

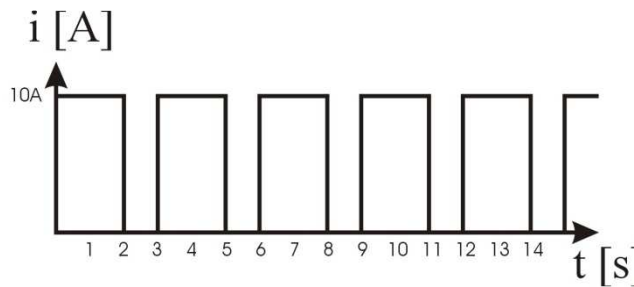
- 8.19 Határozza meg szinuszos váltakozó feszültség esetén a hányadosát az effektív értéknek és az átlag értéknek.

$$U_{eff} = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$$

$$U_{\text{átl}} = \frac{2U_m}{\pi}$$

$$K_f = \frac{U_{eff}}{U_{\text{átl}}} = \frac{\frac{U_m}{\sqrt{2}}}{\frac{2U_m}{\pi}} = 1,11$$

- 8.20 Az ábrán látható áram jelalakjának határozza meg az effektív értékét és az átlag értékét, és a formatényező értékét. A jel periódus ideje $T = 3\text{s}$.



$$I_{eff} = \sqrt{\frac{10^2 \cdot 2 + 0^2 \cdot 1}{3}} = 8,16 \text{ A}$$

$$I_{\text{átl}} = \frac{10 \cdot 2 + 0 \cdot 1}{3} = 6,67$$

$$\text{formatényező} = K_f = \frac{I_{eff}}{I_{\text{átl}}} = \frac{8,16}{6,67} = 1,22$$

- 8.21 Határozza meg a feszültség áram kapcsolatát egy R ellenálláson amit (AC) $u = U_{max} \cdot \sin \omega t$ váltakozó feszültségre kapcsolunk.

$$u = R \cdot i$$

$$u = U_{max} \cdot \sin \omega t$$

$$U_{max} \cdot \sin \omega t = R \cdot i$$

$$i = \frac{U_{max}}{R} \cdot \sin \omega t = I_{max} \cdot \sin \omega t$$

$$U_{max} = R \cdot I_{max}$$

$$U = R \cdot I$$

Ahol U és I értékei effektív értékek. Tudnunk kell, hogy az áram és a feszültség értékei fázisban vannak egymással ellenállás terhelés esetén.

- 8.22 Határozza meg a feszültség áram kapcsolatát egy L induktivitáson ami (AC) $i = I_{max} \cdot \sin \omega t$ váltakozó áramot szállít.

$$u = L \cdot \frac{di}{dt}$$

$$i = I_{max} \cdot \sin \omega t$$

$$u = L \cdot \frac{d}{dt}(I_{max} \cdot \sin \omega t) = \omega \cdot L \cdot I_{max} \cdot \cos \omega t = U_{max} \cdot \cos \omega t = U_{max} \cdot \sin(\omega t + 90^\circ)$$

$$U_{max} = \omega \cdot L \cdot I_{max}$$

$$U = \omega \cdot L \cdot I \equiv X_L \cdot I$$

Ahol $X_L = \omega \cdot L$ az induktív reaktancia, és a mértékegysége ugyancsak Ω . Meg kell jegyeznünk, hogy az áram ideális induktivitás esetén késik a rákapcsolt feszültséghez képest 90° -ot.

8.22 Határozza meg a feszültség áram kapcsolatát egy C kapacitáson, amire (AC) $u = U_{max} \cdot \sin \omega t$ váltakozó feszültségre kapcsolunk.

$$i = C \cdot \frac{du}{dt} \quad u = U_{max} \cdot \sin \omega t$$

$$i = C \cdot \frac{d}{dt}(U_{max} \cdot \sin \omega t) = \omega \cdot C \cdot U_{max} \cdot \cos \omega t = I_{max} \cdot \cos \omega t = I_{max} \cdot \sin(\omega t + 90^\circ)$$

$$I_{max} = \omega \cdot C \cdot U_{max} \quad U = \frac{I}{\omega \cdot C} \equiv X_C \cdot I$$

Ahol $X_C = \frac{1}{\omega \cdot C}$ kapacitív reaktancia, és a mértékegysége ugyancsak „ Ω ”. Meg kell jegyeznünk, hogy az áram ideális kapacitás esetén siet a rákapcsolt feszültséghez képest 90° -ot.

8.23 Egy induktivitáson 5A áram folyik 110V feszültségű 60Hz-es hálózatra kapcsolva. Határozza meg az induktivitás áramának és feszültségének függvényét!

Elsőként minden érték csúcs értékét kell felírunk.

$$I_{max} = \sqrt{2} \cdot 5 = 7,07A \quad \omega = 2 \cdot \pi \cdot f = 2 \cdot \pi \cdot 60 = 377 \frac{rad}{s}$$

$$i = 7,07 \cdot \sin(377 \cdot t)A \quad U_{max} = \sqrt{2} \cdot 110 = 155,56V$$

Az előzőek alapján az áram késik a feszültséghez képest 90° -ot.

$$u = 155,56 \cdot \sin(\omega t + 90^\circ) = 155,56 \cos(\omega t)V$$

8.25 Határozza meg az előző példa adatai alapján az induktív reaktancia értékét.

$$X_L = \frac{U}{I} = \frac{110V}{5A} = 22\Omega$$

$$X_L = \omega \cdot L = 377 \cdot L$$

$$L = \frac{22\Omega}{377} = 58,36mH$$

8.26 Egy kapacitáson 2A áram erőssége és 120V feszültségű 50Hz-es hálózatra kapcsoljuk. Határozza meg a kapacitás áram és feszültség függvényének a képletét.

Elsőként minden értéket csúcs értékét kell felírunk.

$$I_{max} = \sqrt{2} \cdot 2 = 2,828A \quad \omega = 2 \cdot \pi \cdot f = 2 \cdot \pi \cdot 50 = 314 \frac{rad}{s}$$

$$i = 2,828 \cdot \sin(314 \cdot t)A \quad U_{max} = \sqrt{2} \cdot 120 = 169,7V$$

Az előzőek alapján az áram siet a feszültséghez képest 90° -ot.

$$u = 169,7 \cdot \sin(\omega t - 90^\circ) = -169,7 \cos(\omega t)V$$

8.27 Határozza meg az előző példa adatai alapján az kapacitív reaktancia értékét.

$$X_C = \frac{U}{I} = \frac{120V}{2A} = 60\Omega$$

$$X_C = \frac{1}{\omega \cdot C} = \frac{1}{314 \cdot C}$$

$$C = \frac{1}{314 \cdot 60} = 53,079 \mu F$$

8.28 Egy 0,5H induktivitásra kapcsolt feszültség értéke $u = 200 \cdot \sin(100 \cdot t) V$. Mekkora az áram pillanatértéke.

$$X_L = \omega \cdot L = 100 \frac{rad}{s} \cdot 0,5H = 50\Omega \quad I_{max} = \frac{U_{max}}{X_L} = \frac{200V}{50\Omega} = 4A$$

Mivel i késik a feszültséghez képest 90° -ot, ezért végül a következőket kapjuk.

$$i = I_{max} \cdot \sin(\omega t - 90^\circ) = 4 \cdot \sin(100 \cdot t - 90^\circ) A$$

8.29 Egy 50 μ F kapacitás árama: $i = 2 \cdot \sin(1000 \cdot t) A$. Mekkora a feszültségének a pillanatértéke?

$$X_C = \frac{1}{\omega \cdot C} = \frac{1}{1000 \cdot 50 \cdot 10^{-6}} = 20\Omega$$

$$U_{max} = I_{max} X_C = 2 \cdot 20 = 40V$$

Mivel u siet a feszültséghez képest 90° -ot, ezért végül a következőket kapjuk.

$$u = U_{max} \cdot \sin(\omega t - 90^\circ) = 40 \cdot \sin(1000 \cdot t - 90^\circ) V$$

8.30 Ismert egy alap áramköri elemen a feszültség és az áram nagysága: $u = 100 \cdot \sin(377 \cdot t + 20^\circ) V$, $i = 4 \cdot \sin(377 \cdot t - 70^\circ) A$. Ezek alapján határozza meg az elem típusát és értékét.

Mivel u siet az áramhoz képest $20^\circ - (-70^\circ) = 90^\circ$ -ot, ezért induktivitásról van szó. Értékére pedig:

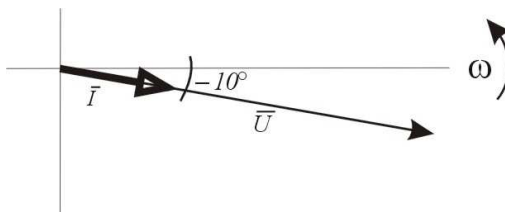
$$X_L = \frac{U_{max}}{I_{max}} = \frac{100V}{4A} = 25\Omega = \omega \cdot L = 377 \cdot L$$

$$L = \frac{25\Omega}{377 \frac{rad}{s}} = 66,3mH$$

8.31 Adott egy alap áramköri elemen a feszültség és az áram nagysága: $u = 200 \cdot \sin(314 \cdot t - 10^\circ) V$, $i = 20 \cdot \sin(314 \cdot t - 10^\circ) A$. Ezek alapján határozza meg az elem típusát és értékét.

Mivel u fázisban van az áramával, ezért ohmos terhelésről lehet csak szó.

$$R = \frac{U_{max}}{I_{max}} = \frac{200V}{20A} = 10\Omega$$

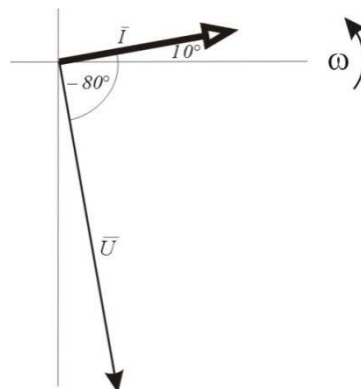


8.32 Adott egy alap áramköri elemen a feszültség és az áram nagysága: $u = 6 \cdot \cos(1000 \cdot t - 80^\circ) \text{ V}$, $i = 3 \cdot \cos(1000 \cdot t + 10^\circ) \text{ A}$. Ezek alapján határozza meg az elem típusát és nagyságát.

Mivel i siet a feszültséghez képest $10^\circ - (-80^\circ) = 90^\circ$ -ot, ezért kapacitásról van szó. Értékére pedig:

$$X_C = \frac{U_{\max}}{I_{\max}} = \frac{6 \text{ V}}{3 \text{ A}} = 2 \Omega = \frac{1}{\omega \cdot C} = \frac{1}{1000 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot C}$$

$$C = \frac{1}{2 \Omega \cdot 1000 \frac{\text{rad}}{\text{s}}} = 500 \mu\text{F}$$



Emlékeztető matematikából: $\sin(x) \cdot \sin(y) = \frac{1}{2} \cdot [\cos(x - y) - \cos(x + y)]$

$$\sin(x + y) = \sin(x) \cdot \cos(y) + \cos(x) \cdot \sin(y)$$

Differenciál számítás $(\frac{dx}{dt})$		Integrál számítás $\int dx$	
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\cos(x)$	$\sin(x)$

8.33 A feszültség és az áram nagysága a következő formában adott egy alap áramköri elemen: $u = U_{\max} \cdot \sin(\omega t) \text{ V}$, $i = I_{\max} \cdot \sin(\omega t - \phi) \text{ V}$. Ezek alapján határozza meg a hatásos teljesítmény pillanatértékét.

$$\begin{aligned} p &= u \cdot i = U_{\max} \cdot \sin(\omega t) \cdot I_{\max} \cdot \sin(\omega t - \phi) = \\ &= U_{\max} \cdot I_{\max} \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos[(\omega t - \omega t + \phi) - \cos(\omega t + \omega t - \phi)] = \\ &= \frac{1}{2} \cdot U_{\max} \cdot I_{\max} \cdot [\cos \phi - \cos(2\omega t - \phi)] \end{aligned}$$

8.34 Határozza meg az átlagteljesítmény értékét az előző példa eredménye alapján. Az áram és feszültség effektív értékeinek felhasználásával.

Mivel, $\sin(2\omega t)$ és $\cos(2\omega t)$ teljes periódusra vett átlaga zérus. Így:

$$p_{\text{átl}} \equiv P = \frac{1}{2} \cdot U_{\max} \cdot I_{\max} \cdot \cos \phi$$

Mivel a hatásos teljesítmény azonosan egyenlő az átlagteljesítménnyel, ezért az effektív értékeket a következőképpen hozhatjuk be a számításba:

$$P = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot U \cdot \sqrt{2} \cdot I \cdot \cos \phi = U \cdot I \cdot \cos \phi$$

Ahol a $\cos \phi$ értéke a teljesítménytényezőnek nevezzük.

- 8.35** Egy váltakozó feszültségű kapcsolt hálózat tisztán ohmos tulajdonságú. Az áramkör helyére csatlakoztatva egy 15Ω -os egyenértékű ellenállást és 60Hz frekvenciájú 110V feszültséget kapcsolva rá, meg kell határozni az áramát, a hatásos teljesítményt, és a teljesítménytényezőt.

$$I = \frac{U}{R} = \frac{110\text{V}}{15\Omega} = 7,33\text{A}$$

$$P = I^2 \cdot R = 7,33^2 \cdot 15 = 806,67\text{W}$$

$$\text{Teljesítménytényező} = \cos \phi = \frac{P}{U \cdot I} = \frac{806,67\text{W}}{110\text{V} \cdot 7,33\text{A}} = 1,0$$

Ha az áram és a teljesítmény fázisban van egy áramköri elemen, akkor a teljesítménytényező:

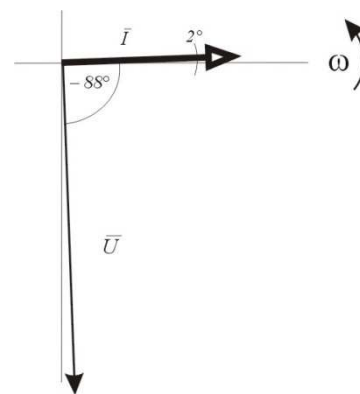
$$\cos \phi = \cos 0^\circ = 1,0.$$

- 8.36** Mekkora teljesítmény disszipálódik el az adott áramköri elemen, ha $u = 6 \cdot \cos(1000 \cdot t - 88^\circ)\text{V}$,
 $i = 3 \cdot \cos(1000 \cdot t + 2^\circ)\text{A}$.

Mivel i siet a feszültséghez képest $2^\circ - (-88^\circ) = 90^\circ$ -ot, ezért kapacitásról van szó.

A teljesítménytényező: $\cos \phi = \cos 90^\circ = 0$.

$$P = U \cdot I \cdot \cos \phi = 0\text{W}$$



- 8.37** Ismert egy alap áramköri elemen a feszültség és az áram nagysága $u = 100 \cdot \sin(377 \cdot t + 20^\circ)\text{V}$,
 $i = 4 \cdot \sin(377 \cdot t - 70^\circ)\text{A}$. Ezek alapján határozza meg a hatásos teljesítmény értékét.

Mivel u siet az áramhoz képest $20^\circ - (-70^\circ) = 90^\circ$ -ot, ezért induktivitásról van szó.

A teljesítménytényező: $\cos \phi = \cos 90^\circ = 0$.

$$P = U \cdot I \cdot \cos \phi = 0\text{W}$$

- 8.38** Egy váltakozó feszültségű áramkör árama 5A feszültsége 220V és 1000W az elfogyasztott teljesítménye. Mekkora a teljesítménytényező értéke?

$$P = U \cdot I \cdot \cos \phi$$

$$\text{Teljesítménytényező} = \cos \phi = \frac{P}{U \cdot I} = \frac{1000\text{W}}{220\text{V} \cdot 5\text{A}} = 0,91$$

- 8.39** Ismert egy alap áramköri elemen a feszültség és az áram nagysága $u = 200 \cdot \sin(377 \cdot t + 30^\circ)\text{V}$,
 $i = 10 \cdot \sin(377 \cdot t + 60^\circ)\text{A}$. Ezek alapján határozza meg a **átlag** teljesítmény értékét.

Az adatokból az effektív értékek: $U = \frac{200}{\sqrt{2}} = 141,42\text{V}$, $I = \frac{10}{\sqrt{2}} = 7,07\text{A}$, a közbezárt szög:

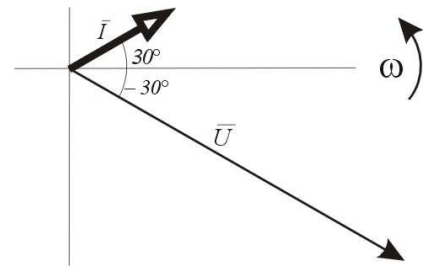
$$\phi = 60^\circ - 30^\circ = 30^\circ.$$

$$P_{\text{átlag}} = P = U \cdot I \cdot \cos \phi = 141,42 \cdot 7,07 \cdot \cos 30 = 866\text{W}$$

8.40 Ismert egy alap áramköri elemen a feszültség és az áram nagysága: $u = 100 \cdot \sin(377 \cdot t - 30^\circ) \text{ V}$,
 $i = 6 \cdot \sin(377 \cdot t + 30^\circ) \text{ A}$. Ezek alapján határozza meg a teljesítménytényező értékét.

A közbezárt szög: $\phi = 30^\circ - (-30^\circ) = 60^\circ$.

$$\cos \phi = \cos 60^\circ = 0,5, \text{ siet}$$



8.41 Egy váltakozó feszültségű áramkör árama 3A feszültsége 50V és 150W az elfogyasztott teljesítménye. Mekkora a teljesítménytényező értéke?

$$\text{Teljesítménytényező} = \cos \phi = \frac{P}{U \cdot I} = \frac{150 \text{ W}}{50 \text{ V} \cdot 3 \text{ A}} = 1$$

Az áramkör ohmos jellegű.

8.42 Egy 5Ω-os ellenállást, 100μF kondenzátort és egy 100mH induktivitást kötünk párhuzamosan, 100V 60Hz-es hálózatra. Határozza meg az áramkör által felvett átlagteljesítmény értékét!

Az áramkör induktívitasos ága és a kapacitásos ága nem fogyaszt hatásos teljesítményt. Így csak az ohmos ággal kell számolni.

$$P = \frac{U^2}{R} = \frac{100^2 \text{ V}^2}{5 \text{ A}} = 2 \text{ kW}$$

8.43 Mekkora a reaktancia értéke 50mH induktivitás esetén, ha
 a., egyen feszültségre kapcsoljuk (dc)?
 b., 60Hz-es váltakozó feszültségre kapcsoljuk?

a., $X_L = \omega \cdot L = 0 \cdot 50^{-3} = 0 \Omega$. Egyen feszültség esetén úgy viselkedik, mint egy rövidzár.

b., $X_L = \omega \cdot L = 2 \cdot \pi \cdot f \cdot L = 2 \cdot 3,14 \cdot 60 \cdot 50 \cdot 10^{-3} = 18,85 \Omega$

8.44 Határozza meg, az induktivitását egy 50Ω-os reaktanciájú tekercsnek, 60Hz esetén.

$$L = \frac{X_L}{\omega} = \frac{X_L}{2 \cdot \pi \cdot f} = \frac{50 \Omega}{2 \cdot 3,14 \cdot 60 \text{ Hz}} = 132,63 \text{ mH}$$

8.45 Határozza meg azt a frekvenciát, ahol égy 50mH tekercsnek, 50Ω-os a reaktanciája.

$$\omega = \frac{X_L}{L} = \frac{X_L}{50 \cdot 10^{-3}} = 1000 \frac{\text{rad}}{\text{s}} = 2 \cdot \pi \cdot f$$

$$f = \frac{1000 \frac{\text{rad}}{\text{s}}}{2 \cdot \pi} = 159,15 \text{ Hz}$$

- 8.46 Mekkora a reaktancia értéke 500 μ F kondenzátor esetén, ha**
a., egyen feszültségre kapcsoljuk (dc)?
b., 100Hz-es váltakozó feszültségre kapcsoljuk?

a., $X_C = \frac{1}{\omega \cdot C} = \frac{1}{0 \cdot 500 \cdot 10^{-6}} = \infty \Omega$. Egyen feszültség esetén úgy viselkedik, mint egy szakadás.

b., $X_C = \frac{1}{\omega \cdot C} = \frac{1}{2 \cdot 3,14 \cdot 100 \cdot 500 \cdot 10^{-6}} = 3,18 \Omega$

- 8.47 Határozza meg, a kapacitását egy 50 Ω -os reaktanciájú kondenzátornak 60Hz esetén.**

$$C = \frac{1}{\omega \cdot X_C} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot X_C} = \frac{1}{2 \cdot 3,14 \cdot 60 \text{Hz} \cdot 50 \Omega} = 53,05 \mu F$$

- 8.48 Határozza meg azt a frekvenciát, ahol egy 100 μ F kondenzátornak 100 Ω -os a reaktanciája.**

$$\omega = \frac{1}{CX_C} = \frac{1}{100 \cdot 10^{-6} \cdot 100} = 100 \frac{\text{rad}}{\text{s}} = 2 \cdot \pi \cdot f$$

$$f = \frac{100 \frac{\text{rad}}{\text{s}}}{2 \cdot \pi} = 15,915 \text{Hz}$$

- 8.49 A teljesítménytényező értéke 0,866 és késik. A bemenő teljesítmény 600W. A feszültség**
 $u = \sqrt{2} \cdot 110 \cdot \sin(377 \cdot t + 10^\circ) \text{V}$. **Mekkora az áram pillanatértéke?**

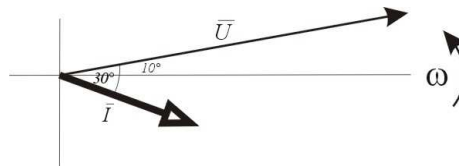
$$\cos \phi = 0,866 \text{ késő}$$

$$\phi = \cos^{-1}(0,866) = 30^\circ$$

$$P = U \cdot I \cdot \cos \phi = 600 \text{W} = 110 \text{V} \cdot I \cdot 0,866$$

$$I = \frac{600}{110 \cdot 0,866} = 6,3 \text{A}$$

$$I_{\max} = 6,3 \cdot \sqrt{2} = 8,9 \text{A}$$



Tudjuk, hogy az áram késik a feszültséghez képest 30°-ot.

$$\text{Tehát } i = 8,9 \sin(377t - 20^\circ) \text{A}$$

- 8.50 Határozza meg a teljesítménytényező értékét, ha** $u = 50 \cdot \sin(\omega \cdot t + 10^\circ) \text{V}$, $i = 2 \cdot \sin(\omega \cdot t + 20^\circ) \text{A}$

Teljesítménytényező szöge:

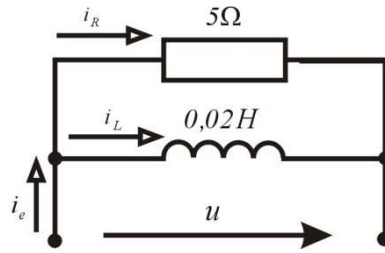
$$\phi = 20^\circ - 10^\circ = 10^\circ .$$

$$\cos \phi = \cos 10^\circ = 0,9848 , \text{ siet}$$



$$P_{\text{átlag}} = P = U \cdot I \cdot \cos \phi = \frac{50}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \cos 10^\circ = 49,24 \text{W}$$

3.17 Adott egy párhuzamos RL körre kapcsolt feszültség $u = 100 \cdot \sin(1000t + 50^\circ) \text{ V}$. Határozza meg az áram időfüggvényét.



Párhuzamos kapcsolás esetén a következők írhatóak fel:

$$i_e = i_R + i_L = \frac{U}{R} + \frac{1}{L} \int u dt$$

$$i_e = \frac{100V}{5\Omega} \sin(1000t + 50^\circ) + \frac{1}{0,02H} [-\cos(1000t + 50^\circ)] \cdot \frac{100V}{1000}$$

$$i_e = 20 \cdot \sin(1000t + 50^\circ) - 5 \cdot \cos(1000t + 50^\circ)$$

Emlékeztető: $\sin(x + y) = \sin(x) \cdot \cos(y) + \cos(x) \cdot \sin(y)$

$$20 = B \cdot \cos(\varphi), \quad -5 = B \cdot \sin(\varphi)$$

Innen számítható a feszültség és az áram közti szög: $\tan \varphi = \frac{-5}{20} \Rightarrow \varphi = -14,05^\circ$

$$i_e = B \cdot \sin(1000t + 50^\circ) \cdot \cos \varphi + B \cdot \cos(1000t + 50^\circ) \cdot \sin \varphi$$

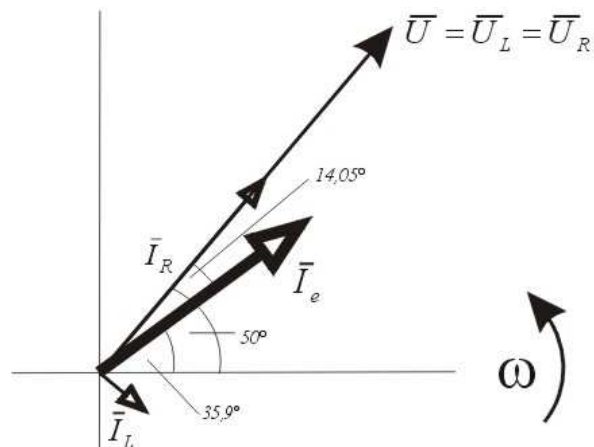
$$B = \frac{20A}{\cos(\varphi)} = 20,6A$$

$$i_e = 20,6 \cdot \sin(1000t + 50^\circ - 14,05^\circ) A$$

$$i_e = 20,6 \cdot \sin(1000t + 35,95^\circ) A$$

Az eredő áram és a feszültség közötti szög tehát

$$50^\circ - 35,95^\circ = 14,05^\circ$$



3.18 Adott egy párhuzamos RLC körre kapcsolt feszültség $u = 50 \cdot \sin(5000t + 45^\circ) \text{ V}$. Határozza meg az áram időfüggvényét.

