$$

A napi bevétel tehát rendre 10 210, 8 086, 9 251 pénzegység volt.

b) A három nap alatt az egyes városokba való társasutazásra eladott jegyek vektora $\mathbf{1}^T A$. Ennek a műveletnek az elvégzéséhez a következő skaláris szorzatokat kell elvégezni:

$$\begin{bmatrix} 1, & 1, & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 \\ 8 \\ 30 \end{bmatrix} = 58,$$

$$\begin{bmatrix} 1, & 1, & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 19 \\ 22 \\ 9 \end{bmatrix} = 50,$$

$$\begin{bmatrix} 1, & 1, & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 28 \\ 21 \\ 19 \end{bmatrix} = 68,$$

$$\begin{bmatrix} 1, & 1, & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 \\ 11 \\ 14 \end{bmatrix} = 37.$$

Így $\mathbf{1}^T A = \begin{bmatrix} 58, & 50, & 68, & 37 \end{bmatrix}$.

c) A szombaton eladott jegyek száma: $e_2^T A\mathbf{1}$. Ezt a szorzást kétféleképpen is el lehet végezni: a szorzás asszociativitása miatt vagy az $\left(e_2^T A\right)\mathbf{1}$ műveletet vagy az $e_2^T\left(A\mathbf{1}\right)$ műveletet hajtjuk végre. Megmutatjuk mindkét esetet. Az $\left(e_2^T A\right)\mathbf{1}$ kiszámításához először az $e_2^T A$ sorvektort határozzuk meg, ami nem más, mint az A mátrix második sora, azaz $e_2^T A = \begin{bmatrix} 8, & 22, & 21, & 11 \end{bmatrix}$. Így

$$\left(e_2^T A\right)\mathbf{1} = \begin{bmatrix} 8, & 22, & 21, & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 62.$$

A második számítási lehetőségnél, vagyis az $e_2^T\left(A\mathbf{1}\right)$ skaláris szorzat meghatározásánál, először az $A\mathbf{1}$ oszlopvektort számítjuk ki:

$$A\mathbf{1} = \begin{bmatrix} 20 & 19 & 28 & 12 \\ 8 & 22 & 21 & 11 \\ 30 & 9 & 19 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 79 \\ 62 \\ 72 \end{bmatrix},$$

majd ezt a kapott vektort skalárisan összeszorozzuk a 3-dimenziós második egységvektorral:

$$e_2^T\left(A\mathbf{1}\right) = \begin{bmatrix} 0, & 1, & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 79 \\ 62 \\ 72 \end{bmatrix} = 62.$$

d) Mivel értelemszerűen az Ap vektor a napi bevételt jelöli, ezért a kérdéses bevételtöbblet:

$$\left(e_1^T - e_2^T\right) Ap = \begin{bmatrix} 1, & -1, & 0 \end{bmatrix} Ap.$$

Tehát

$$\begin{bmatrix} 1, & -1, & 0 \end{bmatrix} Ap = \begin{bmatrix} 1, & -1, & 0 \end{bmatrix} (Ap) = 10\,210 - 8\,086 = 2\,124,$$

így 2 124-gyel több a bevétel pénteken mint szombaton.

e) Utószorozzuk az eladott jegyek mátrixát az ármátrixszal (ahol az ármátrix az árvektor által generált diagonális mátrix). Tehát először képezzük az ármátrixot az árvektorból:

$$< p >= \begin{bmatrix} 111 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 114 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 139 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 161 \end{bmatrix}.$$

Ezután kiszámítjuk az $A < p >$ szorzatmátrixot. Megjegyezzük, hogy az $A < p >$ mátrix k-adik oszlopát megkapjuk, ha az A mátrix k-adik oszlopát megszorozzuk a $< p >$ diagonális mátrix főátlója k-adik elemével (vagyis a p vektor k-adik koordinátájával), ahol $k = 1, \ldots, 4$.