Párhuzamos RLC-nél az alábbiak írhatóak fel:

$$i_e = i_R + i_L + i_C = \frac{U}{R} + \frac{1}{L} \int u dt + C \frac{du}{dt}$$

$$i_e = \frac{50V}{20\Omega} \sin(5000t + 45^\circ) + \frac{1}{1,6 \cdot 10^{-3} H} [-\cos(5000t + 45^\circ)] \cdot \frac{50V}{5000} + 20 \cdot 10^{-6} \cdot 50 \cdot 5000 \cdot \cos(5000t + 45^\circ)$$

$$i_e = 2,5 \sin(5000t + 45^\circ) - 6,25 \cos(5000t + 45^\circ) + 5 \cos(5000t + 45^\circ)$$

$$i_e = 2,5 \sin(5000t + 45^\circ) - 1,25 \cos(5000t + 45^\circ)$$

$$2,5 = B \cdot \cos(\varphi), \quad -1,25 = B \cdot \sin(\varphi)$$

Innen számítható az áram és a feszültség közti szög: $\tan \varphi = \frac{-1,25}{2,5} \Rightarrow \varphi = -26,6^\circ$

$$i_e = B \cdot \sin(5000t + 45^\circ) \cdot \cos \varphi + B \cdot \cos(5000t + 45^\circ) \cdot \sin \varphi$$

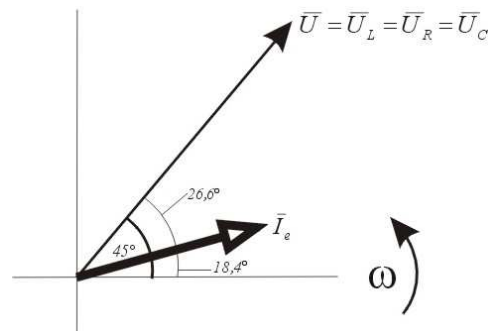
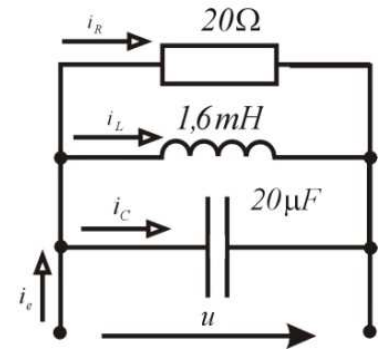
$$B = \frac{2,5}{\cos(-26,6^\circ)} \cong 2,8 A$$

$$i_e = 2,8 \cdot \sin(5000t + 45^\circ) \cdot \cos(-26,6^\circ) + 2,8 \cdot \cos(5000t + 45^\circ) \cdot \sin(-26,6^\circ) [A]$$

$$i_e = 2,8 \cdot \sin(5000t + 45^\circ - 26,6^\circ) A$$

$$i_e = 2,8 \cdot \sin(5000t + 18,4^\circ) A$$

A feszültség és az eredő áram közötti szög tehát $45^\circ - 18,4^\circ = 26,6^\circ$



3.19 Adott egy soros RLC körre kapcsolt áram $i = 3 \cdot \cos(5000t - 60^\circ) A$. Határozza meg a rákapcsolt feszültség időfüggvényét.

Soros RLC-nél az alábbiak írhatóak fel:

$$u = u_R + u_L + u_C = R \cdot i + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt$$

$$u = 3 \cdot 2 \cos(5000t - 60^\circ) - 3 \cdot 1,6 \cdot 10^{-3} \cdot 5000 \sin(5000t - 60^\circ) + \frac{20 \cdot 10^{-6}}{5000} \cdot 3 \cdot \sin(5000t - 60^\circ)$$

$$u = 6 \cos(5000t - 60^\circ) + (-24 + 30) \sin(5000t - 60^\circ)$$

$$6 = B \cdot \sin(\varphi), \quad 6 = B \cdot \cos(\varphi) \quad \text{Innen számítható az áram és a feszültség közti szög:}$$

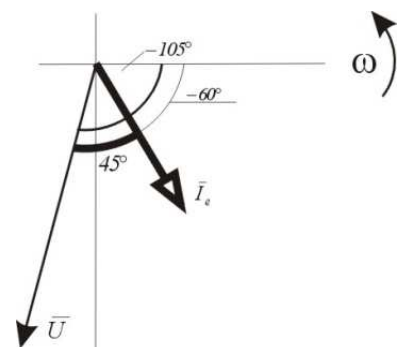
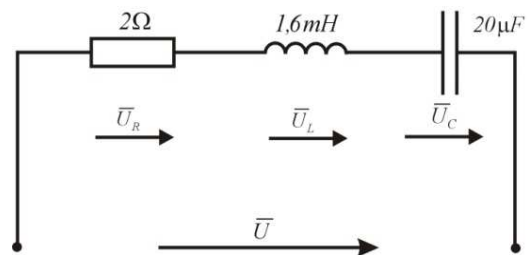
$$\tan \varphi = \frac{6}{6} \Rightarrow \varphi = 45^\circ. \text{ Majd a: } B = \frac{6}{\cos 45^\circ} = 8,48$$

$$u = 8,48 \cdot \cos(5000t - 60^\circ) \cdot \sin(45^\circ) + 8,48 \cdot \sin(5000t - 60^\circ) \cdot \cos(45^\circ) [V]$$

$$u = 8,48 \cdot \sin(5000t - 60^\circ + 45^\circ) [V]$$

$$u = 8,48 \cdot \cos(5000t - 15^\circ - 90^\circ) [V]$$

Az U és I közötti: $-105^\circ - (-60^\circ) = 45^\circ$ és kapacitív jellegű.



9.19 A fázorokat (vektorokat) szinuszosan váltakozó mennyiségek leírására használjuk
Például: $u = U_{\max} \cdot \sin(\omega t - \phi) [V]$, amelyet írhatunk más alakban is: $\bar{U} = U \angle -\phi [V]$, ahol az
 effektív érték nagysága: $U = \frac{U_{\max}}{\sqrt{2}} [V]$. **Határozza meg a következő áram értékeket vektoros**
alakban.

a., $i = 141,4 \cdot \sin(\omega t) ?$ **b.,** $i = 10 \cdot \sin(\omega t + 60^\circ) ?$ **c.,** $i = 2 \cdot \cos(\omega t)$

a., $I_{\max} = 141,4 A$ $I = \frac{141,4}{\sqrt{2}} A$ $\bar{I} = 100 \angle 0^\circ A$

b., $\bar{I} = \frac{10}{\sqrt{2}} \angle 60^\circ = 7,07 \angle 60^\circ A$

c., $\bar{I} = \frac{2}{\sqrt{2}} \angle 90^\circ = 1,414 \angle 90^\circ A$

9.20 Határozza meg a következő áram vektorok alapján, az áram időfüggvényét, ω frekvencián!

a., $\bar{I} = 10 \angle 0^\circ A ?$ **b.,** $\bar{I} = 25 \angle -30^\circ A ?$ **c.,** $\bar{I} = 6 \angle -90^\circ A$

a., $i = \sqrt{2} \cdot 10 \cdot \sin(\omega t) = 14,14 \cdot \sin(\omega t)$

b., $i = \sqrt{2} \cdot 25 \cdot \sin(\omega t - 30^\circ) = 35,35 \cdot \sin(\omega t - 30^\circ)$

c., $i = \sqrt{2} \cdot 6 \cdot \sin(\omega t - 90^\circ) = 8,484 \cdot \sin(\omega t - 90^\circ) = -8,484 \cdot \cos(\omega t)$

9.21 Adottak egy áramkör feszültség és áram időfüggvényei. Határozza meg az ennek megfelelő exponenciális alakot! $u = 155,6 \cdot \sin(377 \cdot t)$, $i = 7,07 \cdot \sin(377 \cdot t - 30^\circ)$

$u = 155,6 \cdot e^{j377 \cdot t}$, és $i = 7,07 \cdot e^{j377 \cdot t - (\pi/6)}$

Fontos! A komplex átszámítás esetén radiánban kell a szögeket számolnunk.

9.22 Az előző példa adatai alapján határozza meg: a., frekvenciát (Hz)!

b., periódus időt (s)!

a., $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f = 377 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ $f = \frac{377}{2\pi} = 60 \text{ Hz}$

b., $T = \frac{1}{f} = \frac{1}{60} = 0,0167 \text{ s}$

9.23 Két sorba kapcsolt áramköri elem esetén a rajtuk eső feszültségek értékei: $u_1 = 50 \cdot \sin(\omega t) V$,
 $u_2 = 30 \cdot \sin(\omega t - 30^\circ) V$. **Mekkora az eredő feszültség effektív értéke és szöge?**

$\bar{U}_1 = \frac{50}{\sqrt{2}} \angle 0^\circ = 35,36 + j0 V$ $\bar{U}_2 = \frac{30}{\sqrt{2}} \angle -30^\circ = 18,37 - j10,6 V$

$\bar{U} = \bar{U}_1 + \bar{U}_2 = (35,36 + 18,37) - j10,6 = 54,75 \angle -11,16^\circ V$

$|\bar{U}| = 54,75 V$ és a szöge $\phi = -11,16^\circ$

9.24 Két párhuzamosan kapcsolt áramköri elem esetén ismert az egyik ágon folyó áram nagysága és az eredő áram értéke: $i_1 = 3 \cdot \sin(\omega t - 60^\circ)A$, $i = 10 \cdot \sin(\omega t + 90^\circ)A$. Határozza meg a másik ágon folyó áram effektív értékét!

$$\bar{I}_1 = \frac{3}{\sqrt{2}}(\cos(-60^\circ) + j \sin(-60^\circ)) = \frac{3}{\sqrt{2}}\cos 60^\circ - j \sin 60^\circ = \frac{3}{\sqrt{2}} \angle -60^\circ = 1,06 - j1,832A$$

$$\bar{I} = \frac{10}{\sqrt{2}}(\cos 90^\circ + j \sin 90^\circ) = \frac{10}{\sqrt{2}}(0 + j \cdot 1) = \frac{10}{\sqrt{2}} \angle 90^\circ = 0 + j7,072A$$

$$\bar{I} = \bar{I}_1 + \bar{I}_2 \Rightarrow \bar{I}_2 = \bar{I} - \bar{I}_1 = j7,072 - 1,06 + j1,832 = -1,06 + j8,904A$$

$$|\bar{I}_2| = 8,967A, \text{ (és a szöge } \phi = 97,27^\circ)$$

9.25 Mi az előző példa i_2 áramának idő függvénye?

$$I_{2max} = 8,967 \cdot \sqrt{2} = 12,68A, \phi = \tan^{-1} \frac{8,904}{-1,06} = 97,27^\circ$$

$$i_2 = 12,68 \cdot \sin(\omega t + 97,27^\circ)A$$

9.26 Egy párhuzamos áramkör két ága 1-1 elemet tartalmaz. Ismertek: $\bar{I}_1 = 40 \angle 20^\circ A$, $\bar{I}_2 = 30 \angle -65^\circ A$, $\bar{U} = 100 \angle 0^\circ V$, Határozza meg a vonali áram effektív értékét, és a teljesítménytényezőt.

$$\bar{I} = \bar{I}_1 + \bar{I}_2 = 40 \angle 20^\circ + 30 \angle -65^\circ = 40(\cos 20^\circ + j \sin 20^\circ) + 30(\cos 65^\circ - j \sin 65^\circ) =$$

$$= 37,588 + j13,681 + 12,678 - j27,189 = 50,266 - j13,508A$$

$$|\bar{I}| = \sqrt{50,266^2 + 13,508^2} = 52,05A, \tan \phi = \frac{-13,508}{50,266} \Rightarrow \phi = -15^\circ$$

$$\cos \phi = \cos(-15^\circ) = 0,966$$

9.27 Határozza meg az előző áramkör hatásos teljesítményét!

$$P = U \cdot I \cdot \cos \phi = 100 \cdot 52,05 \cdot \cos(-15^\circ) = 5027,6W$$

9.28 Határozza meg az előző példa két áramköri elemén külön-külön a hatásos teljesítmény értékét!

$$P_1 = U \cdot I_1 \cdot \cos \phi_1 = 100 \cdot 40 \cdot \cos(20^\circ) = 3758,8W$$

$$P_2 = U \cdot I_2 \cdot \cos \phi_2 = 100 \cdot 30 \cdot \cos(-65^\circ) = 1267,8W$$

$$P = P_1 + P_2 = 5026,6W$$

9.29 Határozza meg a bemenő teljesítményét ezen áramkörnek! $\bar{I} = 5 \angle 0^\circ A$, $(|\bar{U}| = 54,75V$ és a szöge $\phi = -11,16^\circ)$

$$P = U \cdot I \cdot \cos \phi = 54,75 \cdot 5 \cdot \cos(-11,16^\circ) = 268,62W$$

9.30 Két sorba kapcsolt áramköri elem esetén, rajtuk a környezetnek leadott hő (disszipálódott) teljesítményt kell meghatározni. A kör árama: $\bar{I} = 5 \angle 0^\circ \text{ A}$, és az elemeken eső feszültségek értékei: $u_1 = 50 \cdot \cos(\omega t) \text{ V}$, $u_2 = 30 \cdot \cos(\omega t - 30^\circ) \text{ V}$.

$$P_1 = U_1 \cdot I \cdot \cos \phi_1 = \frac{50}{\sqrt{2}} \cdot 5 \cdot \cos(0^\circ) = 176,8 \text{ W}$$

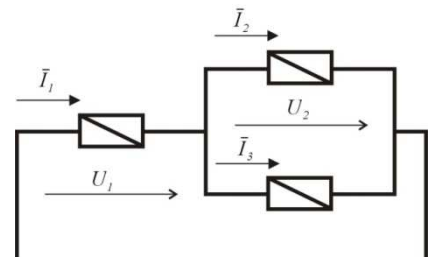
$$P_2 = U_2 \cdot I \cdot \cos \phi_2 = \frac{30}{\sqrt{2}} \cdot 5 \cdot \cos(-30^\circ) = 91,87 \text{ W} \quad P = P_1 + P_2 = 268,67 \text{ W}$$

9.31 Adott az ábrán látható áramkör. Ismertek: $\bar{I}_1 = 6 \angle 30^\circ \text{ A}$, $\bar{I}_2 = 2 \angle 20^\circ \text{ A}$. Határozza meg i_3 értékét 60Hz-en.

$$\begin{aligned} \bar{I}_3 &= \bar{I}_1 - \bar{I}_2 = 6 \angle 30^\circ + 2 \angle 20^\circ = \\ &= 6(\cos 30^\circ + j \sin 30^\circ) - 2(\cos 20^\circ + j \sin 20^\circ) = \\ &= 5,196 + j3 - 1,879 - j0,684 = \\ &= 3,317 - j2,316 \text{ A} = 4,045 \angle 34,9^\circ \text{ A} \end{aligned}$$

$$I_3 = \sqrt{2} \cdot 4,045 = 5,72 \text{ A} \quad \phi = 34,9^\circ \quad \omega = 2 \cdot \pi \cdot f = 377 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$i_3 = 5,72 \cdot \sin(377t + 34,9^\circ) \text{ A}$$



9.32 Egy váltakozó feszültségű hálózat áram és feszültségének effektív értéke meghatározza a látszólagos teljesítményt. Amit (VA)-ben mérünk. Ha Két, $u = 150 \cdot \cos(\omega t + 30^\circ) \text{ V}$, $i = 2 \cdot \cos(\omega t - 30^\circ) \text{ A}$

$$S = U \cdot I = \frac{150}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} = 150 \text{ VA}$$

9.33 A $P = U \cdot I \cdot \cos \phi$ megadja a valós vagy hatásos teljesítmény értékét (W-ban). Az $S = U \cdot I \cdot \sin \phi$ pedig a meddő teljesítmény értékét adja meg (VAR-ban). Az előző példa esetén adja meg a meddő teljesítmény értékét is.

$$\phi = 30^\circ - (-30^\circ) = 60^\circ$$

$$Q = U \cdot I \cdot \sin \phi = \frac{150}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \sin 60^\circ = 129,9 \text{ VAR}$$

9.34 Adott az $u = 200 \cdot \cos(377t) \text{ V}$ és $i = 8 \cdot \cos(377t - 30^\circ) \text{ A}$ váltakozó áramú hálózat. Számítsa ki a teljesítménytényező nagyságát, a hatásos teljesítményt, a meddő teljesítményt és a látszólagos teljesítmény értékét is.

$$\phi = 0^\circ - (-30^\circ) = 30^\circ \quad \cos \phi = \cos 30^\circ = 0,866$$

$$P = U \cdot I \cdot \cos \phi = \frac{200}{\sqrt{2}} \cdot \frac{8}{\sqrt{2}} \cdot \cos 30^\circ = 692,8 \text{ W}$$

$$Q = U \cdot I \cdot \sin \phi = \frac{200}{\sqrt{2}} \cdot \frac{8}{\sqrt{2}} \cdot \sin 30^\circ = 400 \text{ VAR}$$

$$S = U \cdot I = \frac{200}{\sqrt{2}} \cdot \frac{8}{\sqrt{2}} = 800 \text{ VA}$$

$$P = \sqrt{S^2 - Q^2} = \sqrt{800^2 - 400^2} = 692,82 \text{ W}$$

Az impedancia R valós részét rezisztenciának, és X látszólagos részét reaktanciának nevezzük.

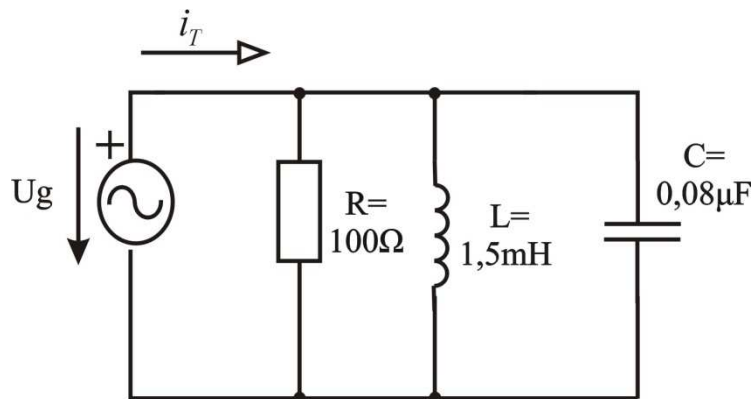
$$\frac{\bar{U}}{\bar{I}} = \bar{Z} = \frac{1}{\bar{Y}} \quad \bar{Z} = R + jX = |Z| \angle \theta^\circ [\Omega]$$

Az impedancia reciproka az admittancia, amely G konduktanciából, és B szuszceptanciából áll.

$$\bar{Y} = \frac{1}{\bar{Z}} = \frac{1}{|Z| \angle \phi^\circ} = |Y| \angle -\phi^\circ = G - jB [S]$$

12.21 Adott a párhuzamos RLC kör bemenő árama: $i = 7,07 \cdot \cos(2\pi \cdot 20.000t) A$.

- Határozza meg, az áramkör eredő admittanciáját, és rajzoljon két sorosan kapcsolt elemből egyenértékű impedanciát!
- Határozz meg U_g idő függvényét és a hatásos teljesítmény értékét.
- Az áramkör alapján rajzoljon fázor ábrát, amin tüntessen fel minden ágáramot is!



a, Legyen az áram időfüggvénye a referencia hullám:

$$\bar{I}_T = 5 \angle 0^\circ A \text{ és } \omega = 2\pi \cdot 20.000 = 125,6 \frac{\text{krad}}{s}$$

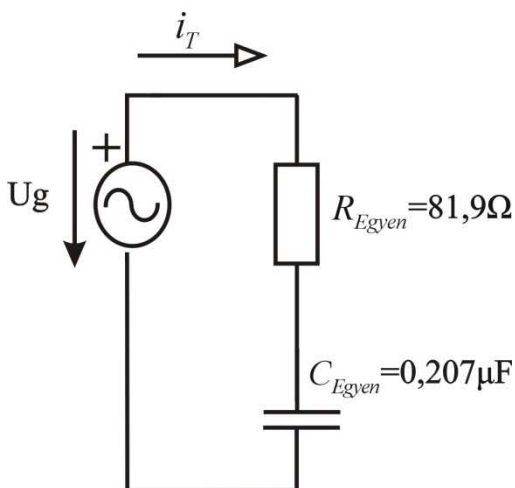
$$Y_R = G \angle 0^\circ = \frac{1}{R} \angle 0^\circ = 0,01 \angle 0^\circ = 0,01 S$$

$$Y_L = B_L \angle -90^\circ = \frac{1}{\omega \cdot L} \angle -90^\circ = 0,0053 \angle -90^\circ = -j0,0053 S$$

$$Y_C = B_C \angle 90^\circ = \omega \cdot C \angle 90^\circ = 0,01 \angle 90^\circ = j0,01 S$$

$$Y_T = Y_R + Y_L + Y_C = 0,01 - j0,0053 + j0,01 = 0,01 + j0,0047 = 0,011 \angle 25,2^\circ S$$

Mivel B_C nagyobb min t a B_L ezért a kör kapacitív jellegű. Ezért a kör feszültségének az eredő áramhoz képest késnie kell.



$$Z_{\text{Egyenértékű}} = \frac{1}{Y_T} = \frac{1}{0,011 \angle -25,2^\circ S} = 90,9 \angle -25,2^\circ \Omega =$$

$$= (81,9 - j38,5) \Omega = R_{\text{Egyen}} - jX_{\text{Cegyen}}$$

$$R_{\text{Egyenértékű}} = 81,9 \Omega$$

$$C_{\text{Egyenértékű}} = \frac{1}{\omega \cdot X_{\text{Cegyen}}}$$

$$C_{\text{Egyenértékű}} = \frac{1}{125,6 \cdot 10^3 \frac{\text{rad}}{s} \cdot 38,5 \Omega} = 0,207 \mu F$$

$$b, \quad \bar{U}_G = I_T \cdot Z_T = \frac{I_T}{Y_T} = \frac{5 \angle 0^\circ A}{0,011 \angle 25,2^\circ \frac{1}{\Omega}} = 452,5 \angle -25,2^\circ V$$

Innen már felírható az áram idő függvénye: $u(t) = 452,5 \cdot \sqrt{2} \cdot \cos(125,6 \cdot 10^3 t - 25,2^\circ) V$

A teljesítmény kiszámításához az áram és a feszültség közötti szögre van szükség:

$$P = U \cdot I_T \cdot \cos \phi_{U, I_T} = 452,5V \cdot 5A \cdot \cos(-25,2^\circ) = 2047W$$

Másként is kiszámítható a hatásos teljesítmény értéke:

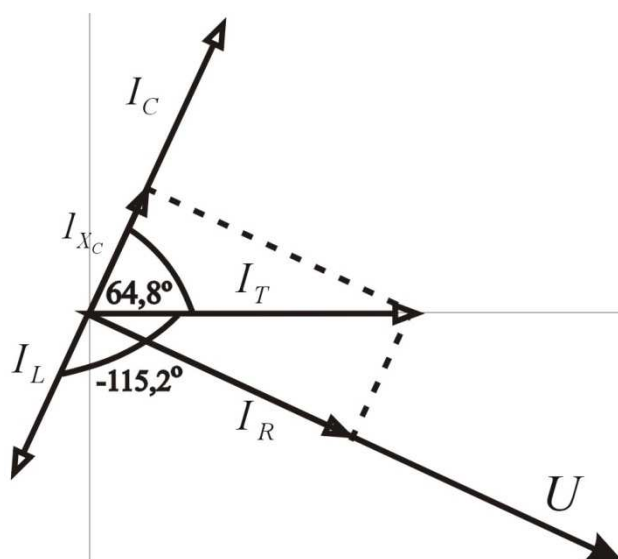
$$P = \frac{U^2}{R} = \frac{(452,5)^2 V^2}{100 \Omega} = 2047W$$

c, Az eredeti áramkör egyes ágáramainak a meghatározásához az ohm törvényt használjuk:

$$\bar{I}_R = \frac{\bar{U}}{Z_R} = \bar{U} \cdot Y_R = 452,5 \angle -25,2^\circ V \cdot 0,01 \angle 0^\circ S = 4,525 \angle -25,2^\circ A$$

$$\bar{I}_L = \frac{\bar{U}}{Z_L} = \bar{U} \cdot Y_L = 452,5 \angle -25,2^\circ V \cdot 0,0053 \angle -90^\circ S = 2,4 \angle -115,2^\circ A$$

$$\bar{I}_C = \frac{\bar{U}}{Z_C} = \bar{U} \cdot Y_C = 452,5 \angle -25,2^\circ V \cdot 0,01 \angle 90^\circ S = 4,525 \angle 64,8^\circ A$$



12.22 Adott a képen látható párhuzamos kapcsolás. Y reprezentálja egy elemi kétpólus admittanciáját. Milyen típusú és mekkora értékű az ismeretlen elem, ha

$$u_g(t) = 150 \cdot \cos(3.000t) \text{ V}, \quad i_T(t) = 16,5 \cdot \cos(3.000t + 72,4^\circ) \text{ A}.$$

b., Milyen elemet lehet a kapcsolással párhuzamosan kötni, úgy hogy az áram vektor nagysága ne változzon meg.

A példa megoldását az eredő admittancia kiszámításával kezdjük el:

$$Y_T = Y + jB_C = Y + j\omega C = Y + j0,105 \text{ S} \quad \text{és} \quad \omega = 3.000 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$U = \frac{150}{\sqrt{2}} \angle 0^\circ = 106,1 \angle 0^\circ \text{ V}$$

$$I_T = \frac{16,5}{\sqrt{2}} \angle 72,4^\circ = 11,67 \angle 72,4^\circ \text{ A}$$

Amelyet megkaphatunk másképpen is, az Ohm törvény alapján:

$$Y_T = \frac{I_T}{U} = \frac{11,67 \angle 72,4^\circ \text{ V}}{106,1 \angle 0^\circ \text{ V}} = 0,11 \angle 72,4^\circ \text{ S} = 0,03 + j0,105 \text{ S}$$

Összevetve a két Y_T értéket megkapjuk Y értékét.

$$Y = 0,03 \text{ S} = \frac{1}{R} \quad \boxed{R = \frac{1}{0,03} = 30 \Omega}$$

Így az Y admittanciának jelen esetben csak konduktanciája van.

b., Ahhoz hogy az i_T nagysága az eredeti maradjon a párhuzamosan kapcsolt elem rákapcsolása után is, ahhoz az kell hogy a teljes új admittancia az előző konjugáltja legyen.

$$Y'_T = 0,11 \angle -72,4^\circ \text{ S} = 0,03 - j0,105 \text{ S} = Y_T + Y_{\text{Hozzáadott}}$$

$$Y_{\text{Hozzáadott}} = Y'_T - Y_T = 0,03 - j0,105 \text{ S} - (0,03 + j0,105 \text{ S}) = -j0,21 \text{ S}$$

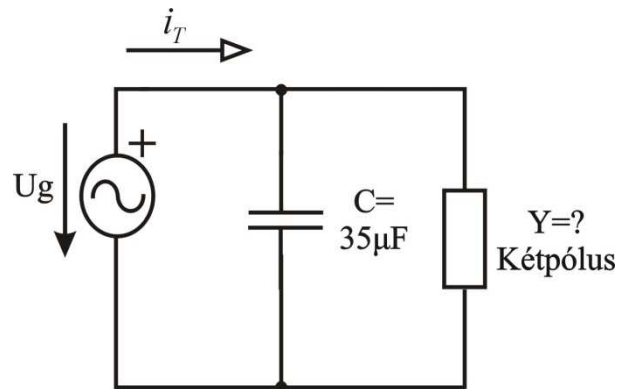
$$Y_{\text{Hozzáadott}} = -j0,21 = -jB_L = -j \frac{1}{\omega \cdot L}$$

$$\boxed{L = \frac{1}{\omega \cdot B_L} = \frac{1}{3000 \cdot 0,21} = 1,59 \text{ mH}}$$

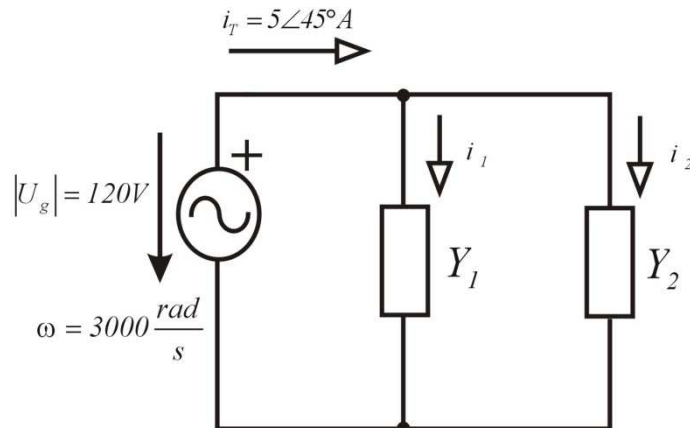
Végül az új kör áramának az értéke:

$$I'_T = U \cdot Y'_T = 106,1 \angle 0^\circ \text{ V} \cdot 0,11 \angle -72,4^\circ \text{ S} = 11,67 \angle -72,4^\circ \text{ A}$$

$$i'_T(t) = 16,5 \cdot \cos(3.000t - 72,4^\circ) \text{ A}$$



12.23 Két, kétpólusú passzívelem van párhuzamosan, kötve az alábbi ábra szerint. Az 1-es ág árama fázisban van a feszültséggel és a nagysága 3A. A bemenő $\bar{U}_g$ feszültség siet az $\bar{I}_T$ áramhoz képest. Határozza meg az egyes elemek értékeit és a soros egyenértékű hálózat elemeit az adott frekvencián.



Mivel U és i_1 fázisban vannak ezért csak ellenállás lehet Y_1 . Mivel U feszültség siet az $i_T(t)$ áramhoz képest ezért az ág induktív tulajdonságú és mivel ez csak 1 elemet tartalmaz ez csak induktivitás lehet. A vektorábra felrajzolása sokat segíthet a feladat megoldásában.

$$\cos \phi = \frac{I_1}{I_T} = \frac{3}{5} = 0,6 \Rightarrow \phi = 53,1^\circ$$

$$I_T^2 = I_1^2 + I_2^2$$

$$I_2 = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4A$$

$$R = \frac{U}{I_1} = \frac{120V}{3A} = 40\Omega$$

$$X_L = \frac{U}{I_2} = \frac{120V}{4A} = 30\Omega = \omega \cdot L$$

$$L = \frac{X_L}{\omega} = \frac{30\Omega}{3000 \frac{rad}{s}} = 10mH$$

A vektorábra alapján jól látható a feszültség szöge:

$$U = 120\angle 45^\circ + 53,1^\circ = 120\angle 98,1^\circ V$$

A soros egyenértékű hálózat meghatározása:

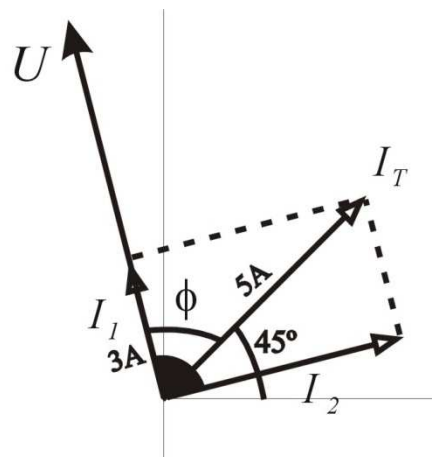
$$Z_{Egyenértékű} = \frac{U}{I_T} = \frac{120\angle 98,1^\circ V}{5\angle 45^\circ A} = 24\angle 53,1^\circ \Omega = 14,42 + j19,2\Omega$$

$$Z_{Egyenértékű} = R_{Egyenértékű} + jX_{Egyenértékű}$$

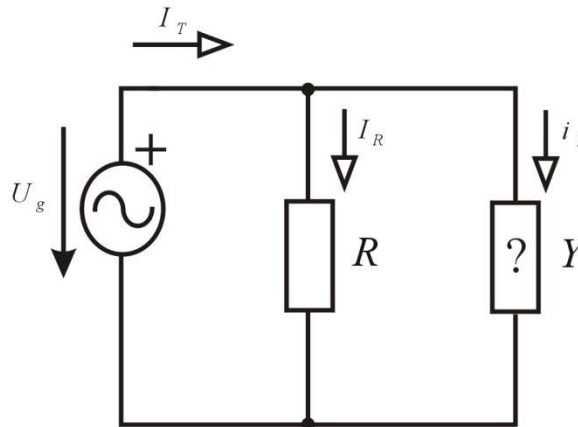
$$R_{Egyenértékű} = 14,42\Omega$$

$$X_{Egyenértékű} = 19,2 = \omega \cdot L_{Egyenértékű}$$

$$L_{Egyenértékű} = \frac{X_L}{\omega} = \frac{19,2}{3000} = 6,4mH$$



12.24 Az alábbi kapcsolást $U_g = 120 \angle 150^\circ \text{V}$ feszültség táplálja, a terhelő áram 10A és $i_2(t) = 8 \cdot \sqrt{2} \cdot \cos(1.000t + 60^\circ) \text{A}$. Határozza meg az R és Y értékét. Határozza meg a terhelő áram időfüggvényét.



Az áram a kétpólusú passzív elemen $i_2 = 8 \angle 60^\circ \text{A}$, a feszültséghez képest a második ág árama ($150^\circ - 60^\circ = 90^\circ$) fokot késik, tehát induktivitás.

$$I_T^2 = I_R^2 + I_2^2$$

$$I_R = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6 \text{A}$$

$$\sin \phi = \frac{I_R}{I_T} = \frac{6}{10} = 0,6 \Rightarrow \phi = 36,9^\circ$$

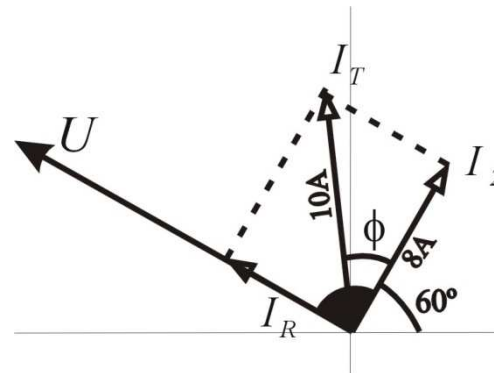
$$I_T = 10 \angle 60^\circ + 36,9^\circ = 10 \angle 96,9^\circ \text{A}$$

$$i_T(t) = 10 \cdot \sqrt{2} \cos(1000t + 96,9^\circ) \text{A}$$

$$R = \frac{U}{I_R} = \frac{120 \text{V}}{6 \text{A}} = 20 \Omega$$

$$X_L = \frac{U}{I_2} = \frac{120 \text{V}}{8 \text{A}} = 15 \Omega = \omega \cdot L$$

$$L = \frac{X_L}{\omega} = \frac{15 \Omega}{1000 \frac{\text{rad}}{\text{s}}} = 15 \text{mH}$$



12.25 Az alábbi kapcsolás egyes ágának az árama: $I_R = 3A$, és $\omega = 333,3 \frac{rad}{s}$. A terhelő áram $I_T = 5A$

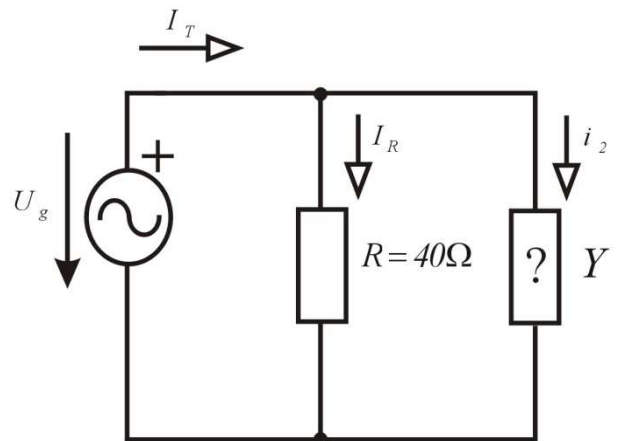
, és tudjuk, hogy I_T késik I_2 képest és $R = 40\Omega$. Határozza meg:

a., U_g fázisalakját, ha I_T a referencia érték

b., az ismeretlen elemi kétpólus nagyságát

c., a bemeneti áramot, ha $\omega = 0 \frac{rad}{s}$

d., változtassa úgy ω értékét, hogy az I_T és I_2 között a fáziskülönbség 30° legyen.



Mivel a feszültséghez képest siet az I_2 ezért kapacitásról van szó a második ágban.

$$\bar{I}_T = \bar{I}_R + \bar{I}_2$$

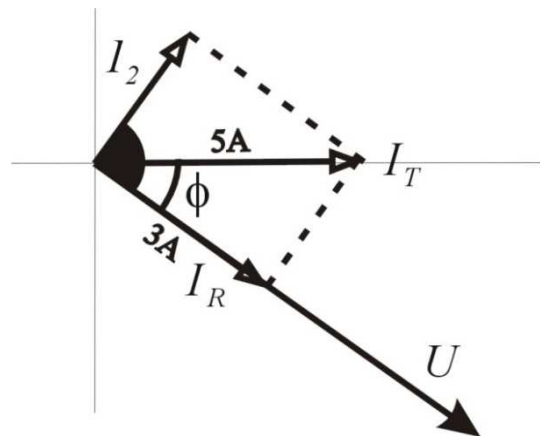
$$\cos \phi = \frac{I_R}{I_T} = \frac{3}{5} = 0,6 \Rightarrow \phi = 53,1^\circ$$

$$I_T^2 = I_R^2 + I_2^2$$

$$I_T = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4A$$

$$U = I_R \cdot R = 3A \cdot 40\Omega = 120V$$

$$U = 120 \angle -53,1^\circ V$$



b., A kapacitás reaktanciája X_C

$$X_C = \frac{U}{I_2} = \frac{120V}{4A} = 30\Omega = \frac{1}{\omega \cdot C}$$

$$C = \frac{1}{\omega \cdot X_C} = \frac{1}{333,3 \frac{rad}{s} \cdot 30\Omega} = 100\mu F$$

c., Ha az ω zérus, akkor $X_C = \infty$.

$$I_2 = 0$$

$$I_T = I_R = 3A \text{ (mivel az } I_R \text{ független a frekvenciától)}$$

d., Ha ω -t változtatjuk, akkor I_2 értéke változik, de I_R mivel független a frekvenciától így értéke nem változik.

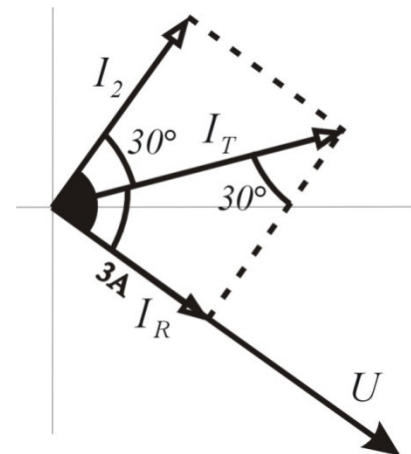
$$\phi = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$$

$$\cos \phi = \cos 60^\circ = 0,5 = \frac{I_R}{I_T} = \frac{3}{I_T}$$

$$I_T = \frac{3A}{0,5} = 6A$$

$$I_2' = \sqrt{6^2 - 3^2} = 5,19A$$

$$X_c' = \frac{U}{I_2'} = \frac{120V}{5,19A} = 23,094\Omega \quad \omega = \frac{1}{C \cdot X_c'} = \frac{1}{100 \cdot 10^{-6} F \cdot 23,94\Omega} = 433 \frac{rad}{s}$$



- 12.26 Van egy ismeretlen dobozunk amiben néhány párhuzamosan kapcsolt elem van. Tudjuk, hogy $\omega_1 = 1000 \text{ rad/s}$ esetén a felvett áram értéke $\bar{I} = 2 \cdot \sqrt{2} \angle -45^\circ \text{ A}$. És $\omega_2 = 2000 \text{ rad/s}$ az áram siet a feszültséghez képest 60° -ot. Határozza meg, hogy minimálisan milyen és mekkora elemekről van szó, amelyek esetén igazak a megadott mérési eredmények!**
- b. Milyen ω körfrekvencia esetén lesz a szuszceptancia értéke nulla?**

Mindhárom elemtípust feltételezve kell felírunk az eredő admittancia értékét:

$$Y_T = G - jB_L + jB_C = \frac{1}{R} - j\frac{1}{\omega L} + j\omega C$$

Első esetben $\omega_1 = 1000 \text{ rad/s}$.

$$Y_T = \frac{\bar{I}}{\bar{U}} = \frac{2 \cdot \sqrt{2} \angle -45^\circ \text{ A}}{10 \angle 0^\circ \text{ V}} = 0,2828 \angle -45^\circ \text{ S} = \text{Mivel a}$$

$$= 0,2 - j0,2 \text{ S}$$

konduktancia (G) értékünk nem nulla, amely független a frekvenciától, ez már számítható:

$$G = \frac{1}{R} = 0,2 \text{ S} \qquad R = \frac{1}{0,2} = 5 \Omega$$

Az admittancia másik komponense az alábbiak szerint írható fel:

$$-j\frac{1}{1000 \cdot L} + j1000 \cdot C = -j0,2$$

$$-\frac{1}{1000 \cdot L} + 1000 \cdot C = -0,2$$

$$1000 \cdot C = \frac{1}{1000 \cdot L} - 0,2$$

Itt még két ismeretlenünk van, a kiszámításukhoz a másik peremfeltételt is be kell helyettesítenünk, és a két egyenletet kell összevetnünk. Mivel az $\bar{I}$ áram siet, az $\bar{U}$ feszültséghez képest 60° -ot, így kapacitív jellegű a terhelés. Mivel az admittancia háromszög hasonló az áram vektorokhoz ezért 60° itt is a fázis helyzet.

$$\tan \phi = \tan 60^\circ = \frac{B_C - B_L}{G} =$$

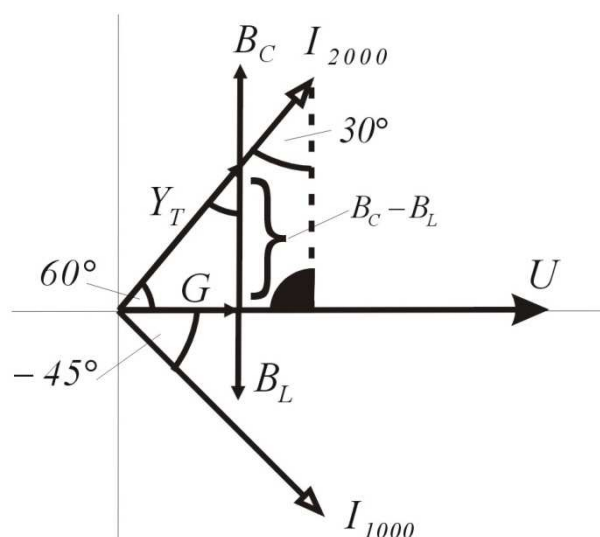
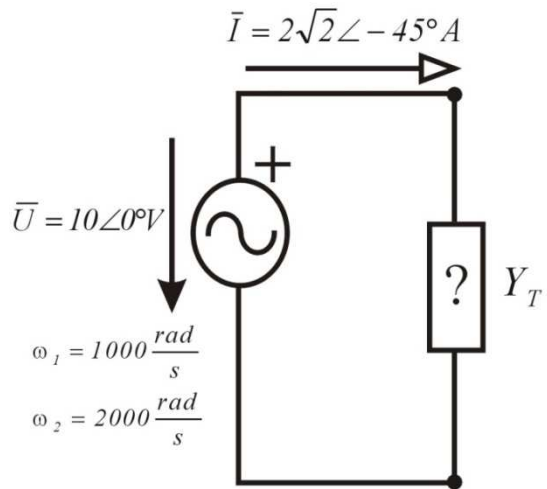
$$= \frac{\omega_2 \cdot C - \frac{1}{\omega_2 \cdot L}}{\frac{1}{R}} = \frac{2000 \cdot C - \frac{1}{2000 \cdot L}}{\frac{1}{5}}$$

$$1,732 = 5 \cdot \left(2000 \cdot C - \frac{1}{2000 \cdot L} \right)$$

$$1,732 = 10.000 \cdot C - \frac{5}{2000 \cdot L}$$

$$0,1732 = 1000 \cdot C - \frac{5}{20.000 \cdot L}$$

$$1000 \cdot C = 0,1732 + \frac{1}{4000 \cdot L}$$



A két egyenletet összevetve kapjuk: $\frac{1}{1000 \cdot L} - 0,2 = 0,1732 + \frac{1}{4000 \cdot L}$

$$-\frac{3}{4000 \cdot L} = -0,3732$$

$$L = \frac{3}{4000 \cdot 0,3732} = 2,01 \text{mH}$$

Visszahelyettesítve az egyenletbe megkapjuk C értékét is:

$$C = \frac{\frac{1}{1000 \cdot L} - 0,2}{1000} = \frac{\frac{1}{1000 \cdot 2,01 \cdot 10^{-3}} - 0,2}{1000} = 297,6 \mu\text{F}$$

A szuszceptancia értéke akkor nulla, ha az admittancia induktív és kapacitív tényezőinek összege nulla:

$$Y_T = \frac{1}{R} - j \frac{1}{\omega L} + j \omega C \Rightarrow -j \frac{1}{\omega L} + j \omega C = 0$$

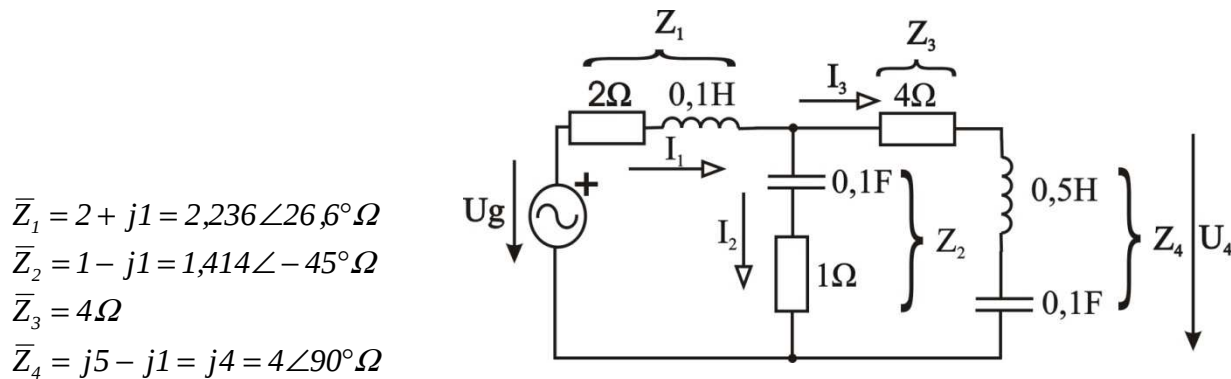
$$j \frac{1}{\omega L} = j \omega C$$

$$\frac{1}{\omega L} + \omega C = 0 \quad / \cdot \omega L$$

$$1 + \omega^2 \cdot L \cdot C = 0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{L \cdot C}} = \sqrt{\frac{1}{297,6 \cdot 10^{-6} \cdot 2,01 \cdot 10^{-3}}} = 1292,96 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

12.27 Az ábrán látható kapcsolásra, $u_g(t) = 10 \cdot \sqrt{2} \cdot \cos(10t) \text{ V}$ feszültséget kapcsolunk. Határozza meg, az $i_1(t)$, $i_2(t)$, $u_4(t)$ értékeinek nagyságát!



$$\bar{Z}_T = \bar{Z}_1 + \frac{\bar{Z}_2(\bar{Z}_3 + \bar{Z}_4)}{\bar{Z}_2 + \bar{Z}_3 + \bar{Z}_4} = 2 + j1 + \frac{(1 - j1)(4 + j4)}{1 - j1 + 4 + j4} = 2 + j1 + \frac{1,414 \angle -45^\circ \cdot 5,657 \angle 45^\circ}{5,831 \angle 31^\circ} =$$

$$= 2 + j1 + 1,372 \angle -31^\circ = 2 + j1 + 1,18 - j0,707 = 3,18 + j0,293 = 3,19 \angle 5,3^\circ \Omega$$