$$\begin{aligned} A < p > &= \begin{bmatrix} 20 & 19 & 28 & 12 \\ 8 & 22 & 21 & 11 \\ 30 & 9 & 19 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 111 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 114 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 139 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 161 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2\,220 & 2\,166 & 3\,892 & 1\,932 \\ 888 & 2\,508 & 2\,919 & 1\,771 \\ 3\,330 & 1\,026 & 2\,641 & 2\,254 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

4. Mintafeladat. *Határozzuk meg az AB szorzatot, ha*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 6 & 2 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}!$$

1. Megoldás. Rendre meghatározzuk az AB mátrix oszlopait, azaz rendre utószorozzuk az A mátrixot a B mátrix oszlopaival, mivel ezek a kapott oszlopvektorok alkotják az AB mátrix oszlopait.

$$A\,(Be_1) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 6 & 2 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix},$$

$$A\,(Be_2) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 6 & 2 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Tehát

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

2. Megoldás. Rendre meghatározzuk az AB mátrix sorait, azaz rendre előszorozzuk a B mátrixot az A mátrix soraival (mivel ezek a kapott sorvektorok alkotják az AB mátrix sorait).

$$\left(e_1^T A\right) B = \begin{bmatrix} 3, & 1, & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1, & 2 \end{bmatrix},$$

$$\left(e_2^T A\right) B = \begin{bmatrix} 6, & 2, & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2, & 4 \end{bmatrix}.$$

Tehát

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

3. Megoldás. Most az AB mátrixot diadikus mátrixok összegeként állítjuk elő, azaz az A mátrix oszlopait rendre diadikusan összeszorozzuk a B mátrix megfelelő soraival (mivel annyi oszlopa van az A mátrixnak ahány sora a B mátrixnak) és a diadikus mátrixokat összeadjuk.

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2, & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1, & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2, & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 6 & -6 \\ 12 & -12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8 & 8 \\ -16 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

4. Megoldás. A negyedik számítási módja az AB mátrixnak az, hogy az A mátrix minden sorát skalárisan összeszorozzuk a B mátrix minden oszlopával.

$$\begin{bmatrix} 3, & 1, & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = -1,$$

$$\begin{bmatrix} 3, & 1, & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = 2,$$

$$\begin{bmatrix} 6, & 2, & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = -2,$$

$$\begin{bmatrix} 6, & 2, & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = 4.$$

Így

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

5. Számítási technika. Végezetül megemlítjük, hogy a szorzatmátrix kiszámításakor könnyű hibázni, a kiszámított elemet rossz helyre írni. Ezért célszerű a két összeszorzandó mátrixot úgy elhelyezni, hogy a beírandó elem helyét ne lehessen eltéveszteni. Az alábbi elrendezés egy ilyen lehetőséget mutat, melyet *Falk-módszernek* neveznek:

$$\begin{array}{ccc|cc} \cline{4-5} & & & 2 & -2 \\ & & & 1 & 0 \\ & & & -2 & 2 \\ \hline 3 & 1 & 4 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 8 & -2 & 4 \\ \hline \end{array}.$$

Így az eredménymátrix eleme éppen annak a sornak és oszlopnak a kompozíciója, amelyeknek metszéspontjában áll.

1. Feladat. Az A mátrix i-edik sorának és j-edik oszlopának közös eleme a_{ij} jelentse az i-edik feladóhelyről a j-edik rendeltetési állomásra szállítandó egységnyi mennyiség szállítási költségét. Az A mátrix sorvektorai rendre a következők:

$$\begin{bmatrix} 49, & 107, & 65 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 193, & 173, & 137 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 77, & 45, & 100 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 146, & 102, & 145 \end{bmatrix}.$$

Mindegyik feladóhelyről az 1. és a 2. rendeltetési állomásra 20-20, a 3. rendeltetési állomásra viszont 8 egységnyi kerül szállításra. Mennyi a szállítási költség feladóhelyenként?