$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{U}_g}{\bar{Z}_T} = \frac{10 \angle 0^\circ \text{ V}}{3,19 \angle 5,3^\circ \Omega} = 3,13 \angle -5,3^\circ \text{ A}$$

$$i_1(t) = 3,13 \cdot \sqrt{2} \cdot \cos(10t - 5,3^\circ) \text{ A}$$

Az I_1 áramból az I_2 áram, áramosztóval számítható:

$$\bar{I}_2 = \bar{I}_1 \cdot \frac{\bar{Z}_3 + \bar{Z}_4}{\bar{Z}_2 + \bar{Z}_3 + \bar{Z}_4} = 3,13 \angle -5,3^\circ \text{ A} \cdot \frac{(4 + j4) \Omega}{(5 + j3) \Omega} = 3,13 \angle -5,3^\circ \text{ A} \cdot \frac{5,657 \angle 45^\circ}{5,831 \angle 31^\circ} = 3,04 \angle 8,7^\circ \text{ A}$$

$$i_2(t) = 3,04 \cdot \sqrt{2} \cdot \cos(10t + 8,7^\circ) \text{ A}$$

$$\bar{I}_3 = \bar{I}_1 \cdot \frac{\bar{Z}_2}{\bar{Z}_2 + \bar{Z}_3 + \bar{Z}_4} = 3,13 \angle -5,3^\circ \text{ A} \cdot \frac{(1 - j1) \Omega}{(5 + j3) \Omega} = 3,13 \angle -5,3^\circ \text{ A} \cdot \frac{1,414 \angle -45^\circ}{5,831 \angle 31^\circ} = 0,76 \angle -81,3^\circ \text{ A}$$

Az U_4

feszültség az Ohm törvény alapján számítható:

$$\bar{U}_4 = \bar{I}_3 \cdot \bar{Z}_4 = 0,76 \angle -81,3^\circ \text{ A} \cdot 4 \angle 90^\circ \Omega = 3,04 \angle 8,7^\circ \text{ V}$$

$$u_4(t) = 3,04 \cdot \sqrt{2} \cdot \cos(10t + 8,7^\circ) \text{ V}$$

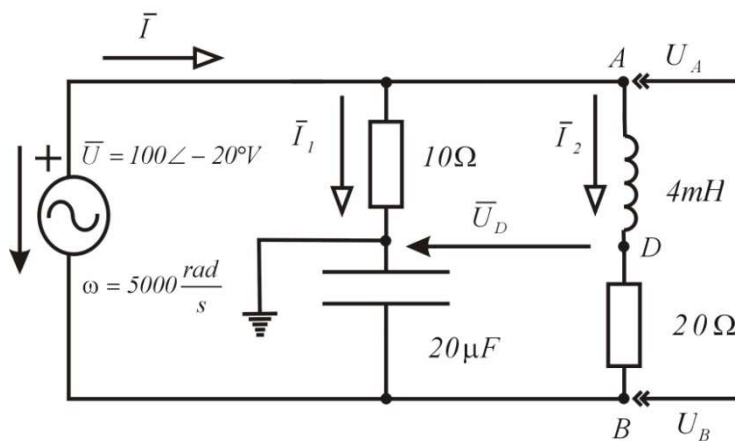
12.28 Az ábrán látható kapcsolás alapján határozza meg:

a., az $\bar{I}$ áram értékét!

b., az $\bar{U}_D$ feszültség nagyságát

c., az $\bar{U}_A$ és az $\bar{U}_B$ két ponton mért feszültségek között a fáziseltérést!

d., az egyenértékű soros elem két komponensét és rajzolja fel az ennek megfelelő helyettesítő kapcsolást!



a., A két ág impedanciája:

$$\bar{Z}_1 = 10 - j \cdot \frac{1}{5000 \cdot 20 \cdot 10^{-6} F} = 10 - j10 = 14,14 \angle -45^\circ \Omega$$

$$\bar{Z}_2 = 20 - j \cdot 5000 \cdot 4 \cdot 10^{-3} = 20 - j20 = 28,28 \angle 45^\circ \Omega$$

Az ohm törvény alapján:

$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{U}}{\bar{Z}_1} = \frac{100 \angle -20^\circ V}{14,14 \angle -45^\circ \Omega} = 7,07 \angle 25^\circ A = 6,41 + j2,99 A$$

$$\bar{I}_2 = \frac{\bar{U}}{\bar{Z}_2} = \frac{100 \angle -20^\circ V}{28,28 \angle 45^\circ \Omega} = 3,536 \angle -65^\circ A = 1,49 - j3,2 A$$

A csomóponti törvény alapján:

$$\bar{I} = \bar{I}_1 + \bar{I}_2 = 7,9 - j0,21 A = 7,903 \angle -1,5^\circ A$$

b., A feszültség az A és a D pont között a következő:

$$\bar{U}_{AD} = \bar{U}_A - \bar{U}_D \Rightarrow \bar{U}_D = \bar{U}_A - \bar{U}_{AD}$$

$$\bar{U}_D = 10 \angle 0^\circ \Omega \cdot \bar{I}_1 - 20 \angle 90^\circ \Omega \cdot \bar{I}_2 = 10 \angle 0^\circ \Omega \cdot 7,07 \angle 25^\circ - 20 \angle 90^\circ \Omega \cdot 3,536 \angle -65^\circ = 1,49 - j3,2 A = 70,7 \angle 25^\circ - 70,7 \angle 25^\circ V = 0V$$

Tehát a két pont között a voltmérő 0 voltot mutat.

$$c., \bar{U}_A = 10 \angle 0^\circ \Omega \cdot \bar{I}_1 = 10 \angle 0^\circ \Omega \cdot 7,07 \angle 25^\circ = 70,7 \angle 25^\circ V$$

mivel az $\bar{U}_B$ feszültség fordítottan jelenik meg a mérés miatt mint a valóságos irány, ezért szerepel egy „-1”-es szorzó vagyis a 180° -os fordítás.

$$\bar{U}_B = -\bar{Z}_C \cdot \bar{I}_1 = -10 \angle -90^\circ \Omega \cdot 7,07 \angle 25^\circ = 70,7 \angle 115^\circ V$$

Tehát a két szög közötti fáziseltérés $115^\circ - 25^\circ = 90^\circ$.

d., Az egyenértékű elemek meghatározásához szükség van az eredő impedanciára:

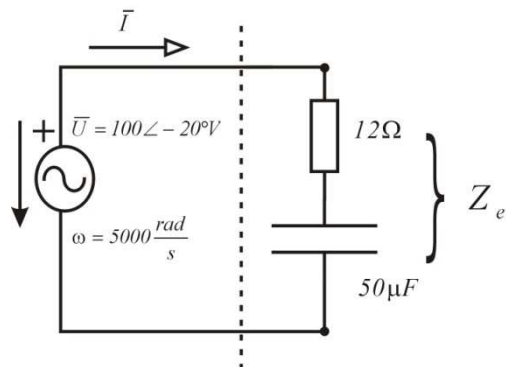
$$\bar{Z}_e = \frac{\bar{U}}{\bar{I}} = \frac{100 \angle -20^\circ V}{7,903 \angle -1,5^\circ A} = 12,66 \angle -18,5^\circ \Omega = 12 - j4 \Omega$$

Az egyenértékű hálózat elemei tehát:

$$R_{egy} - j \cdot X_{egy} = R_{egy} - j \cdot \frac{1}{\omega \cdot C_{egy}}$$

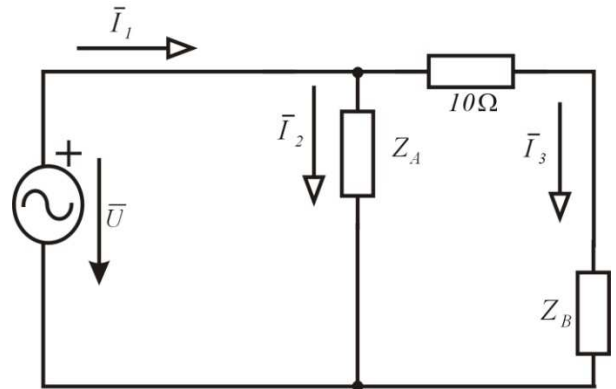
$$R_{egy} = 12 \Omega$$

$$C_{egy} = \frac{1}{\omega \cdot X_{Cegy}} = \frac{1}{5000 \frac{rad}{s} \cdot 4 \Omega} = 50 \mu F$$



12.30 A $\bar{Z}_A$ és $\bar{Z}_B$ ismeretlen elemi kétpólusokat tartalmazza az ábrán látható áramkör. Az $i_1(t) = 11,18 \cdot \sin(1000t + 26,5^\circ)A$ és a $i_3(t) = 7,07 \cdot \cos(1000t - 45^\circ)A$ áramokat ismerjük. Az alkalmazott feszültség $U = 70,7V$ és siet az $\bar{I}_3$ áramhoz képest. Határozza meg:

- a) az $\bar{I}_2$ áramot,
 b) a fázisszöget az $\bar{U}$ és az $\bar{I}_3$ között, valamint
 c) a $\bar{Z}_A$ és a $\bar{Z}_B$ értékeit!



$$\bar{I}_1 = \frac{11,18}{\sqrt{2}} \angle 26,5^\circ A = 7,905 \angle 26,5^\circ A$$

$$\bar{I}_3 = \frac{7,07}{\sqrt{2}} \angle 45^\circ A = 5,0 \angle 45^\circ A$$

A csomóponti törvény alapján: $\bar{I}_1 = \bar{I}_2 + \bar{I}_3$

$$\bar{I}_2 = \bar{I}_1 - \bar{I}_3 = 7,074 - j3,527 A - (3,536 + j3,536) \approx 3,538 \angle 0^\circ A$$

b., mivel tudjuk, hogy $U = 70,7V$ feszültség siet az $\bar{I}_3$ áramhoz képest és a Z_A egy elemi kétpólus, ami vagy fázisba van az $\bar{I}_2$ -vel vagy $\pm 90^\circ$ -al siet/késik. Mindkét feltételnek csak az induktivitás felel meg, tehát: $\bar{U} = 70,7 \angle 90^\circ V$

Tehát az $\bar{U}$ és az $\bar{I}_3$ között a fáziseltérés $90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$, és a feszültség siet az áramhoz képest.

c.,

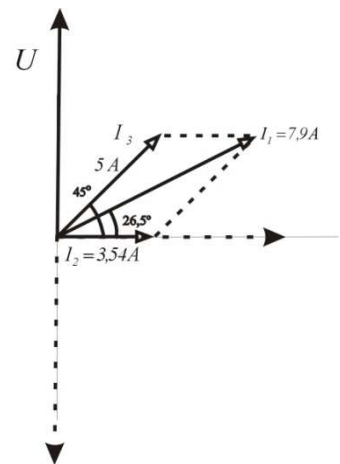
$$\bar{Z}_A = \frac{\bar{U}}{\bar{I}_2} = \frac{70,7 \angle 90^\circ V}{3,538 \angle 0^\circ A} = 20 \angle 90^\circ \Omega = X_{LA} \angle 90^\circ \Omega$$

$$L_A = \frac{X_{LA}}{\omega} = \frac{20 \Omega}{1000 \frac{rad}{s}} = 20 \cdot 10^{-3} H = 20mH$$

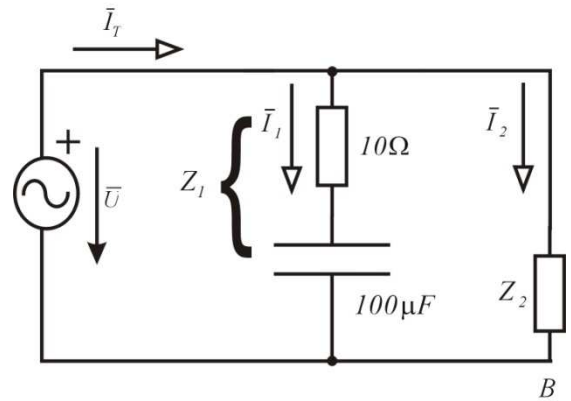
a másik ág impedanciája: $\frac{\bar{U}}{\bar{I}_3} = 10 + \bar{Z}_B$

$$\bar{Z}_B = \frac{\bar{U}}{\bar{I}_3} - 10 \Omega = \frac{70,7 \angle 90^\circ V}{5 \angle 45^\circ A} - 10 \Omega = 14,14 \angle 45^\circ \Omega - 10 \Omega = (10 + j10) \Omega - 10 \Omega = j10 = jX_{LB}$$

$$L_B = \frac{X_{LB}}{\omega} = \frac{10 \Omega}{1000 \frac{rad}{s}} = 10 \cdot 10^{-3} H = 10mH$$



- 12.31 Az ábrán látható hálózatban $i_T(t) = 0,158 \cdot \cos(1000 \cdot t + 26,6^\circ) A$ és $i_1(t) = 0,1 \cdot \sin(1000 \cdot t + 135^\circ) A$ időfüggvényei adottak. Határozza meg:**
- az $u(t)$ generátor feszültségének időfüggvényét.**
 - az ismeretlen $\bar{Z}_2$ elemi kétpólus értékét.**
 - az $\bar{U}_R$ és az $\bar{U}_C$ feszültség fázorokat.**



Az időfüggvényekből számítható:

$$\bar{I}_T = \frac{0,158}{\sqrt{2}} \angle(26,6^\circ) A = 0,112 \angle 26,6^\circ A =$$

$$= 0,1 + j0,05 A$$

$$\bar{I}_1 = \frac{0,1}{\sqrt{2}} \angle 135^\circ - 90^\circ A = 0,0707 \angle 45^\circ = 0,05 + j0,05 A$$

Csomóponti törvényből: $\bar{I}_2 = \bar{I}_T - \bar{I}_1 = 0,1 + j0,05 - (0,05 + j0,05) = 0,05 = 0,05 \angle 0^\circ A$

$$\bar{Z}_1 = R - j \frac{1}{\omega \cdot C} = 10 - j \frac{1}{1000 \cdot 100 \cdot 10^{-6}} = 10 - j10 \Omega = 14,14 \angle -45^\circ \Omega$$

Ohm törvény alapján:

$$\bar{U} = \bar{I}_1 \cdot \bar{Z}_1 = 0,0707 \angle 45^\circ A \cdot 14,14 \angle -45^\circ \Omega = 1 \angle 0^\circ V$$

Ezek után az időfüggvény: $u(t) = 1,414 \cdot \cos(1000 \cdot t) V$

b., A kettes ág impedanciája ugyancsak Ohm törvény alapján számítható:

$$\bar{Z}_2 = \frac{\bar{U}}{\bar{I}_2} = \frac{1 \angle 0^\circ V}{0,05 \angle 0^\circ A} = 20 \angle 0^\circ \Omega$$

0° -ból következik, hogy az áram fázisban van a feszültséggel tehát ellenállás a keresett elem.

c.,

$$\bar{U}_R = \bar{I}_1 \cdot \bar{Z}_R = 0,0707 \angle 45^\circ A \cdot 10 \angle 0^\circ \Omega = 0,707 \angle 45^\circ V$$

$$\bar{U}_C = \bar{I}_1 \cdot \bar{Z}_C = 0,0707 \angle 45^\circ A \cdot 10 \angle -90^\circ \Omega = 0,707 \angle -45^\circ V$$

12.32 Az ábrán látható hálózatban az $\bar{I}_1$ 120° -ot késik az $\bar{I}_2$ -höz képest. $U = 100V$, $I_1 = 5A$,

$$\omega = 1000 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \text{ és } C = 25 \mu F.$$

a) Rajzoljon fázorábrát és számítsa ki az $\bar{I}$ áramot!

b) Számítsa ki az L és az R értékeit!

Mivel nem ismerünk egyetlen egy konkrét időfüggvényt sem, ezért mi dönthetjük el, hogy melyik vektor és milyen pozícióban legyen a referencia vektor: $\bar{U} = 100 \angle 0^\circ V$

Az egyes ágak impedanciáinak meghatározása után, számíthatóak ki az ágáramok:

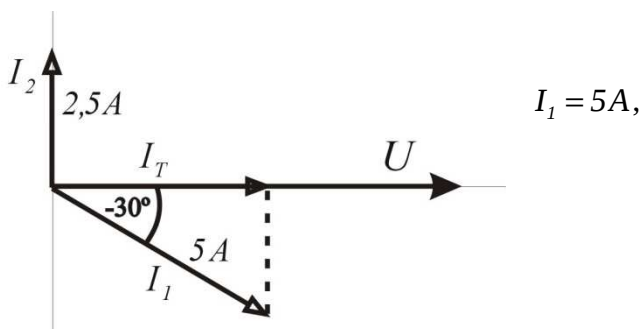
$$\bar{Z}_2 = X_C \angle -90^\circ \Omega = \frac{1}{1000 \cdot 25 \cdot 10^{-6}} \angle -90^\circ \Omega = 40 \angle -90^\circ \Omega$$

$$\bar{I}_2 = \frac{\bar{U}}{\bar{Z}_2} = \frac{100 \angle 0^\circ V}{40 \angle -90^\circ \Omega} = 2,5 \angle 90^\circ A$$

mivel $\bar{I}_1$ 120° -ot késik az $\bar{I}_2$ -höz képest és ezért: $\bar{I}_2 = 5 \angle -30^\circ A$

Csomóponti törvény alapján:

$$\begin{aligned} \bar{I}_T &= \bar{I}_1 - \bar{I}_2 = 5 \angle -30^\circ A + 2,5 \angle 90^\circ A = \\ &= 4,33 - j2,5 + j2,5 = 4,33 \angle 0^\circ A \end{aligned}$$



b., Ha ismert az ág árama és feszültsége Ohm törvény alapján számítható az impedancia:

$$\bar{Z}_1 = \frac{\bar{U}}{\bar{I}_1} = \frac{100 \angle 0^\circ V}{5 \angle -30^\circ A} = 20 \angle 30^\circ \Omega = 17.32 + j10 = R + jX_L$$

$$R = 17.32 \Omega$$

$$X_L = 10 \Omega = \omega \cdot L = 1000 \cdot L$$

$$L = \frac{X_L}{\omega} = \frac{10 \Omega}{1000 \frac{\text{rad}}{\text{s}}} = 10 \text{ mH}$$

12.33 Az ábrán feltüntetett vonatkozási irányok alapján határozza meg az ágáramok és a feszültségesések nagyságát 1-es, 2-es, 3-as impedanciákon!

- $\bar{U}_1, \bar{U}_2, \bar{U}_3$ feszültségek nagysága?

- $\bar{I}_1, \bar{I}_2, \bar{I}_3, \bar{I}_4, \bar{I}_5, \bar{I}_6$ ágáramok nagysága?

Huroktörvény a „cbd” háromszög alapján:

$$-\bar{U}_{II} - \bar{U}_{III} + \bar{U}_I = 0$$

$$\bar{U}_I = \bar{U}_{II} + \bar{U}_{III} = 50 \angle -120^\circ \text{V} + 30 \angle 60^\circ \text{V} =$$

$$= (-25 - j43,3) + (15 + j25,98) =$$

$$\bar{U}_I = -10 - j17,32 = 20 \angle -120^\circ \text{V}$$

Ohm törvény alapján $\bar{I}_1$ számítható:

$$\bar{Z}_1 = (15 + j20) \Omega = 25 \angle 53,1^\circ \Omega$$

$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{U}}{\bar{Z}_1} = \frac{20 \angle -120^\circ \text{V}}{25 \angle 53,1^\circ \Omega} = 0,8 \angle -173,1^\circ \text{A} =$$

$$= (-0,794 - j0,096) \text{A}$$

Huroktörvény „abdc” négyszög alapján számítható $\bar{U}_2$:

$$\bar{U}_{III} + \bar{U}_{II} - \bar{U}_I + \bar{U}_2 = 0$$

$$\bar{U}_2 = \bar{U}_I - (\bar{U}_{II} + \bar{U}_{III}) = \bar{U}_I - \bar{U}_I = 50 \angle 240^\circ \text{V} - 20 \angle -120^\circ \text{V} = 30 \angle -120^\circ \text{V}$$

Ne feledjük hogy a -120° az ugyan az mint a 240° .

Mivel a kettes ágban két elem van párhuzamosan kapcsolva ezért érdemes admittanciával számolni:

$$\bar{Y}_2 = \frac{1}{15 \Omega} + \frac{1}{j20 \Omega} = 0,0667 - j0,05 = 0,0833 \angle -36,9^\circ \text{S}$$

$$\bar{I}_2 = \frac{\bar{U}_2}{\bar{Z}_2} = \bar{U}_2 \cdot \bar{Y}_2 = 30 \angle -120^\circ \text{V} \cdot 0,0833 \angle -36,9^\circ \text{S} = 2,5 \angle -156,9^\circ \text{A} = (-2,3 - j0,981) \text{A}$$

Huroktörvény az „adc” háromszög alapján számíthatjuk ki $\bar{U}_3$ értékét:

$$\bar{U}_3 + \bar{U}_{II} - \bar{U}_I = 0$$

$$\bar{U}_3 = \bar{U}_I - \bar{U}_{II} = 50 \angle 240^\circ \text{V} - 50 \angle -120^\circ \text{V} = 0 \text{V}$$

$$\bar{Z}_3 = -j20 \Omega$$

$$\bar{I}_3 = \frac{\bar{U}_3}{\bar{Z}_3} = 0 \text{A}$$

c., Az „a” csomópontba csomóponti törvényt felírva:

$$\bar{I}_5 = \bar{I}_2 + \bar{I}_3 = \bar{I}_2 = 2,5 \angle -156,9^\circ \text{A}$$

A „b” csomópontra felírva: $\bar{I}_1 = \bar{I}_2 + \bar{I}_4 \Rightarrow \bar{I}_4 = \bar{I}_1 - \bar{I}_2$

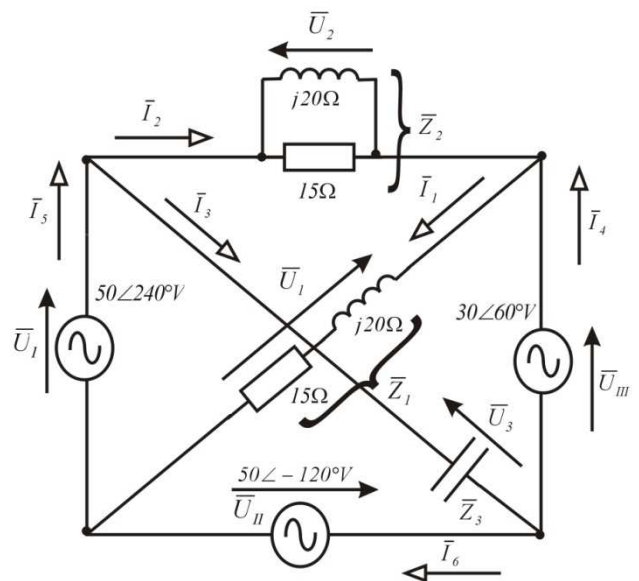
$$\bar{I}_4 = -0,794 - j0,096 - (-2,3 - j0,981) = 1,506 + j0,885 = 1,747 \angle 30,4^\circ \text{A}$$

A „d” csomópontra felírva: $\bar{I}_3 = \bar{I}_4 + \bar{I}_6 = 0$

$$\bar{I}_6 = -\bar{I}_4 = 1,747 \angle -149,6^\circ \text{A}$$

A „c” csomópontra ellenőrzésként felírva:

$$\bar{I}_5 = \bar{I}_1 + \bar{I}_6 = -0,794 - j0,096 + (-1,506 - j0,885) = -2,3 - j0,981 = 2,5 \angle -156,9^\circ \text{A}$$



13.01 Határozza meg a hálózat hatásos teljesítmény felvételét (a disszipált teljesítményt)! Adott a bemenő feszültség értéke: $u(t) = 28,28 \cdot \cos(10.000 \cdot t) V$.

$$\bar{U} = 20 \angle 0^\circ V, \quad \omega = 10.000 \text{ rad/s}.$$

A teljes impedancia a frekvencia függvényében a következő:

$$\begin{aligned} \bar{Z}_T &= 4 + j3 + \frac{2 \cdot (-j4)}{2 - j4} = \\ &= 4 + j3 + \frac{(-j8)(2 + j4)}{(2 - j4)(2 + j4)} = \\ &= 4 + j3 + \frac{-j16 + 32}{4 + 16} = 4 + j3 + 1,6 - j0,8 = \\ &= (5,6 + j2,2) \Omega = 6,017 \angle 21,4^\circ \Omega \end{aligned}$$

Ohm törvény alapján I_e számítható:

$$\bar{I}_e = \frac{\bar{U}}{\bar{Z}_T} = \frac{20 \angle 0^\circ V}{6,017 \angle 21,4^\circ \Omega} = 3,324 \angle -21,4^\circ A$$

Az áram késik a feszültséghez képest, tehát a kör dominánsan induktív jellegű.

A feszültség és az áram szöge: $\varphi = 21,4^\circ$

A teljesítménytényező: $\cos \varphi = \cos 21,4^\circ = 0,931$ (késő)

A hatásos teljesítmény: $P = U \cdot I \cdot \cos \varphi = 20V \cdot 3,324A \cdot \cos 21,4^\circ = 61,89W$

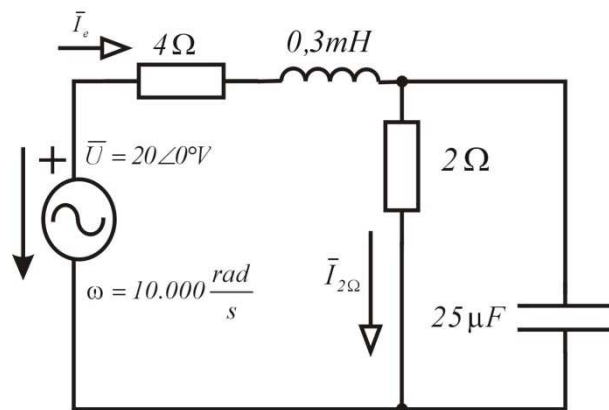
Vagy másképpen számolva a hatásos teljesítményt:

$$P = I^2 \cdot R_{\text{egyen}} = 3,324^2 A^2 \cdot 5,6 \Omega = 61,87W$$

Harmadik félek éppen is, eljuthatunk a végeredményhez, ha az ágak áramokat határozzuk meg:

$$\text{Áramosztót felírva: } \bar{I}_{2\Omega} = \bar{I}_e \cdot \frac{-j4\Omega}{2 - j4\Omega} = 3,324 \angle -21,4^\circ A \cdot \frac{4 \angle -90^\circ \Omega}{4,472 \angle -63,4^\circ \Omega} = 2,973 \angle -48^\circ A$$

$$P = I^2 \cdot 4\Omega + I_{2\Omega}^2 \cdot 2\Omega = 3,324^2 A^2 \cdot 4\Omega + 2,973^2 \cdot 2\Omega = 61,87W$$



13.02 Adott a bemenő feszültség $u(t) = 7,07 \cdot \sin(\omega \cdot t) \text{ V}$. Határozza meg a hálózat hatásos teljesítmény felvételét és a teljesítménytényezőt az alábbi esetekben:

a., ha az áram értéke: $i(t) = 1,414 \cdot \sin(\omega \cdot t - 30^\circ) \text{ A}$.

b., ha az áram értéke: $i(t) = 0,3535 \cdot \sin(\omega \cdot t + 60^\circ) \text{ A}$.

c., ha a terhelő impedancia értéke: $\bar{Z} = (3 + j4) \Omega$.

a., Tehát amit ismerünk: $\bar{U} = 5 \angle 0^\circ \text{ V}$, $\bar{I} = 1 \angle -30^\circ \text{ A}$. Így az áram késik a feszültséghez képest $\varphi = 30^\circ$ -ot, a terhelés induktív jellegű.

$$\cos \varphi = \cos 30^\circ = 0,866 (\text{késő})$$

$$P = U \cdot I \cdot \cos \varphi = 5 \text{ V} \cdot 1 \text{ A} \cdot \cos 30^\circ = 4,33 \text{ W}$$

b., Tehát amit ismerünk: $\bar{U} = 5 \angle 0^\circ \text{ V}$, $\bar{I} = 0,25 \angle 60^\circ \text{ A}$. Így az áram siet a feszültséghez képest $\varphi = 60^\circ$ -ot, a terhelés kapacitív jellegű.

$$\cos \varphi = \cos 60^\circ = 0,5 (\text{siető})$$

$$P = U \cdot I \cdot \cos \varphi = 5 \text{ V} \cdot 0,25 \text{ A} \cdot \cos 60^\circ = 0,625 \text{ W}$$

c., $\bar{Z} = (3 + j4) \Omega = 5 \angle 53,1^\circ \Omega$, tehát a kör dominánsan induktív jellegű.

$$\bar{I} = \frac{\bar{U}}{\bar{Z}} = \frac{5 \angle 0^\circ \text{ V}}{5 \angle 53,1^\circ \Omega} = 1 \angle -53,1^\circ \text{ A}$$

A feszültség és az áram szöge: $\varphi = 53,1^\circ$

A teljesítménytényező: $\cos \varphi = \cos 53,1^\circ = 0,6 (\text{késő})$

$$A \text{ hatásos teljesítmény: } P = U \cdot I \cdot \cos \varphi = 5 \text{ V} \cdot 1 \text{ A} \cdot \cos 53,1^\circ = 3 \text{ W}$$

13.04 Adott egy áramkör eredő impedanciája $\bar{Z} = 10 \angle 36,9^\circ \Omega$, amit $\bar{U} = 30 \angle 0^\circ \text{ V}$ esetén. Határozza meg a hálózat komplex teljesítmény felvételét. És mind a háromféle teljesítmény nagyságát:

$$\text{Az ohm törvény alapján: } \bar{I} = \frac{\bar{U}}{\bar{Z}} = \frac{30 \angle 0^\circ \text{ V}}{10 \angle 36,9^\circ \Omega} = 3 \angle -36,9^\circ \text{ A}$$

A látszólagos teljesítmény meghatározásához szükségünk van az áram konjugált értékére.

$$\bar{S} = U \cdot I \cdot e^{j\varphi} = S \cdot e^{j\varphi} = S \cdot \cos \varphi + j \cdot S \cdot \sin \varphi = \bar{U} \cdot \bar{I}^*$$

$$\bar{S} = \bar{U} \cdot \bar{I}^* = \bar{U} \cdot \left[\frac{\bar{U}}{\bar{Z}} \right]^* = \bar{U} \cdot \bar{U}^* \cdot \frac{1}{\bar{Z} \cdot e^{-j\varphi}} = \frac{U^2}{\bar{Z}} \cdot e^{j\varphi} = S \cdot e^{j\varphi}$$

$$\bar{I}^* = 3 \angle 36,9^\circ \text{ A}$$

$$\bar{S} = \bar{U} \cdot \bar{I}^* = 30 \angle 0^\circ \text{ V} \cdot 3 \angle 36,9^\circ \text{ A} = 90 \angle 36,9^\circ \text{ VA}$$

A látszólagos teljesítmény értéke: $S = 90 \text{ VA}$.

$$\bar{S} = 90 \angle 36,9^\circ \text{ VA} = 72 + j54 \text{ VA} = P + jQ$$

A hatásos teljesítmény értéke: $P = 72 \text{ W}$, a meddő teljesítmény pedig: $Q = 54 \text{ VAr}$.

A teljesítménytényező értéke: $\cos \varphi = \cos 36,9^\circ = 0,8 (\text{késő})$, tehát induktív a terhelés.

Ellenőrizve a számításunk helyességét:

$$\bar{Z} = 10 \angle 36,9^\circ \Omega = (8 + j6) \Omega = R + jX_L$$

$$A \text{ hatásos teljesítmény: } P = I^2 \cdot R = 3^2 \text{ A}^2 \cdot 8 \Omega = 72 \text{ W}$$

$$A \text{ meddő teljesítmény: } Q = I^2 \cdot X_L = 3^2 \text{ A}^2 \cdot 6 \Omega = 54 \text{ VAr (induktív)}$$

13.05 Adott a hatásos teljesítmény, amelynek értéke 1kW. Határozza meg a teljesítménytényező értékét, ha:

a., $Q = 0\text{VAr}$.

b., $Q = 500\text{VAr}$.

c., $Q = 200\text{VAr}$.

a., $\bar{S} = P + jQ = 1000 + j0 = 1000\angle 0^\circ\text{VA}$

A teljesítménytényező: $\cos \varphi = \cos 0^\circ = 1$

b., $\bar{S} = P + jQ = 1000 + j500 = 1118\angle 26,6^\circ\text{VA}$

A teljesítménytényező: $\cos \varphi = \cos 26,6^\circ = 0,894$ induktív jellegű

c., $\bar{S} = P + jQ = 1000 + j200 = 1019,8\angle -11,3^\circ\text{VA}$

A teljesítménytényező: $\cos \varphi = \cos 11,3^\circ = 0,981$ kapacitív jellegű

13.06 Adott a hatásos teljesítmény, amelynek értéke 2kW, a teljesítménytényező értéke 0,9 késő. Határozza meg a komplex teljesítmény értékét!

$\cos \varphi = 0,9 \Rightarrow \varphi = 25,84^\circ$ késő, tehát induktív jellegű a terhelés.

A komplex teljesítmény vektornak csak egyik komponense adott

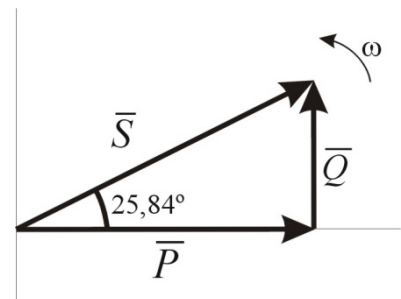
$$\bar{S} = P + jQ = 2000 + jQ$$

A Q értékét a teljesítmény háromszögből határozzuk meg:

$$\tan \varphi = \frac{Q}{P} = \tan 25,84^\circ = 0,4843$$

$$Q = 2000 \cdot 0,4843 = 968,6\text{VAr}$$

$$\bar{S} = P + jQ = 2000 + j968,6 = 2222,2\angle 25,84^\circ\text{VA}$$



13.07 Adott a hatásos teljesítmény, amelynek értéke 4kW, a meddő teljesítmény értéke 3kVAr kapacitív. A terhelésre jutó feszültség 500V. Határozza meg a látszólagos teljesítmény és a teljesítménytényező, a bemenő áram, és az impedancia értékeit!

$$\bar{S} = P + jQ = 4000 - j3000 = 5000\angle -36,9^\circ\text{VA}$$

Tehát a látszólagos teljesítmény értéke $S = U \cdot I = 5000\text{VA}$

$\cos(-36,9^\circ) = 0,8$ siető, tehát kapacitív jellegű a terhelés.

$$I = \frac{S}{U} = \frac{5000\text{VA}}{500\text{V}} = 10\text{A}$$

Az impedancia meghatározásához, viszonyítási alapként, fel kell vennünk az egyik vektort 0° -al, referencia vektornak. Legyen ez a fesz vektor: $\bar{U} = 500\angle 0^\circ\text{V}$

Mivel a feszültséghez képest siet az áram (melyek közti szög már ismert) ezért: $\bar{I} = 10\angle -36,9^\circ\text{A}$

$$\bar{Z} = \frac{\bar{U}}{\bar{I}} = \frac{500\angle 0^\circ\text{V}}{10\angle -36,9^\circ\text{A}} = 50\angle -36,9^\circ\Omega = (40 - j30)\Omega = R - jX_C$$

$$R = 40\Omega$$

$$X_C = 30\Omega$$

Ellenőrzés ként:

$$\text{A hatásos teljesítmény: } P = I^2 \cdot R \Rightarrow R = \frac{P}{I^2} = \frac{4000\text{W}}{10^2} = 40\Omega$$

$$\text{A meddő teljesítmény: } Q = I^2 \cdot X_C \Rightarrow X_C = \frac{Q}{I^2} = \frac{3000\text{VAr}}{10^2} = 30\Omega$$

- 13.08 Az alábbi kapcsolásban adott 3 terhelés soros-párhuzamos kapcsolásban. Határozza meg,**
a., a kapcsolás teljes komplex teljesítményét!
b., teljesítménytényező értékét!
c., a bemenő áram fázis alakját!

Az 1. terhelésre:

$$\bar{S}_1 = 100 + j200 = 223,6 \angle 63,4^\circ \text{VA}$$

A 2. terhelésre: $\cos(\varphi_2) = 0,8 = \frac{P_2}{S_2}$ siető

$\varphi_2 = -36,9^\circ$, tehát kapacitív jellegű a terhelés.

$$S_2 = \frac{P_2}{0,8} = \frac{400}{0,8} = 500 \text{VA}$$

A 2. terhelésre: $\bar{S}_2 = 500 \angle -36,9^\circ \text{VA} = (400 - j300) \text{VA}$

A 3. terhelésre: $Q_3 = S_3 \cdot \sin \varphi_3$, $\sin \varphi_3 = \frac{Q_3}{S_3} = \frac{300}{600} = 0,5 \Rightarrow \varphi_3 = 30^\circ$ pozitív a szög tehát a terhelés induktív jellegű.

$$\bar{S}_3 = 600 \angle 30^\circ \text{VA} = (519,6 + j300) \text{VA}$$

Az eredő teljesítmény a rész teljesítmények összege:

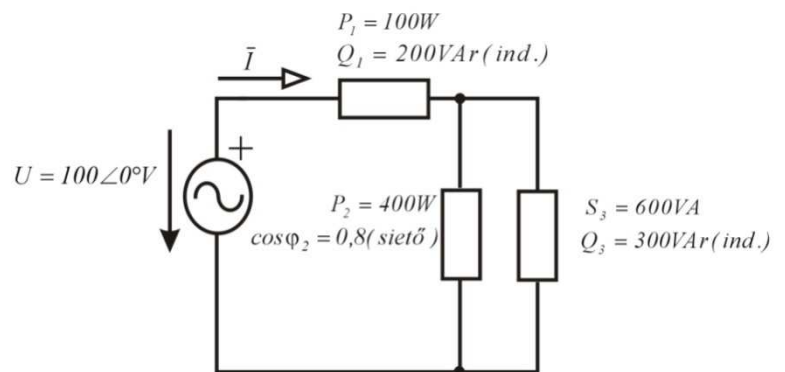
$$\bar{S} = \bar{S}_1 + \bar{S}_2 + \bar{S}_3 = (100 + j200 + 400 - j300 + 519,6 + j300) \text{VA}$$

$$\bar{S} = 1019,6 + j200 = 1039 \angle 11,1^\circ \text{VA}$$

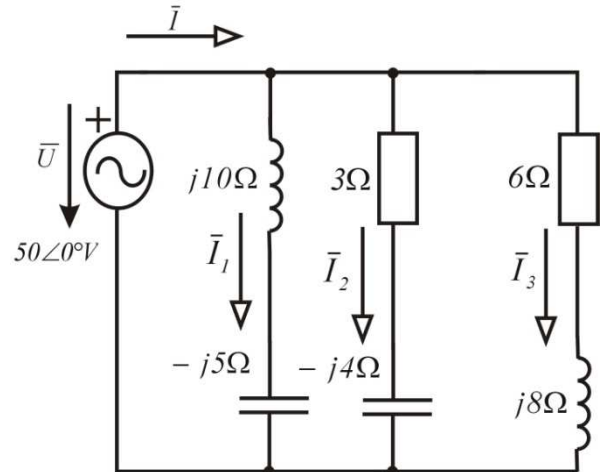
$$S = U \cdot I = 1039 \text{VA} \Rightarrow I = \frac{S}{U} = \frac{1039}{100} = 10,39 \text{A}$$

A feszültséghez képest késik az áram (ld. a teljesítmény háromszöget), a hasonló háromszögek alapján:

$$\bar{I} = 10,39 \angle -11,1^\circ \text{A}$$



13.09 Határozza meg a három párhuzamosan kötött terhelés. Komplex teljesítményét egyenként. Határozza meg,
a., a kapcsolás teljes komplex teljesítményét!
b., teljesítménytényező értékét!
c., a bemenő áram fázis alakját!



Az 1. ág terhelése:

$\bar{Z}_1 = (j10 - j5)\Omega = j5 = 5\angle 90^\circ\Omega$ induktív jellegű terhelés

$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{U}}{\bar{Z}_1} = \frac{50\angle 0^\circ V}{5\angle 90^\circ \Omega} = 10\angle -90^\circ A$$

$$\bar{S}_1 = \bar{U} \cdot \bar{I}_1^* = 50\angle 0^\circ V \cdot 10\angle 90^\circ A = 500\angle 90^\circ VA = j500VA$$

A 2. ág terhelése:

$\bar{Z}_2 = (3 - j4)\Omega = 5\angle -53,1^\circ\Omega$ kapacitív jellegű terhelés

$$\bar{I}_2 = \frac{\bar{U}}{\bar{Z}_2} = \frac{50\angle 0^\circ V}{5\angle -53,1^\circ \Omega} = 10\angle 53,1^\circ A$$

$$\bar{S}_2 = \bar{U} \cdot \bar{I}_2^* = 50\angle 0^\circ V \cdot 10\angle -53,1^\circ A = 500\angle -53,1^\circ VA = (300 - j400)VA$$

A 3. ág terhelése:

$\bar{Z}_3 = (6 + j8)\Omega = 10\angle 53,1^\circ\Omega$ induktív jellegű terhelés

$$\bar{I}_3 = \frac{\bar{U}}{\bar{Z}_3} = \frac{50\angle 0^\circ V}{10\angle 53,1^\circ \Omega} = 5\angle -53,1^\circ A$$

$$\bar{S}_3 = \bar{U} \cdot \bar{I}_3^* = 50\angle 0^\circ V \cdot 5\angle 53,1^\circ A = 250\angle 53,1^\circ VA = (150 + j200)VA$$

Az eredő teljesítmény a részek teljesítmények összege:

$$\bar{S} = \bar{S}_1 + \bar{S}_2 + \bar{S}_3 = (j500) + (300 - j400) + (150 + j200)VA$$

$$\bar{S} = 450 + j300 = 540,8\angle 33,7^\circ VA$$

A teljes terhelés teljesítménytényezője: $\cos(\varphi_2) = \cos(33,7^\circ) = 0,832$ késő, tehát induktív jellegű az eredő terhelés.

$$\bar{S} = \bar{U} \cdot \bar{I}^*$$

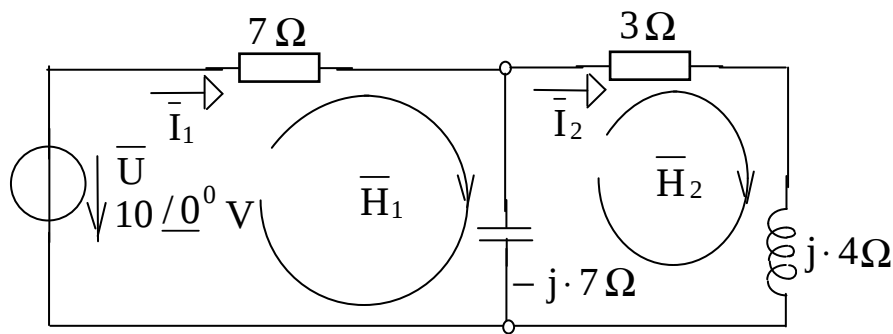
$$\bar{I}^* = \frac{\bar{S}}{\bar{U}} = \frac{540,8\angle 33,7^\circ VA}{50\angle 0^\circ V} = 10,82\angle 33,7^\circ A$$

$$\bar{I} = 10,82\angle -33,7^\circ A$$

vagy ellenőrzésként a három ágáram összegét véve ugyan ennyit kell kapnunk:

$$\bar{I} = \bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3 = -j10A + (6 + j8)A + (3 - j4)A = (9 - j6)A = 10,82\angle -33,7^\circ A$$

15.01 Határozza meg az ábrán látható hálózat, $\bar{I}_1$ és $\bar{I}_2$ áramát a hurokáramok módszerével! Az egyes ellenállások hatásos teljesítményét, valamint az eredő P hatásos teljesítményt!



I. hurokban az $\bar{I}_1$ hurokáram folyik:

$$(7 - j7) \cdot \bar{I}_1 - (-j7) \cdot \bar{I}_2 = 10$$

II. hurokban az $\bar{I}_2$ hurokáram folyik:

$$-(-j7) \cdot \bar{I}_1 + (3 + j4 - j7) \cdot \bar{I}_2 = 0$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} (7 - j7) & j7 \\ j7 & (3 - j3) \end{vmatrix} = (7 - j7)(3 - j3) - (j7)(j7) = 21 - 21 - j21 - j21 + 49 = 49 - j42 = 64,54 \angle -40,6^\circ$$

$$\bar{I}_1 = \frac{\begin{vmatrix} 10 & j7 \\ 0 & (3 - j3) \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{10(3 - j3)}{49 - j42} = \frac{42,43 \angle -45^\circ}{64,54 \angle -40,6^\circ} = 0,657 \angle -4,4^\circ \text{ A}$$

$$\bar{I}_2 = \frac{\begin{vmatrix} (7 - j7) & 10 \\ j7 & 0 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{-10(j7)}{49 - j42} = \frac{70 \angle -90^\circ}{64,54 \angle -40,6^\circ} = 1,085 \angle -49,4^\circ \text{ A}$$

Az eredő hatásos teljesítmény: $P = U \cdot I_1 \cdot \cos \varphi_{U,I_1} = 10 \cdot 0,657 \text{ A} \cdot \cos 4,4^\circ = 6,55 \text{ W}$

Az egyes ellenállások hatásos teljesítményei:

$$P_{7\Omega} = I_1^2 \cdot 7\Omega = 0,657^2 \text{ A}^2 \cdot 7\Omega = 3,02 \text{ W}$$

$$P_{3\Omega} = I_2^2 \cdot 3\Omega = 1,085^2 \text{ A}^2 \cdot 3\Omega = 3,53 \text{ W}$$

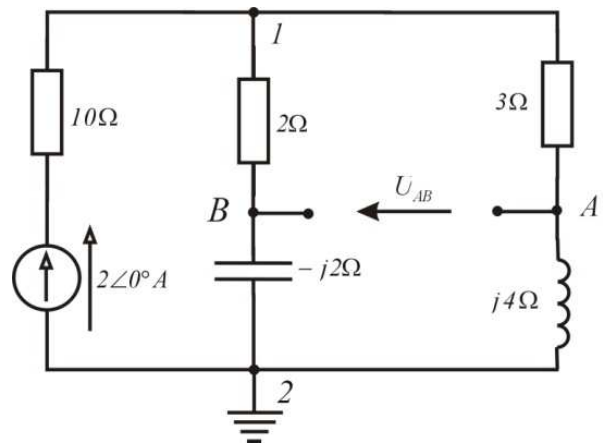
15.08 Határozza meg az ábrán látható áramkörben az $\bar{U}_{AB}$ feszültség értékét.

$$\frac{\bar{U}_1}{2-j2} + \frac{\bar{U}_1}{3+j4} = 2\angle 0^\circ \text{ A}$$

$$\bar{U}_1 \left(\frac{1}{2,2828\angle -45^\circ} + \frac{1}{5\angle 53,1^\circ} \right) = 2$$

$$\bar{U}_1 (0,25 + j0,25 + 0,12 - j0,16) = 2$$

$$\bar{U}_1 = \frac{2}{0,37 + j0,09} = \frac{2}{0,381\angle 13,7^\circ} = 5,25\angle -13,7^\circ \text{ V}$$



$$\bar{U}_{AB} = \bar{U}_{A2} - \bar{U}_{B2} = \bar{U}_1 \frac{j4}{3+j4} - \bar{U}_1 \frac{-j2}{2-j2} = \bar{U}_1 (0,64 + j0,48 - 0,5 + j0,5) \text{ V} =$$

$$= 5,25\angle 13,7^\circ (0,64 + j0,48 - 0,5 + j0,5) = 5,25\angle 13,7^\circ (0,14 + j0,98) =$$

$$= 5,25\angle 13,7^\circ \cdot 0,99\angle 81,9^\circ = 5,2\angle 68,2^\circ \text{ V}$$

15.09 A csomóponti potenciálok módszerével határozza meg az $\bar{U}$ feszültséget úgy, hogy a $4\ \Omega$ -os ellenállás árama zérus legyen!

Mivel a feladat csomóponti potenciálok módszerét írja elő, elsőként át kell alakítani a feszültség generátorokat, áramgenerátorokká.