2. Feladat. Három erőforrás felhasználásával három terméket gyártanak. A termékegységekre jutó ráfordításokat a következő táblázat mutatja:

	I. termék	II. termék	III. termék
1. erőforrás	4	2	6
2. erőforrás	4	0	8
3. erőforrás	4	5	0

Jelölje A a technológiai mátrixot (azaz a_{ij} jelentse azt, hogy az i-edik erőforrásból mennyi szükséges a j-edik termék 1 egységének előállításához). Továbbá legyen $p = \begin{bmatrix} 200, & 100, & 250 \end{bmatrix}^T$ az egyes termékekből tervezett mennyiségeket mutató vektor (azaz a *programvektor*) és $k = \begin{bmatrix} 8000, & 9000, & 7000 \end{bmatrix}^T$ az erőforrások kapacitását mutató vektor. Az erőforrások egységárvektora Ft-ban legyen $b = \begin{bmatrix} 10, & 12, & 50 \end{bmatrix}^T$.

a) Határozza meg az egyes erőforrásokból felhasznált mennyiséget!

b) Határozza meg az egyes termékek egy egységének előállításához szükséges erőforrásköltséget, azaz a *fajlagos erőforrásköltséget*!

c) Határozza meg az egyes erőforrásokból fel nem használt mennyiséget!

d) Mennyi a program termelési összköltsége?

e) Képezze a következő szorzatokat és magyarázza meg jelentésüket: $p^T A^T$, $A^T b$.

3. Feladat. Egy üzem 3 erőforrásból 2 terméket állít elő. Az A technológiai mátrix sorai rendre a következők:

$$\begin{bmatrix} 8, & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 8, & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 10, & 4 \end{bmatrix}.$$

Az erőforrások egységárvektora és az egy-egy termék eladási árvektora legyen:

$$x = \begin{bmatrix} 4, & 8, & 6 \end{bmatrix}^T \quad \text{és} \quad y = \begin{bmatrix} 914, & 460 \end{bmatrix}^T.$$

a) Mennyi az üzem haszna termékenként?

b) Mekkora mennyiségre van szükség az egyes erőforrásokból, ha a programvektor $p = \begin{bmatrix} 158, & 180 \end{bmatrix}^T$?

c) Mennyi lesz az üzem összes haszna, ha a gyártott mennyiségeket el is adják?

4. Feladat. Egy üzemben 3 erőforrásból 4 terméket állítanak elő. Az A technológiai mátrix sorai rendre a következők:

$$\begin{bmatrix} 1, & 1, & 2, & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4, & 3, & 2, & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3, & 1, & 2, & 2 \end{bmatrix}.$$

Az erőforrások egységárvektora és a programvektor legyen:

$$\begin{bmatrix} 40, & 80, & 60 \end{bmatrix}^T \quad \text{és} \quad \begin{bmatrix} 10, & 30, & 20, & 40 \end{bmatrix}^T.$$

a) Mennyi az egyes termékek 1-1 darabjának előállítási költsége?

b) Mennyi szükséges az egyes erőforrásokból a program megvalósításához?

c) Számítsa ki, hogy hány egység kell az első erőforrásból ahhoz, hogy mindegyik termékből 1-1 darabot állítsanak elő.

d) Mennyi a második termék előállításának költsége (egységre vetítve és összesen a tervezett programnak megfelelően)?

5. Feladat. Egy forgalmas levesbárban 4 féle levesből eladott adagok számát az alábbi táblázatban foglalták össze:

	Gulyásleves	Bableves	Csontleves	Húsleves
Péntek	300	400	200	100
Szombat	400	400	400	200
Vasárnap	300	200	200	200

Az egyes levesek ára forintban $p^T = \left[\begin{array}{cccc} 400, & 300, & 200, & 100 \end{array}\right]$.

a) Mennyi a levesforgalom naponként forintban?

b) Mennyi a levesforgalom összesen a 3 nap alatt forintban?

c) Hány adag fogyott el az egyes levesfajtákból a három nap alatt együttesen?

d) Számítsa ki, hogy az egyes napokon gulyáslevesből hány adaggal adtak el többet, mint húslevesből.

e) Számítsa ki, hogy az egyes napokon gulyáslevesből mennyivel volt több a bevétel, mint húslevesből.