A 3-as csomópontot választva közös testpontnak:

1. csomópontra felírva az áramok értékeit:

$$\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{j2} + \frac{1}{2}\right) \cdot \bar{U}_1 - \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \bar{U}_2 = 1$$

2. csomópontra felírva az áramok értékeit:

$$-\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \bar{U}_1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{-j2}\right) \cdot \bar{U}_2 = \frac{\bar{U}}{4}$$

Az egyenletrendszer:

$$(0,7 - j0,5) \cdot \bar{U}_1 - 0,5 \cdot \bar{U}_2 = 1$$

$$-0,5 \cdot \bar{U}_1 + (0,75 + j0,5) \cdot \bar{U}_2 = \frac{\bar{U}}{4}$$

$$\bar{U}_{4\Omega} = \bar{U}_2 - \bar{U} = 0 \Rightarrow \bar{U}_2 = \bar{U}$$

Az egyenletrendszer alapján felírható $\bar{U}_2$:

$$\bar{U}_2 = \frac{\begin{vmatrix} (0,7 - j0,5) & 1 \\ -0,5 & (\frac{\bar{U}}{4}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (0,7 - j0,5) & -0,5 \\ -0,5 & (0,75 + j0,5) \end{vmatrix}} = \bar{U}$$

$$\frac{\bar{U}(0,175 - j0,125) + 0,5}{0,525 + 0,25 - j0,375 + j0,35 - 0,25} = \bar{U}$$

$$\bar{U}(0,175 - j0,125) + 0,5 = \bar{U}(0,525 - j0,025)$$

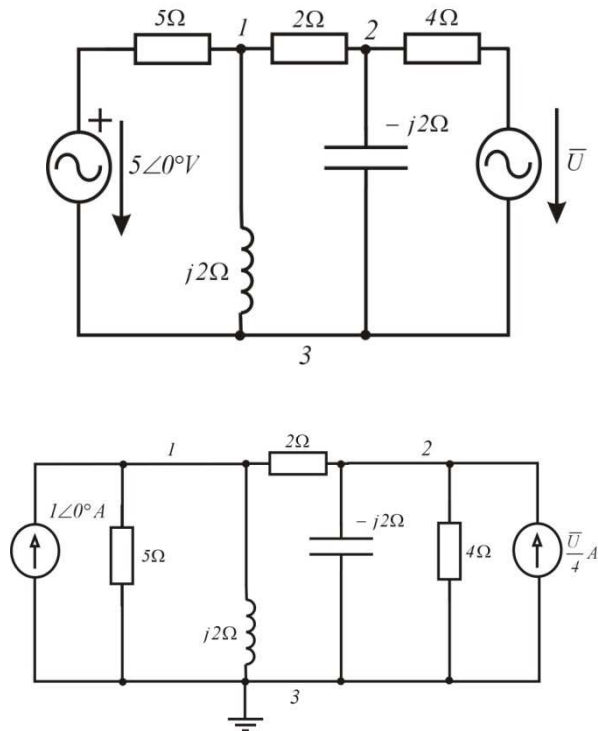
$$\bar{U} = \frac{0,5}{0,35 - j0,1} = \frac{0,5}{0,364 \angle 15,9^\circ} = 1,374 \angle -15,9^\circ \text{V}$$

Innen számítható az áramgenerátor árama:

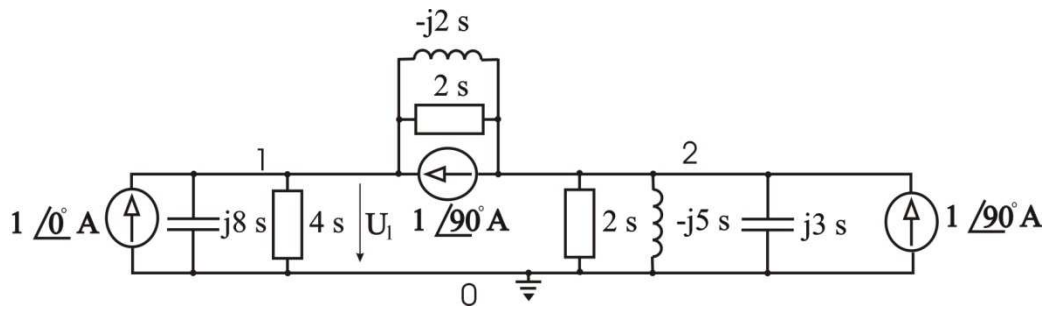
$$\frac{\bar{U}}{4\Omega} = \frac{1,374 \angle -15,9^\circ \text{V}}{4\Omega} = 0,3435 \angle -15,9^\circ \text{A} = (0,33 - j0,094) \text{A}$$

$$\bar{U}_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -0,5 \\ 0,33 - j0,094 & 0,75 + j0,5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (0,7 - j0,5) & -0,5 \\ -0,5 & (0,75 + j0,5) \end{vmatrix}} = \frac{0,75 + j0,5 + 0,165 - j0,047}{0,525 - j0,025} = \frac{0,915 + j0,453}{0,525 - j0,025} =$$

$$\bar{U}_1 = 1,943 \angle 29^\circ \text{V}$$



15.10 Írja fel mellékelt ábrán a csomóponti potenciálok egyenletrendszerét, és határozza meg az $1\angle 0^\circ \text{ A}$ -es áramforrásra jutó feszültséget!



1. csomópontra felírva az áramok értékeit:

$$(4 + j8 + 2 - j2) \cdot \bar{U}_1 - (2 - j2) \cdot \bar{U}_2 = 1 + j1$$

2. csomópontra felírva az áramok értékeit:

$$-(2 - j2) \cdot \bar{U}_1 + (2 - j2 + 2 - j5 + j3) \cdot \bar{U}_2 = 1\angle 90^\circ - 1\angle 90^\circ = 0$$

Az egyenletrendszer:

$$(6 + j6) \cdot \bar{U}_1 - (2 - j2) \cdot \bar{U}_2 = 1 + j1$$

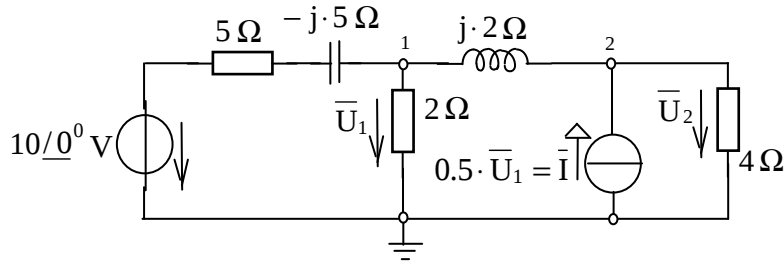
$$-(2 - j2) \cdot \bar{U}_1 + (4 - j4) \cdot \bar{U}_2 = 0$$

Az egyenletrendszer determinánsa:

$$\bar{U}_1 = \frac{\begin{vmatrix} (1 + j1) & -(2 - j2) \\ 0 & (4 - j4) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (6 + j6) & -(2 - j2) \\ -(2 - j2) & (4 - j4) \end{vmatrix}} = \frac{(1 + j1)(4 - j4)}{(6 + j6)(4 - j4) - (2 - j2)(2 - j2)} =$$

$$= \frac{8}{48 - (4 - 4 - j4 - j4)} = \frac{8}{48 + j8} = \frac{1}{6 + j1} = 0,164 \angle -9,5^\circ \text{ V}$$

15.12 Határozza meg a 2-es csomópont $\bar{U}_2$ feszültségét, ha az áramgenerátor árama $\bar{I} = 0,5 \cdot \bar{U}_1$ szerint függ a feszültségtől! Alkalmazza a csomóponti potenciálok módszerét!



$$\bar{I}_s = \frac{10\angle 0^\circ \text{V}}{5 - j5} = \frac{10\angle 0^\circ \text{V}}{7,072\angle -45^\circ} = 1,414\angle 45^\circ \text{A} = (1 + j1) \text{A}$$

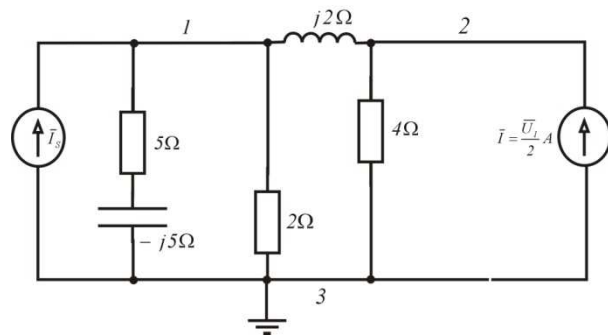
A 3-as csomópontot választva közös testpontnak:

1. csomópontra felírva az áramok értékeit:

$$\frac{\bar{U}_1}{2} + \frac{\bar{U}_1}{5 - j5} + \frac{\bar{U}_1 - \bar{U}_2}{j2} = 1 + j1$$

2. csomópontra felírva az áramok értékeit:

$$\frac{\bar{U}_2}{4} + \frac{\bar{U}_2 - \bar{U}_1}{j2} = \bar{I} = 0,5 \cdot \bar{U}_1$$



Az egyenletrendszer:

$$(0,5 + 0,1 + j0,1 - j0,5) \cdot \bar{U}_1 + j0,5 \cdot \bar{U}_2 = 1 + j1$$

$$(-0,5 + j0,5) \cdot \bar{U}_1 + (0,25 - j0,5) \cdot \bar{U}_2 = 0$$

Az egyenletrendszer alapján az $\bar{U}_2$ feszültséget felírhatjuk:

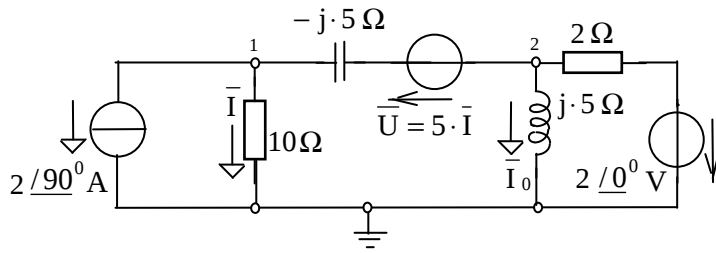
$$\bar{U}_2 = \frac{\begin{vmatrix} (0,6 - j0,4) & (1 + j1) \\ (-0,5 + j0,5) & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (0,6 - j0,4) & j0,5 \\ (-0,5 + j0,5) & (0,25 - j0,5) \end{vmatrix}} = \frac{-(1 + j1)(-0,5 + j0,5)}{(0,6 - j0,4)(0,25 - j0,5) - j0,5(-0,5 + j0,5)} =$$

$$= \frac{0,5 + 0,5 + j0,5 - j0,5}{0,15 - 0,2 - j0,1 - j0,3 + j0,25 + 0,25} = \frac{1}{0,2 - j0,15} = 4\angle 36,9^\circ \text{V}$$

$$\bar{U}_1 = \frac{-(4\angle 36,9^\circ \text{V}) \cdot (0,25 - j0,5)}{-0,5 + j0,5} = -3 - j1 = 3,16\angle -161,57^\circ \text{V}$$

$$\bar{I} = \frac{\bar{U}_1}{2} = -1,5 - j0,5 = 1,5811\angle -161,57^\circ \text{A}$$

15.13 A mellékelt hálózat a $10\ \Omega$ -os ellenállás $\bar{I}$ áramától függő feszültség generátort is tartalmaz, $\bar{U} = (5 \cdot \bar{I})\text{V}$. Határozza meg az $\bar{I}_0$ áramot a csomóponti potenciálok módszerét használva!



$$\bar{I}_s = \frac{\bar{U}}{-j5} = \frac{5 \cdot \bar{I}}{-j5} = j\bar{I} = j \frac{\bar{U}_1}{10} = j(0,1 \cdot \bar{U}_1)$$

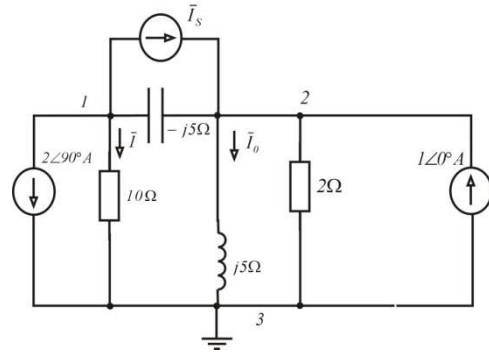
A 3-as csomópontot választva közös testpontnak:

1. csomópontra felírva az áramok értékeit:

$$\frac{\bar{U}_1}{10} + \frac{\bar{U}_1 - \bar{U}_2}{-j5} = -2\angle 90^\circ - \bar{I}_s = -j2 - j(0,1 \cdot \bar{U}_1)$$

2. csomópontra felírva az áramok értékeit:

$$\frac{\bar{U}_2}{2} + \frac{\bar{U}_2 - \bar{U}_1}{j5} = 1\angle 0^\circ + \bar{I}_s = 1 + j(0,1 \cdot \bar{U}_1)$$



Az egyenletrendszer:

$$(0,1 + j0,2 + j0,1) \cdot \bar{U}_1 - j0,2 \cdot \bar{U}_2 = -j2$$

$$(-j0,2 - j0,1) \cdot \bar{U}_1 + (0,5 - j0,2 + j0,2) \cdot \bar{U}_2 = 1$$

Összevonások után:

$$(0,1 + j0,3) \cdot \bar{U}_1 - j0,2 \cdot \bar{U}_2 = -j2$$

$$-j0,3 \cdot \bar{U}_1 + 0,5 \cdot \bar{U}_2 = 1$$

Az egyenletrendszer alapján az $\bar{U}_2$ feszültséget felírhatjuk:

$$\bar{U}_2 = \frac{\begin{vmatrix} (0,1 + j0,3) & -j2 \\ -j0,3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (0,1 + j0,3) & -j0,2 \\ -j0,3 & 0,5 \end{vmatrix}} = \frac{0,1 + j0,3 + 0,6}{0,05 + j0,15 + 0,06} = \frac{0,7 + j0,3}{0,11 + j0,15} = 4,094 \angle -30,5^\circ \text{V}$$

$$\bar{I}_0 = \frac{\bar{U}_2}{j5} = \frac{4,094 \angle -30,5^\circ \text{V}}{5 \angle 90^\circ} = 0,819 \angle -120,5^\circ \text{A}$$

14.5 Adott egy párhuzamos RLC kör $R = 250\Omega$, $L = 2mH$, $C = 20\mu F$. A kapcsolás $0,1A$ -t vesz fel ω_0 rezonancia frekvencia esetén.

a.,) Határozza meg ω_0 , Q , $\Delta\omega$, és a két ω_1 , ω_2 vágási frekvencia értékét!

b.,) Határozza meg a kapcsolásra kapcsolt feszültség nagyságát, és az egyes ágáramok nagyságát!

Mivel minden elem adott, ω_0 számítható:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 10^{-3} H \cdot 20 \cdot 10^{-6} F}} = 5000 \frac{rad}{s} \text{ és innen: } f_0 = \frac{5000 \frac{rad}{s}}{2 \cdot \pi} = 796,2 Hz$$

$$Q = \frac{R}{\omega_0 \cdot L} = \omega_0 \cdot C \cdot R = R \sqrt{\frac{C}{L}} = 250 \cdot \sqrt{\frac{20 \cdot 10^{-6} F}{2 \cdot 10^{-3} H}} = 25$$

$$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q} = \frac{5000 \frac{rad}{s}}{25} = 200 \frac{rad}{s}$$

Mivel a $Q \geq 10$ ezért ez egy nagy Q értékű kör.

Így a két vágási frekvencia az alábbi közelítő képlet szerint is kis hibával számítható:

$$\omega_1 = \omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2} = 5.000 - 100 = 4900 \frac{rad}{s}$$

$$\omega_2 = \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2} = 5.000 + 100 = 5100 \frac{rad}{s}$$

$$\text{Ha a pontos képlettel számoltunk volna: } \omega_1 = \omega_0 \sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}} - \frac{\Delta\omega}{2} = 5001 - 100 = 4901 \frac{rad}{s}$$

Az eltérés viszont láthatóan nagyon kicsi, így a közelítő képlet is valóban megfelelő pontosság nagy Q esetén.

b.,) Rezonancia esetén az impedancia csakis ohmos jellegű:

$$\bar{Z}_T = R \angle 0^\circ = 250 \angle 0^\circ \Omega$$

$$U = I \cdot |Z_T| = I \cdot R = 0,1A \cdot 250\Omega = 25V$$

$$I_R = \frac{U}{R} = I = 0,1A$$

$$I_C = I_L = Q \cdot I = \frac{U}{\omega_0 \cdot L} = U \cdot \omega_0 \cdot C = 25 \cdot 0,1A = 2,5A$$

14.6 Mekkora az előző kapcsolás feszültsége, ha az áramot tartjuk az előző értéken és a körfrekvencia értékét tizedére csökkentjük $\omega = 0,1 \cdot \omega_0$? Határozza meg a kapcsolás feszültségét, és az ágáramok nagyságát!

A hálózat admittanciájának általános alakját felírva:

$$Y_T = \frac{1}{R} + j\left(\omega \cdot C - \frac{1}{\omega \cdot L}\right) = \frac{1}{250\Omega} + j\left(500 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot 20 \cdot 10^{-6} \text{F} - \frac{1}{500 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot 2 \cdot 10^{-3} \text{H}}\right) =$$

$$= 0,004 + j(0,01 - 1) = 0,004 - j0,99 = 0,99 \angle -89,8^\circ \text{S}$$

Az áram vektort választva referencia vektornak: $I = 0,1 \angle 0^\circ \text{A}$

$$\bar{U} = \bar{I} \cdot \bar{Z}_T = \frac{\bar{I}}{\bar{Y}_T} = \frac{0,1 \angle 0^\circ \text{A}}{0,99 \angle -89,8^\circ \text{S}} = 0,101 \angle 89,8^\circ \text{V}$$

$$\bar{I}_R = \frac{\bar{U}}{\bar{Z}_R} = \frac{0,101 \angle 89,8^\circ \text{A}}{250 \angle 0^\circ \Omega} = 0,404 \angle 89,8^\circ \text{mA}$$

$$\bar{I}_C = \frac{\bar{U}}{\bar{Z}_C} = \frac{0,101 \angle 89,8^\circ \text{A}}{100 \angle -90^\circ \Omega} = 1,01 \angle 179,8^\circ \text{mA}$$

$$\bar{I}_L = \frac{\bar{U}}{\bar{Z}_L} = \frac{0,101 \angle 89,8^\circ \text{A}}{1 \angle 90^\circ \Omega} = 101 \angle -0,2^\circ \text{mA}$$

14.7 Egy párhuzamos RLC kör esetén, a hálózatra kapcsolt feszültség 10V , az ekkor folyó (minimális) áram $0,1\text{A}$. A kapcsolás rezonancia frekvenciája 2MHz , a sávszélesség 200kHz . Határozza meg a létra kapcsolás elemeinek értékét!

A hálózat árama minimális a rezonancia frekvencia esetén. A hálózat ez esetben eléri az impedanciája maximumát azaz R-t:

$$R = \frac{U}{I} = \frac{10\text{V}}{0,1\text{A}} = 100\Omega$$

Az áramkör jósági tényezője:

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot 10^6 \text{Hz}}{2 \cdot \pi \cdot 200 \cdot 10^3 \text{Hz}} = 10$$

$$Q = \frac{R}{\omega_0 \cdot L} = R \sqrt{\frac{C}{L}} = \omega_0 \cdot C \cdot R \quad \Rightarrow \quad \omega_0^2 = \frac{1}{L \cdot C}$$

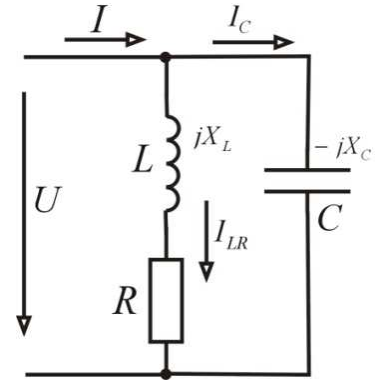
$$C = \frac{Q}{\omega_0 \cdot R} = \frac{10}{2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot 10^6 \text{Hz} \cdot 100\Omega} = 7,96 \text{nF}$$

$$L = \frac{1}{\omega_0^2 \cdot C} = \frac{1}{(2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot 10^6 \text{Hz})^2 \cdot 7,96 \cdot 10^{-9} \text{F}} = 0,796 \mu\text{H}$$

14.8 Egy tank kapcsolásban a kapacitás értéke 1pF . A kör rezonancia frekvenciája 1MHz és a sávszélesség 50kHz .

a.) Mekkora L és R értéke?

b.) Mekkora a teljes tank kapcsolás impedanciája rezonancia esetén?



A jósági tényező meghatározható a rezonancia frekvencia és a sávszélesség segítségével:

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 1 \cdot 10^6 \text{ Hz}}{2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot 10^3 \text{ Hz}} = 20$$

Mivel a $Q \geq 10$ ezért ez egy nagy jósági tényezőjű kör, így használható a közelítő összefüggés is:

$$\omega_0^2 = \frac{1}{L \cdot C} \quad L = \frac{1}{\omega_0^2 \cdot C} = \frac{1}{(2 \cdot \pi \cdot 10^6 \text{ Hz})^2 \cdot 10^{-12} \text{ F}} = 25,33 \text{ mH}$$

$$Q = \frac{\omega_0 \cdot L}{R} \quad R = \frac{\omega_0 \cdot L}{Q} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 10^6 \text{ Hz} \cdot 25,33 \cdot 10^{-3} \text{ H}}{20} = 7,958 \text{ k}\Omega$$

b.) Rezonancia frekvencia esetén igaz az alábbi közelítő összefüggés, nagy jósági tényezőjű kör esetén:

$$Z_T = Q^2 \cdot R = 20^2 \cdot 7,958 \cdot 10^3 \Omega = 3,183 \text{ M}\Omega$$

Ellenőrizve a közelítő összefüggés hibáját, az egzakt összefüggéssel számolva teljesen ugyan azt az eredményt kapjuk:

$$Z_T = \frac{L}{R \cdot C} = \frac{25,33 \cdot 10^{-3} \text{ H}}{7,958 \cdot 10^3 \Omega \cdot 10^{-12} \text{ F}} = 3,183 \text{ M}\Omega$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{L \cdot C} - \left[\frac{R}{L}\right]^2} = \sqrt{39,4789 \cdot 10^{12} - 0,0987 \cdot 10^{12}} = 6,275 \frac{\text{Mrad}}{\text{s}}$$

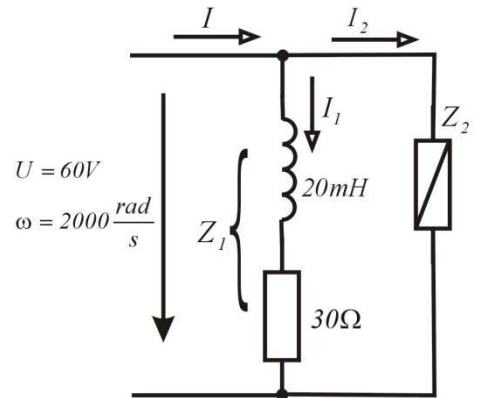
$$f_0 = \frac{6,275 \frac{\text{Mrad}}{\text{s}}}{2 \cdot \pi} = 0,9988 \text{ MHz}$$

14.9 Az ábrán látható kapcsolás esetén a kör eredő árama és feszültsége fázisban van, $U = 60V$ és $I = 0,72A$.

a.) Mekkora a Z_2 -es impedancia nagysága?

b.) Mennyi a jósági tényező értéke és a sávszélesség értéke?

c.) Rajzoljon teljes vektorábrát az U feszültséget véve referencia értéknek!



Legyen $\bar{U} = 60 \angle 0^\circ V$ és $\bar{I} = 0,72 \angle 0^\circ A$

$$Z_1 = R + X_L = 30\Omega + j20 \cdot 10^{-3} H \cdot 2000 \frac{rad}{s} = 30 + j40 = 50 \angle 53,1^\circ \Omega$$

$$Y_1 = \frac{1}{Z_1} = 0,02 \angle -53,1^\circ S$$

Mivel a feladat szövegéből kiderül, hogy az eredő áram és feszültség fázisban van egymással, ebből következik, hogy szükségszerűen rezonanciának kell fenn állnia.

$$Y_T = \frac{I}{U} = Y_1 + Y_2$$

$$Y_1 = \frac{1}{Z_1} = 0,02 \angle -53,1^\circ S$$

$$\frac{0,72 \angle 0^\circ A}{60 \angle 0^\circ V} = 0,02 \angle -53,1^\circ S + Y_2$$

$$Y_2 = 0,012 - (0,012 - j0,016) = j0,016 = jB_C = j\omega C$$

Ebből következik hogy a Z_2 impedanciának szükségszerűen kapacitásnak kell lennie.

$$C = \frac{X_C}{\omega} = \frac{0,016}{2000} = 8 \mu F$$

b.) A jósági tényező L és R segítségével meghatározható:

$$Q = \frac{\omega_0 \cdot L}{R} = \frac{2000 \frac{rad}{s} \cdot 20 \cdot 10^{-3} H}{30 \Omega} = 1,333$$

$$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q} = \frac{2000 \frac{rad}{s}}{1,333} = 1500 \frac{rad}{s}$$

Mivel a $Q \leq 10$ ezért ez a kapcsolás jósági tényezője nem nagy.

Az eredmény ellenőrzése az alábbi módon lehetséges:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{L \cdot C} - \left[\frac{R}{L} \right]^2} = \sqrt{\frac{1}{20 \cdot 10^{-3} H \cdot 8 \cdot 10^{-6} F} - \left[\frac{30 \Omega}{20 \cdot 10^{-3} H} \right]^2} = 2000 \frac{rad}{s}, \text{ ahogy vártuk.}$$

$$\text{Ugyancsak az egzakt képletet használva: } Z_T | \omega_0 = \frac{L}{R \cdot C} = \frac{20 \cdot 10^{-3} H}{30 \Omega \cdot 8 \cdot 10^{-6} F} = 83,33 \Omega$$

$$\text{Másképpen: } \bar{Z}_T | \omega_0 = \frac{\bar{U}}{\bar{I}} = \frac{60 \angle 0^\circ V}{0,72 \angle 0^\circ A} = 83,33 \angle 0^\circ \Omega$$

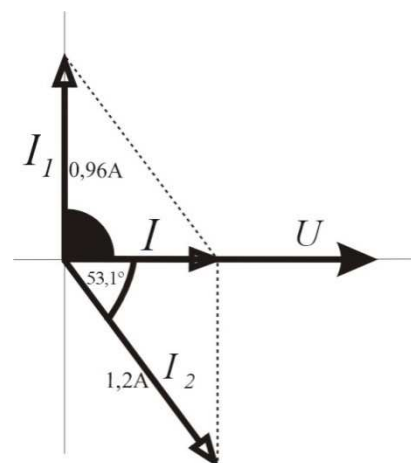
$$\text{A közelítő képlet a kis } Q \text{ érték miatt nem helyes: } Z_T' | \omega_0 = Q^2 \cdot R = 1,333^2 \cdot 30 \Omega = 53,33 \Omega$$

c.,) Az ágakamok ezek után egyszerűen számíthatóak:

$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{U}}{Z_1} = \frac{60 \angle 0^\circ \text{V}}{50 \angle 53,1^\circ \Omega} = 1,2 \angle -53,1^\circ \text{A}$$

$$\bar{I}_2 = \frac{\bar{U}}{Z_2} = \bar{U} \cdot \bar{Y}_2 = 60 \angle 0^\circ \text{V} \cdot 0,016 \angle 90^\circ \text{S} = 0,96 \angle 90^\circ \text{A}$$

$$\bar{I} = \bar{I}_1 + \bar{I}_2$$



6.1 Határozza meg az ábrán látható négypólus impedancia és admittancia paramétereit!

Kiindulva az alapegyenletekből:

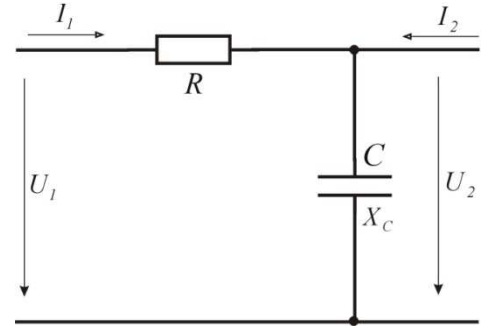
$$U_1 = Z_{11} \cdot I_1 + Z_{12} \cdot I_2$$

$$U_2 = Z_{21} \cdot I_1 + Z_{22} \cdot I_2$$

Ha $\bar{I}_2 = 0V$, azaz a kimenő kapcsok meg vannak szakítva, akkor:

$$Z_{11} = \left. \frac{U_1}{I_1} \right|_{I_2=0} = \frac{U_1}{\frac{U_1}{R + \frac{1}{j\omega C}}} = R - j \frac{1}{\omega \cdot C}, \text{ és}$$

$$Z_{21} = \left. \frac{U_2}{I_1} \right|_{I_2=0} = \frac{I_1 \cdot \left(\frac{1}{j\omega \cdot C} \right)}{I_1} = -j \frac{1}{\omega \cdot C}$$



Ha $\bar{I}_1 = 0V$, azaz a bemenő kapcsok vannak megszakítva, akkor:

$$Z_{12} = \frac{U_1}{I_2} = \frac{I_2 \left(-j \frac{1}{\omega \cdot C} \right)}{I_2} = -j \frac{1}{\omega \cdot C} \quad \text{és} \quad Z_{22} = \frac{U_2}{I_2} = -j \frac{1}{\omega \cdot C}$$

Az Admittanci paraméterek meghatározása az alapegyenletekből kiindulva történhet:

$$I_1 = Y_{11} \cdot U_1 + Y_{12} \cdot U_2$$

$$I_2 = Y_{21} \cdot U_1 + Y_{22} \cdot U_2$$

Ha a kimenő kapcsokat rövidre zárjuk, azaz $\bar{U}_2 = 0V$, akkor a kondenzátor rövidre záródik tehát rajta nem folyik áram:

$$Y_{11} = \left. \frac{I_1}{U_1} \right|_{U_2=0} = \frac{I_1}{\frac{I_1}{R}} = \frac{1}{R} \quad Y_{21} = \left. \frac{I_2}{U_1} \right|_{U_2=0} = \frac{I_2}{-\frac{I_2}{R}} = -\frac{1}{R}$$

Az Y_{21} -be a negatív előjel azért került be, mert az I_2 által az R ellenálláson létrehozott feszültségesés iránya ellentétes az U_1 irányával.

Ha a bemenő kapcsokat zárjuk rövidre, akkor $\bar{U}_1 = 0V$, akkor a kondenzátor és az ellenállás párhuzamosan kapcsolódik:

$$Y_{12} = \left. \frac{I_1}{U_2} \right|_{U_1=0} = \frac{I_1}{-\frac{I_1}{R}} = -\frac{1}{R} \quad \text{és} \quad Y_{22} = \left. \frac{I_2}{U_2} \right|_{U_1=0} = \frac{I_2}{I_2 \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} \cdot \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{R} + j\omega C$$

A meghatározott értékek behelyettesítése után:

$$I_1 = \frac{U_1}{R} - \frac{U_2}{R} \quad \text{és}$$

$$I_2 = -\frac{U_2}{R} + \left(\frac{1}{R} + j\omega C \right) U_2$$

23.1 Határozza meg az ábrán látható négypólus (T kapcsolás) impedancia paramétereit!

Megoldás:

Az alábbi ismert kapcsolat van a bemeneti feszültségre és a kimeneti feszültségre:

$$\bar{U}_1 = \bar{Z}_{11} \cdot \bar{I}_1 + \bar{Z}_{12} \cdot \bar{I}_2 \text{ és } \bar{U}_2 = \bar{Z}_{21} \cdot \bar{I}_1 + \bar{Z}_{22} \cdot \bar{I}_2$$

A berajzolt körbejárási irányok alapján, felírva a hurokáramok egyenlet rendszerét, a következőket kapjuk:

$$\bar{U}_1 = (\bar{Z}_1 + \bar{Z}_3) \cdot \bar{I}_1 + \bar{Z}_3 \cdot \bar{I}_2$$

$$\bar{U}_2 = \bar{Z}_3 \cdot \bar{I}_1 + (\bar{Z}_2 + \bar{Z}_3) \cdot \bar{I}_2$$

Innen könnyen felírható az alábbi összefüggés:

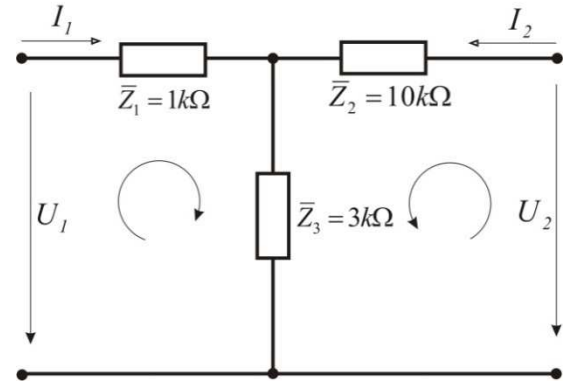
$$\bar{Z}_{11} = \bar{Z}_1 + \bar{Z}_3$$

$$\bar{Z}_{12} = \bar{Z}_3$$

$$\bar{Z}_{21} = \bar{Z}_3$$

$$\bar{Z}_{22} = \bar{Z}_2 + \bar{Z}_3$$

$$Z_{11} = 1k\Omega + 3k\Omega = 4k\Omega, \quad Z_{12} = 3k\Omega, \quad Z_{21} = 3k\Omega, \quad Z_{22} = 10k\Omega + 3k\Omega = 13k\Omega$$



23.9 Határozza meg az ábrán látható négypólus (T kapcsolás) impedancia paramétereit!

Megoldás:

Az alábbi ismert kapcsolat van a bemeneti feszültségre és a kimeneti feszültségre:

$$\bar{U}_1 = \bar{Z}_{11} \cdot \bar{I}_1 + \bar{Z}_{12} \cdot \bar{I}_2 \text{ és } \bar{U}_2 = \bar{Z}_{21} \cdot \bar{I}_1 + \bar{Z}_{22} \cdot \bar{I}_2$$

A berajzolt körbejárási irányok alapján, felírva a hurokáramok egyenlet rendszerét, a következőket kapjuk:

$$\bar{U}_1 = (\bar{Z}_1 + \bar{Z}_3) \cdot \bar{I}_1 + \bar{Z}_3 \cdot \bar{I}_2$$

$$\bar{U}_2 = \bar{Z}_3 \cdot \bar{I}_1 + (\bar{Z}_2 + \bar{Z}_3) \cdot \bar{I}_2$$

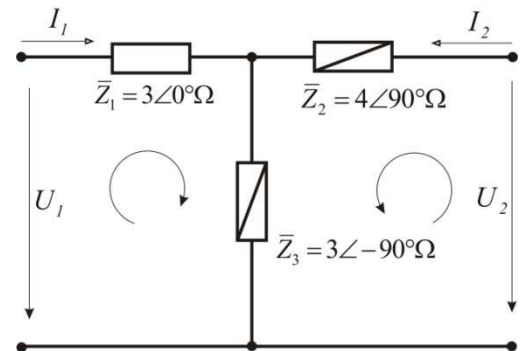
Innen könnyen felírható az alábbi összefüggés:

$$\bar{Z}_{11} = \bar{Z}_1 + \bar{Z}_3, \quad \bar{Z}_{12} = \bar{Z}_3, \quad \bar{Z}_{21} = \bar{Z}_3, \quad \bar{Z}_{22} = \bar{Z}_2 + \bar{Z}_3$$

$$Z_{11} = (3 + j3) = 4,242 \angle -45^\circ \Omega$$

$$Z_{12} = Z_{21} = Z_3 = -j3 = 3 \angle -90^\circ \Omega$$

$$Z_{22} = j4 - j3 = 1 \angle 90^\circ \Omega$$



23.3 Milyen feltételek mellett számíthatjuk ki vagy mérhetjük meg a tetszőleges négy pólus $\bar{Z}$ paramétereit?

Megoldás:

Kiindulva a bemeneti feszültség és a kimeneti alap egyenletéből:

$$\bar{U}_1 = \bar{Z}_{11} \cdot \bar{I}_1 + \bar{Z}_{12} \cdot \bar{I}_2 \text{ és}$$

$$\bar{U}_2 = \bar{Z}_{21} \cdot \bar{I}_1 + \bar{Z}_{22} \cdot \bar{I}_2$$

Kihasználva, hogy a bemenet vagy a kimenet esetén az alábbi összefüggéssé egyszerűsödik egyenlet:

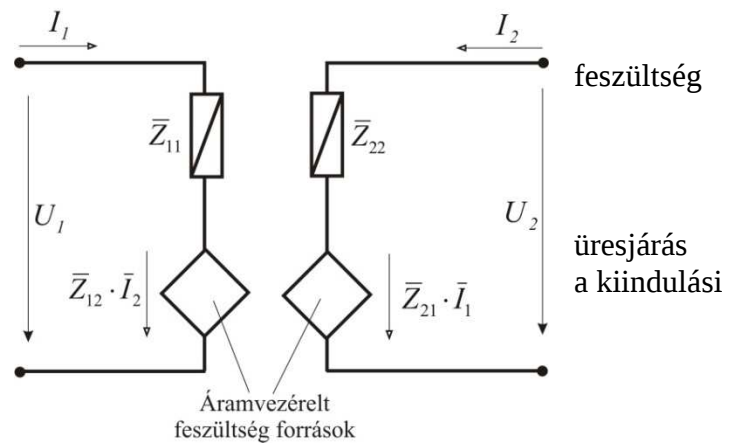
$$\bar{U}_1 = \bar{Z}_{11} \cdot \bar{I}_1 \Big|_{\bar{I}_2=0}$$

$$\bar{U}_2 = \bar{Z}_{21} \cdot \bar{I}_1 \Big|_{\bar{I}_2=0}$$

$$\bar{U}_1 = \bar{Z}_{12} \cdot \bar{I}_2 \Big|_{\bar{I}_1=0}$$

$$\bar{U}_2 = \bar{Z}_{22} \cdot \bar{I}_2 \Big|_{\bar{I}_1=0}$$

$$\bar{Z}_{11} = \frac{\bar{U}_1}{\bar{I}_1} \Big|_{\bar{I}_2=0}, \quad \bar{Z}_{21} = \frac{\bar{U}_2}{\bar{I}_1} \Big|_{\bar{I}_2=0}, \quad \bar{Z}_{12} = \frac{\bar{U}_1}{\bar{I}_2} \Big|_{\bar{I}_1=0}, \quad \bar{Z}_{22} = \frac{\bar{U}_2}{\bar{I}_2} \Big|_{\bar{I}_1=0}$$



23.4 Határozza meg a Z paraméterek értékeit, ha a négypólus tartalmaz egy feszültség vezérelt eszközt!

Megoldás:

A berajzolt körbejárási irányok alapján, felírva a hurokáramok egyenlet rendszerét, a következőket kapjuk:

$$\bar{U}_1 = (\bar{Z}_1 + \bar{Z}_3) \cdot \bar{I}_1 + \bar{Z}_3 \cdot \bar{I}_2$$

$$\bar{U}_2 - 2 \cdot \bar{I}_1 = \bar{Z}_3 \cdot \bar{I}_1 + \bar{Z}_3 \cdot \bar{I}_2$$

Innen könnyen felírható az alábbi összefüggés:

$$\bar{U}_1 = \underbrace{(3+6+j4)}_{\bar{Z}_{11}} \cdot \bar{I}_1 + \underbrace{(6+j4)}_{\bar{Z}_{12}} \cdot \bar{I}_2$$

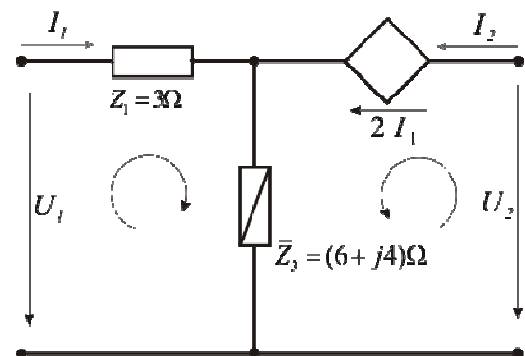
$$\bar{U}_2 = \underbrace{(2+6+j4)}_{\bar{Z}_{21}} \cdot \bar{I}_1 + \underbrace{(6+j4)}_{\bar{Z}_{22}} \cdot \bar{I}_2$$

$$\bar{Z}_{11} = (9+j4)\Omega$$

$$\bar{Z}_{12} = (6+j4)\Omega$$

$$\bar{Z}_{21} = (8+j4)\Omega$$

$$\bar{Z}_{22} = (6+j4)\Omega$$



23.21 Határozza meg a hálózat admittancia (Y) paramétereinek értékeit, ha az alábbi π kapcsolásról van szó!

Megoldás:

Az Admittancia értelmezéséből kiindulva, ha a kimeneti feszültség nulla akkor rövidzár tehát a 3-as impedanciát söntöli:

$$\bar{Y}_{11} = \left. \frac{I_1}{U_1} \right|_{U_2=0} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} = \frac{1}{100\Omega} + \frac{1}{75\Omega} = 23,333\mu S$$

A hurok áramok módszerével az egyenletrendszer felírásához 3 egyenletre van szükség.

Ugyanakkor a csomóponti potenciálok módszeréhez csak 2 egyenletre van szükség minden paraméter felírásához:

$$\bar{I}_1 = (\bar{Y}_1 + \bar{Y}_2) \cdot \bar{U}_1 - (\bar{Y}_1) \cdot \bar{U}_2$$

$$\bar{I}_2 = -(\bar{Y}_1) \cdot \bar{U}_1 + (\bar{Y}_1 + \bar{Y}_3) \cdot \bar{U}_2$$

Innen könnyen felírható az alábbi összefüggés:

$$\bar{I}_1 = \underbrace{(13,33\mu S + 10\mu S)}_{Y_{11}} \cdot \bar{U}_1 - \underbrace{(10\mu S)}_{Y_{12}} \cdot \bar{I}_2$$

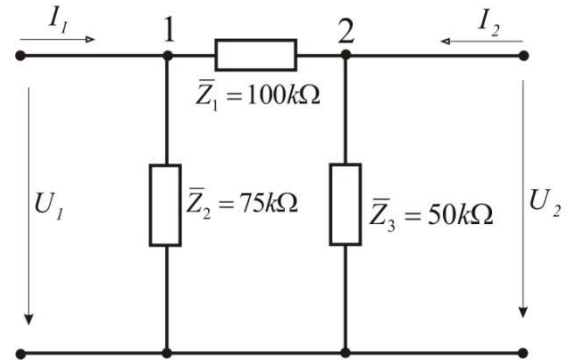
$$\bar{I}_2 = \underbrace{(-10\mu S)}_{Y_{21}} \cdot \bar{U}_1 + \underbrace{(10\mu S + 20\mu S)}_{Y_{22}} \cdot \bar{I}_2$$

$$\bar{Y}_{11} = 23,3\mu S$$

$$\bar{Y}_{12} = -10\mu S$$

$$\bar{Y}_{21} = -10\mu S$$

$$\bar{Y}_{22} = 30\mu S$$



23.6. Egy kétkapun végzett mérések eredménye:

$$\left. \begin{array}{l} \bar{U}_1 = 100/0^\circ \text{ V} \\ \bar{U}_2 = 75/0^\circ \text{ V} \\ \bar{I}_1 = 12,5/0^\circ \text{ A} \end{array} \right| \bar{I}_2 = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \bar{U}_1 = 30/0^\circ \text{ V} \\ \bar{U}_2 = 50/0^\circ \text{ V} \\ \bar{I}_2 = 5/0^\circ \text{ A} \end{array} \right| \bar{I}_1 = 0$$

Határozza meg a $\bar{Z}$ paramétereket!

$$(\bar{Z}_{11} = 8 \Omega \quad \bar{Z}_{21} = 6 \Omega \quad \bar{Z}_{12} = 6 \Omega \quad \bar{Z}_{22} = 10 \Omega.)$$

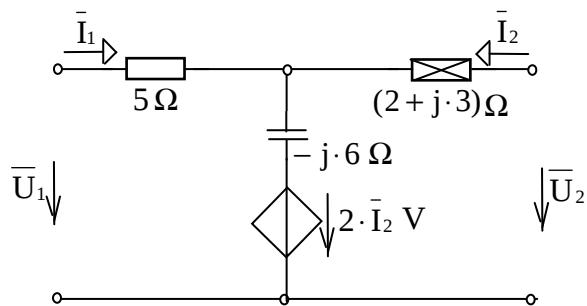
23.11. Számítsa ki a T kapcsolású (négyfólusú) hálózat $\bar{Z}$ paramétereit, ha a T tag impedanciái:

$$\bar{Z}_1 = (3 + j \cdot 2) \Omega, \bar{Z}_2 = 1/-90^\circ \Omega \text{ és } \bar{Z}_3 = (3 + j \cdot 4) \Omega, \text{ majd rajzolja fel a } \bar{Z} \text{ paraméteres}$$

helyettesítő kapcsolást!

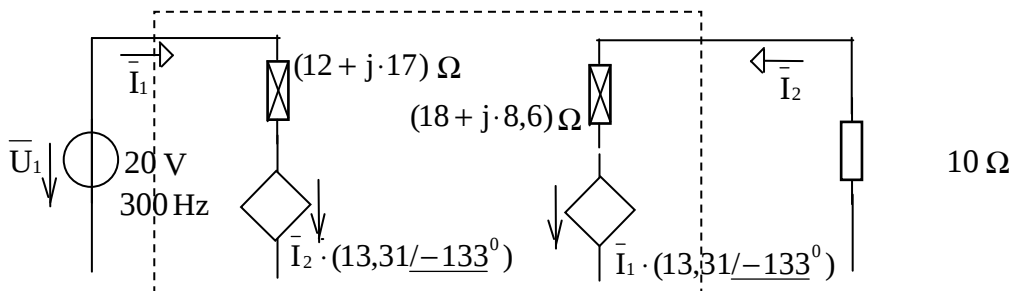
$$(\bar{Z}_{11} = 8,484/45^\circ \Omega \quad \bar{Z}_{12} = \bar{Z}_{21} = \bar{Z}_3 = 5/53,13^\circ \Omega \quad \bar{Z}_{22} = 4,242/45^\circ \Omega.)$$

23.14. Határozza meg az alábbi kétkapú hálózat $\bar{Z}$ paramétereit!

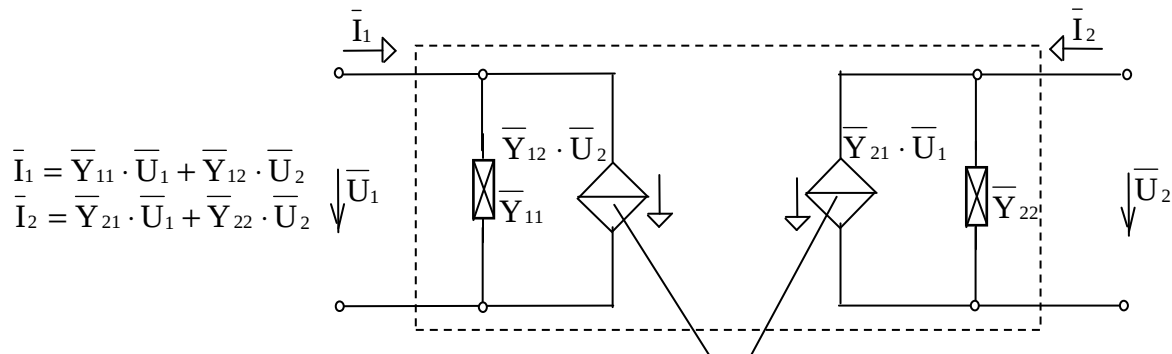


$$(\bar{Z}_{11} = (5 - j \cdot 6) \Omega \quad \bar{Z}_{12} = (2 - j \cdot 6) \Omega \quad \bar{Z}_{21} = (-j \cdot 6) \Omega \quad \bar{Z}_{22} = (4 - j \cdot 3) \Omega.)$$

23.16. Egy 20 V-os 300 Hz-es feszültségforrás táplálja az ábrán látható kétkapú hálózatot. Számítsa ki az $\bar{I}_2$ kimenő áramot! ($\bar{I}_2 = 0,59/-16,36^\circ$ A.)



23.18,19. Írja fel az általános kétkapú $\bar{Y}$ (admittancia) paraméteres egyenletrendszerét, és rajzolja fel az egyenletrendszernek megfelelő helyettesítő kapcsolást az általánosan használt referencia irányokkal!



feszültségvezérelt áram források

23.20. Milyen feltételek mellett számíthatjuk ki, ill. mérhetjük meg a kétkapú $\bar{Y}$ paramétereit? Akár az egyenletrendszerből, akár a helyettesítő kapcsolásból, érvényesítve az $\bar{U}_2 = 0$ (kimenő oldalon rövidzár), ill. $\bar{U}_1 = 0$ (bemenő oldalon rövidzár) feltételeket:

$$\begin{aligned} \bar{I}_1 &= \bar{Y}_{11} \cdot \bar{U}_1 + \bar{Y}_{12} \cdot \bar{U}_2 \\ \bar{I}_2 &= \bar{Y}_{21} \cdot \bar{U}_1 + \bar{Y}_{22} \cdot \bar{U}_2 \end{aligned} \quad \left| \begin{array}{l} \bar{U}_2 = 0 \\ \bar{U}_1 = 0 \end{array} \right.$$

amiből:

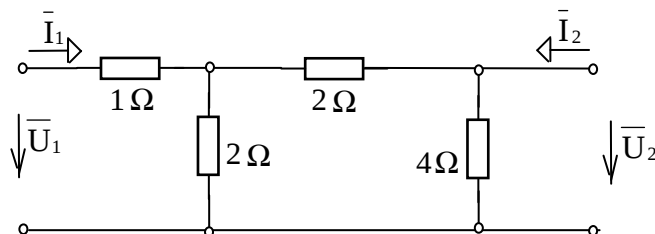
$$\begin{aligned} \bar{Y}_{11} &= \frac{\bar{I}_1}{\bar{U}_1} \bigg|_{\bar{U}_2 = 0} & \bar{Y}_{12} &= \frac{\bar{I}_1}{\bar{U}_2} \bigg|_{\bar{U}_1 = 0} \\ \bar{Y}_{21} &= \frac{\bar{I}_2}{\bar{U}_1} \bigg|_{\bar{U}_2 = 0} & \bar{Y}_{22} &= \frac{\bar{I}_2}{\bar{U}_2} \bigg|_{\bar{U}_1 = 0} \end{aligned}$$

23.23. Egy kétkapun végzett mérések eredménye:
Számítsa ki az $\bar{Y}$ paramétereket!

$$\begin{array}{l|l} \bar{I}_1 = 3 \text{ mA} & \bar{I}_1 = -1 \text{ mA} \\ \bar{I}_2 = -0,6 \text{ mA} & \bar{I}_2 = 12 \text{ mA} \\ \hline \bar{U}_1 = 24 \text{ V} & \bar{U}_2 = 40 \text{ V} \end{array} \quad \begin{array}{l} \bar{U}_2 = 0 \\ \bar{U}_1 = 0 \end{array}$$

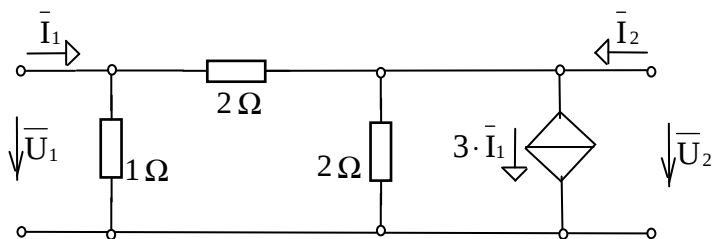
($\bar{Y}_{11} = 125 \mu\text{S}$ $\bar{Y}_{12} = -25 \mu\text{S}$ $\bar{Y}_{21} = -25 \mu\text{S}$ $\bar{Y}_{22} = 300 \mu\text{S}$.)

23.80,81. Számítsa ki a $\bar{Z}$ és az $\bar{Y}$ paramétereit az ábra szerinti kapcsolású kétkapunak!



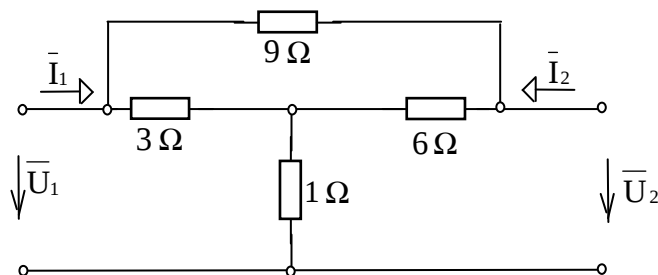
($\bar{Z}_{11} = 2,5 \Omega$ $\bar{Z}_{12} = \bar{Z}_{21} = 1 \Omega$ $\bar{Z}_{22} = 2 \Omega$
 $\bar{Y}_{11} = 0,5 \text{ S}$ $\bar{Y}_{12} = \bar{Y}_{21} = -0,25 \text{ S}$ $\bar{Y}_{22} = 0,625 \text{ S}$.)

23.82. Számítsa ki az $\bar{Y}$ paramétereit az ábra szerinti kapcsolású kétkapunak!



($\bar{Y}_{11} = 1,5 \text{ S}$ $\bar{Y}_{12} = \bar{Y}_{21} = -0,5 \text{ S}$ $\bar{Y}_{22} = -0,5 \text{ S}$.)

23.110. Határozza meg az alábbi négyfólus $\bar{Z}$ paramétereit úgy, hogy előbb egyenértékű T kapcsolássá alakítja. Ezután alakítsa át a T kapcsolást egyenértékű Π hálózattá is és így számítsa ki az $\bar{Y}$ paramétereket!



($\bar{Z}_{11} = 3,5 \Omega$ $\bar{Z}_{21} = \bar{Z}_{12} = 2 \Omega$ $\bar{Z}_{22} = 5 \Omega$
 $\bar{Y}_{11} = 0,37 \text{ S}$ $\bar{Y}_{21} = \bar{Y}_{12} = 0,148 \text{ S}$ $\bar{Y}_{22} = 0,259 \text{ S}$.)

6.3 Határozzuk meg számítással az admittancia paraméterek ismeretében az impedancia paramétereket!

Kiindulási egyenleteink az impedancia és admittancia paraméterekre:

$$I_1 = Y_{11} \cdot U_1 + Y_{12} \cdot U_2$$

$$I_2 = Y_{21} \cdot U_1 + Y_{22} \cdot U_2$$

$$U_1 = Z_{11} \cdot I_1 + Z_{12} \cdot I_2$$

$$U_2 = Z_{21} \cdot I_1 + Z_{22} \cdot I_2$$

A fentiekből kifejezve U_2 értékét:

$$U_2 = \frac{I_1 - Y_{11} \cdot U_1}{Y_{12}}, \text{ majd behelyettesítve a második egyenletbe:}$$

$$I_2 = Y_{21} \cdot U_1 + Y_{22} \cdot \frac{I_1 - Y_{11} \cdot U_1}{Y_{12}}, \text{ beszorozva } Y_{12} \text{-vel:}$$

$$Y_{12} \cdot I_2 = Y_{12} \cdot Y_{21} \cdot U_1 + Y_{22} \cdot I_1 - Y_{11} \cdot Y_{22} \cdot U_1, \text{ innen kifejezve } U_1 \text{-et.}$$

$$U_1 = \frac{Y_{22}}{Y_{11} \cdot Y_{22} - Y_{12} \cdot Y_{21}} \cdot I_1 - \frac{Y_{12}}{Y_{11} \cdot Y_{22} - Y_{12} \cdot Y_{21}} \cdot I_2$$

Összehasonlítva a harmadik alapegyenlettel:

$$\bar{Z}_{11} = \left. \frac{\bar{U}_1}{\bar{I}_1} \right|_{\bar{I}_2=0} = \frac{Y_{22}}{Y_{11} \cdot Y_{22} - Y_{12} \cdot Y_{21}} \quad \bar{Z}_{12} = \left. \frac{\bar{U}_1}{\bar{I}_2} \right|_{\bar{I}_1=0} = \frac{-Y_{12}}{Y_{11} \cdot Y_{22} - Y_{12} \cdot Y_{21}}$$

A másik két Z paramétert a táblázat segítségével meg tudjuk adni. A Z paraméterek oszlopában ΔY szerepel. Tehát mindegyik Z paraméter nevezője $\Delta Y = Y_{11} \cdot Y_{22} - Y_{12} \cdot Y_{21}$ lesz, Z_{11} számlálójában Y_{22} , Z_{12} számlálójában $-Y_{12}$ lesz. Ez megfelel a számítás eredményének.

Z_{21} számlálója $-Y_{21}$, Z_{22} számlálójában Y_{11} . Tehát:

$$\bar{Z}_{21} = \left. \frac{\bar{U}_2}{\bar{I}_1} \right|_{\bar{I}_2=0} = \frac{-Y_{21}}{Y_{11} \cdot Y_{22} - Y_{12} \cdot Y_{21}} \quad \bar{Z}_{22} = \left. \frac{\bar{U}_2}{\bar{I}_2} \right|_{\bar{I}_1=0} = \frac{Y_{11}}{Y_{11} \cdot Y_{22} - Y_{12} \cdot Y_{21}}$$

A paraméterek egymásba átszámíthatóak:

Y	ΔY	Y_{22}	$-Y_{12}$	$-Y_{21}$	Y_{11}	1	$\Delta Y = Y_{11} \cdot Y_{22} - Y_{12} \cdot Y_{21}$
Z	1	Z_{11}	$-Z_{12}$	Z_{21}	Z_{22}	ΔZ	$\Delta Z = Z_{11} \cdot Z_{22} - Z_{12} \cdot Z_{21}$
h	h_{22}	Δh	h_{12}	$-h_{21}$	1	h_{11}	$\Delta h = h_{11} \cdot h_{22} - h_{12} \cdot h_{21}$
k	k_{11}	1	$-k_{12}$	k_{21}	Δk	k_{22}	$\Delta k = k_{11} \cdot k_{22} - k_{12} \cdot k_{21}$

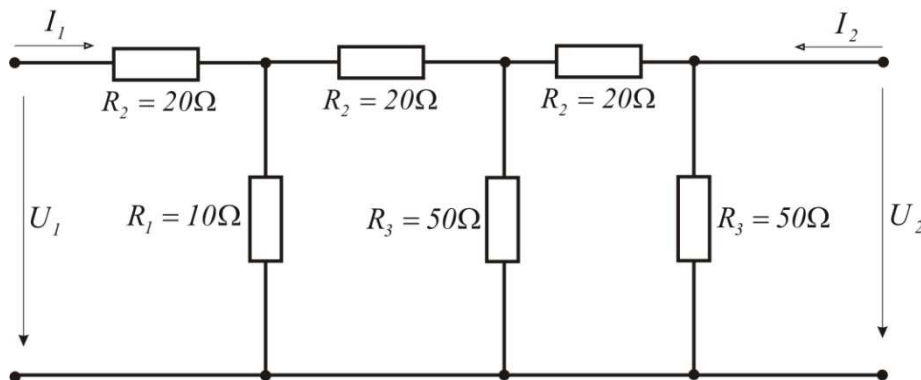
$$Y_{11} = \frac{Z_{22}}{Z_{11} \cdot Z_{22} - Z_{12} \cdot Z_{21}} = \frac{-Z_{22}}{Z_{12} \cdot Z_{21} - Z_{11} \cdot Z_{22}}$$

$$Y_{12} = \frac{-Z_{12}}{Z_{11} \cdot Z_{22} - Z_{12} \cdot Z_{21}} = \frac{Z_{12}}{Z_{12} \cdot Z_{21} - Z_{11} \cdot Z_{22}}$$

$$Y_{21} = \frac{-Z_{21}}{Z_{11} \cdot Z_{22} - Z_{12} \cdot Z_{21}} = \frac{Z_{21}}{Z_{12} \cdot Z_{21} - Z_{11} \cdot Z_{22}}$$

$$Y_{22} = \frac{Z_{11}}{Z_{11} \cdot Z_{22} - Z_{12} \cdot Z_{21}} = \frac{-Z_{11}}{Z_{12} \cdot Z_{21} - Z_{11} \cdot Z_{22}}$$

6.20 Határozza meg számítással az alábbi hálózat lánc paraméter mátrixát!



A feladatot két alaptagra (egy „T” és egy „π” tagra) bontva oldhatjuk meg.

Kiindulási egyenleteink a láncparaméterekre:

$$U_1 = A_{11} \cdot U_2' + A_{12} \cdot I_2'$$

$$I_1 = A_{21} \cdot U_2' + A_{22} \cdot I_2'$$

$$A_{11} = \left. \frac{U_1}{U_2'} \right|_{I_2'=0} = \frac{U_1}{U_1 \cdot \frac{10}{20+10}} = 3$$

$$A_{21} = \left. \frac{I_1}{U_2'} \right|_{I_2'=0} = \frac{I_1}{10 \cdot I_1} = 0,1s$$

$$A_{12} = \left. \frac{U_1}{I_2'} \right|_{U_2'=0} = \frac{U_1}{-\frac{U_1}{20+20 \times 10} \cdot \frac{10}{20+10}} = -\left[20 + \frac{200}{30}\right] \cdot \frac{30}{10} = -80\Omega$$

$$A_{22} = \left. \frac{I_1}{I_2'} \right|_{U_2'=0} = \frac{I_1}{-I_1 \cdot \frac{10}{10+20}} = -3$$

Így készen van a „T” tagra vonatkozó lánc mátrix: $A' = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -80\Omega \\ 0,1s & -3 \end{vmatrix}$

Ezután következhet a „π” tag lánc paraméter mátrixának felírása.

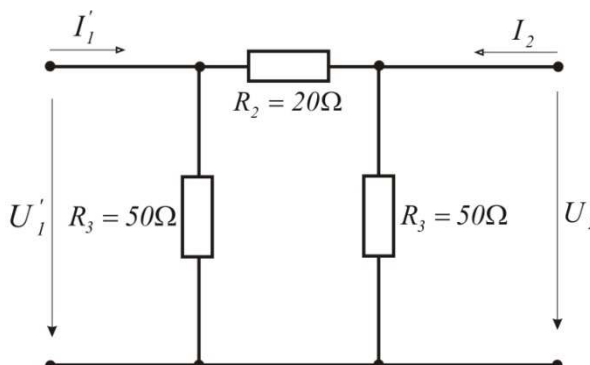
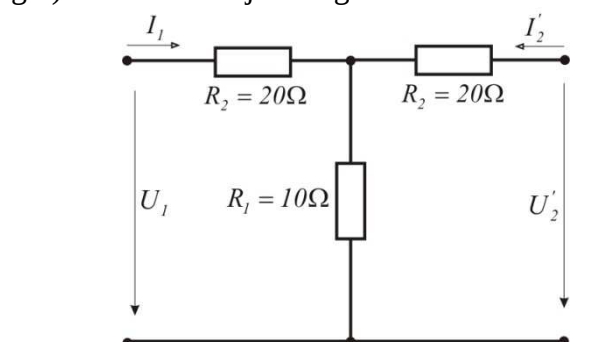
$$A_{11} = \left. \frac{U_1}{U_2} \right|_{I_2=0} = \frac{U_1}{U_1 \cdot \frac{50}{20+50}} = 1,4$$

$$A_{21} = \left. \frac{I_1}{U_2} \right|_{I_2=0} = \frac{I_1}{I_1 \cdot \frac{50}{20+50+50} \cdot 50} = 0,048s$$

$$A_{12} = \left. \frac{U_1}{I_2} \right|_{U_2=0} = \frac{U_1}{-\frac{U_1}{20}} = -20\Omega$$

$$A_{22} = \left. \frac{I_1}{I_2} \right|_{U_2=0} = \frac{I_1}{-I_1 \cdot \frac{50}{50+20}} = -\frac{70}{50} = -1,4$$

Így készen van a „π” tagra vonatkozó lánc mátrix: $A'' = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1,4 & -20\Omega \\ 0,048s & -1,4 \end{vmatrix}$



Majd a két alaptag lánc paraméter eredmény mátrixát összeszorozva, kapjuk meg az eredmény mátrixot, ha az első mátrix kimeneti I_2 -áramirányát megfordítjuk.

$$C = A \cdot B = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{bmatrix}$$

$$A = A' \cdot A'' = \begin{bmatrix} 3 & 80\Omega \\ 0,1s & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1,4 & -20\Omega \\ 0,048s & -1,4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 1,4 + 80 \cdot 0,048 & 3 \cdot (-20) + 80 \cdot (-1,4) \\ 3 \cdot 1,4 + 3 \cdot 0,048 & 0,1 \cdot (-20) + 3 \cdot (-1,4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8,04 & -172 \\ 0,284 & -6,2 \end{bmatrix}$$

II. megoldása a feladatnak:

A feladat megoldható hurokáramok és csomóponti potenciálok segítségével is.

A feladat első részére a „T” tagra hurok áramok módszerével felírhatóak az impedancia paraméterek.

Kiindulási egyenleteink a láncparaméterekre:

$$U_1 = I_1 \cdot (20 + 10) + I_2' \cdot 10$$

$$U_2' = I_1 \cdot 10 + I_2' \cdot (20 + 10)$$

A felírt egyenletrendszerből azonnal láthatóak az impedancia paraméterek:

$$U_1 = Z_{11} \cdot I_1 + Z_{12} \cdot I_2'$$

$$U_2' = Z_{21} \cdot I_1 + Z_{22} \cdot I_2'$$

$$Z_{11} = 30\Omega$$

$$Z_{12} = 10\Omega$$

$$Z_{21} = 10\Omega$$

$$Z_{22} = 30\Omega$$

A láncparaméter egyenletrendszere:

$$U_1 = A_{11} \cdot U_2' + A_{12} \cdot I_2'$$

$$I_1 = A_{21} \cdot U_2' + A_{22} \cdot I_2'$$

Innen azonnal meghatározható két lánc paraméter értéke:

$$A_{21} = \left. \frac{I_1}{U_2'} \right|_{I_2'=0} = \frac{1}{Z_{21}} = 0,1s$$

$$A_{22} = \left. \frac{I_1}{I_2'} \right|_{U_2'=0} = -\frac{Z_{22}}{Z_{21}} = -3$$

A maradék két paramétert az impedancia paraméter egyenletrendszerének segítségével tudjuk meghatározni:

$$U_1 = Z_{11} \cdot I_1 + Z_{12} \cdot I_2'$$

$$U_2' = Z_{21} \cdot I_1 + Z_{22} \cdot I_2'$$

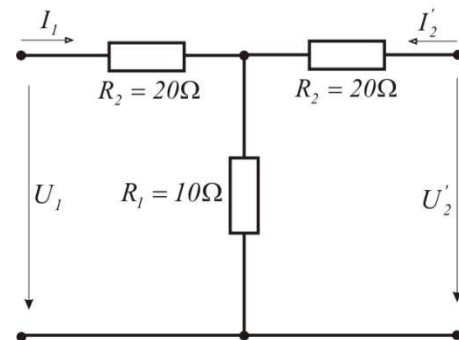
$$A_{11} = \left. \frac{U_1}{U_2'} \right|_{I_2'=0} \text{ és } A_{12} = \left. \frac{U_1}{I_2'} \right|_{U_2'=0} \text{ Amint látható, a hiányzó két paraméterben nem szerepel } I_1, \text{ így ezt kell}$$

kifejezni a fentebbi alapegyenletekből.

$$I_1 = \frac{U_1 - Z_{12} \cdot I_2'}{Z_{11}} \text{ Ezt visszaírva a második alapegyenletbe:}$$

$$U_2' = Z_{21} \cdot \frac{U_1 - Z_{12} \cdot I_2'}{Z_{11}} + Z_{22} \cdot I_2'$$

$$U_2' \cdot Z_{11} = Z_{21} \cdot U_1 - Z_{12} \cdot Z_{21} \cdot I_2' + Z_{11} \cdot Z_{22} \cdot I_2'$$



$$U_2' \cdot Z_{11} = Z_{21} \cdot U_1 + I_2' (Z_{11} \cdot Z_{22} - Z_{12} \cdot Z_{21})$$

$$A_{11} = \frac{U_1}{U_2'} \bigg|_{I_2=0} = \frac{Z_{11}}{Z_{21}} = \frac{30}{10} = 3$$

$$A_{12} = \frac{U_1}{I_2'} \bigg|_{U_2'=0} = -\frac{Z_{11} \cdot Z_{22} - Z_{12} \cdot Z_{21}}{Z_{21}} = -\frac{30 \cdot 30 - 10 \cdot 10}{10} = -80 \Omega$$

A feladat második részé a „ π ” tagra vonatkozik, amire a csomóponti potenciálok módszerével felírt egyenletekből, azonnal látszódnak az admittancia paraméterek.

$$I_1' = \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{50} \right) \cdot U_1' - \frac{1}{20} \cdot U_2$$

$$I_2 = -\frac{1}{20} \cdot U_1' + \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{50} \right) \cdot U_2$$

$$Y_{11} = 0,07 \text{ s}$$

$$Y_{12} = -0,05 \text{ s}$$

$$Y_{21} = -0,05 \text{ s}$$

$$Y_{22} = 0,07 \text{ s}$$

Innen két lánc paraméter azonnal kifejezhető:

$$A_{11} = \frac{U_1'}{U_2} \bigg|_{I_2=0} = \frac{Y_{22}}{-Y_{21}} = \frac{\frac{1}{20} + \frac{1}{50}}{-(-\frac{1}{20})} = 1,4$$

$$A_{12} = \frac{U_1'}{I_2} \bigg|_{U_2=0} = -20 \Omega$$

A hiányzó két paramétert az admittancia paraméter egyenletrendszerből számítható.

$$A_{21} = \frac{I_1'}{U_2} \bigg|_{I_2=0} \quad \text{és} \quad A_{22} = \frac{I_1'}{I_2} \bigg|_{U_2=0} \quad \text{Ezekben nem szerepel } U_1', \text{ így ezt kell kifejezni.}$$

$$I_1' = Y_{11} \cdot U_1' + Y_{12} \cdot U_2$$

$$I_2 = Y_{21} \cdot U_1' + Y_{22} \cdot U_2$$

$$U_1' = \frac{I_1' - Y_{12} \cdot U_2}{Y_{11}}$$

$$I_2 = Y_{21} \cdot \frac{I_1' - Y_{12} \cdot U_2}{Y_{11}} + Y_{22} \cdot U_2$$

$$I_2 \cdot Y_{11} = Y_{21} \cdot I_1' - Y_{12} \cdot Y_{21} \cdot U_2 + Y_{11} Y_{22} \cdot U_2$$

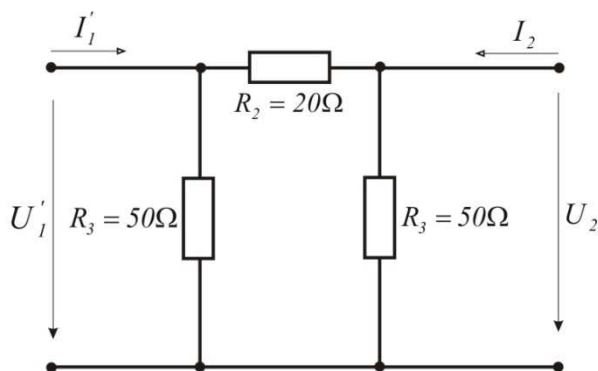
$$Y_{11} \cdot I_2 = Y_{21} \cdot I_1' + U_2 \cdot (Y_{11} \cdot Y_{22} - Y_{12} \cdot Y_{21})$$

$$A_{21} = \frac{I_1'}{U_2} \bigg|_{I_2=0} = \frac{Y_{11} \cdot Y_{22} - Y_{12} \cdot Y_{21}}{-Y_{21}} = \frac{0,07^2 - (-0,05)^2}{-(-0,05)} = 0,048 \text{ s}$$

$$A_{22} = \frac{I_1'}{I_2} \bigg|_{U_2=0} = \frac{Y_{11}}{Y_{21}} = \frac{0,07}{-0,05} = -1,4$$

A két mátrix összeszorozása előtt az I_2 áram irányát meg kell fordítanunk, mivel a bemenet szempontjából befelé folyó áramot feltételeztünk a második mátrix felírásakor. Így az első mátrix második oszlopa van szorozva I_2 -vel ennek az előjelét kell változtatni a mátrixok szorzás előtt:

$$A = A' \cdot A'' = \begin{vmatrix} 3 & 80 \Omega \\ 0,1 \text{ s} & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1,4 & -20 \Omega \\ 0,048 \text{ s} & -1,4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8,04 & -172 \\ 0,284 & -6,2 \end{vmatrix}$$



6.122 Határozza meg az alábbi négyfólus Z és H paramétereit

A feladatot a hurokáramok módszerével oldhatjuk meg, érdemes I_1 és I_2 -vel azonos hurok áram irányt felvenni).

$$U_1 = I_1 \cdot (30 + 60) + I_2 \cdot 60$$

$$U_2 = I_1 \cdot 60 + I_2 \cdot (20 + 60)$$

A felírt egyenletrendszerből azonnal láthatóak az impedancia paraméterek:

$$U_1 = Z_{11} \cdot I_1 + Z_{12} \cdot I_2$$

$$U_2 = Z_{21} \cdot I_1 + Z_{22} \cdot I_2$$

$$Z_{11} = 90 \Omega \quad Z_{12} = 60 \Omega$$

$$Z_{21} = 60 \Omega \quad Z_{22} = 80 \Omega$$

A hibridparaméter egyenletrendszere:

$$U_1 = H_{11} \cdot I_1 + H_{12} \cdot U_2$$

$$I_2 = H_{21} \cdot I_1 + H_{22} \cdot U_2$$

Innen azonnal meghatározható két hibridparaméter értéke:

$$H_{21} = \left. \frac{I_2}{I_1} \right|_{U_2=0} = \frac{-Z_{21}}{Z_{22}} = \frac{-60}{80} = -0,75$$

$$H_{22} = \left. \frac{I_2}{U_2} \right|_{I_1=0} = \frac{1}{Z_{22}} = 0,0125s$$

A maradék két paramétert az impedancia paraméter egyenletrendszeréből kaphatjuk meg.

$$U_1 = Z_{11} \cdot I_1 + Z_{12} \cdot I_2$$

$$U_2 = Z_{21} \cdot I_1 + Z_{22} \cdot I_2$$

Amint látható, a hiányzó két paraméterben $H_{11} = \left. \frac{U_1}{I_1} \right|_{U_2=0}$ és $H_{12} = \left. \frac{U_1}{U_2} \right|_{I_1=0}$ nem szerepel I_2 .

$$I_2 = \frac{U_1 - Z_{11} \cdot I_1}{Z_{12}} \text{ Ezt visszaírva a második alapegyenletbe:}$$

$$U_2 = Z_{21} \cdot I_1 + Z_{22} \cdot \frac{U_1 - Z_{11} \cdot I_1}{Z_{12}}$$

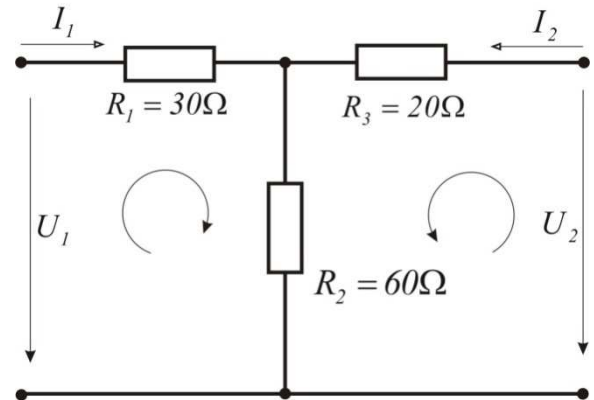
$$U_2 \cdot Z_{12} = Z_{12} \cdot Z_{21} \cdot I_1 + Z_{22} \cdot U_1 - Z_{11} \cdot Z_{22} \cdot I_1$$

$$Z_{12} \cdot U_2 = Z_{22} \cdot U_1 - I_1 (Z_{11} \cdot Z_{22} - Z_{12} \cdot Z_{21})$$

$$H_{11} = \left. \frac{U_1}{I_1} \right|_{U_2=0} = \frac{Z_{11} \cdot Z_{22} - Z_{12} \cdot Z_{21}}{Z_{22}} = \frac{90 \cdot 80 - 60^2}{80} = 45 \Omega$$

$$H_{12} = \left. \frac{U_1}{U_2} \right|_{I_1=0} = \frac{Z_{12}}{Z_{22}} = \frac{60}{80} = 0,75$$

$$\text{Tehát a végeredmény: } H = \begin{vmatrix} 45 \Omega & 0,75 \\ -0,75 & 0,0125s \end{vmatrix}$$



6.123 Határozza meg az alábbi négyfólyus Y és H paramétereit

A feladatot a csomóponti potenciálok módszerével oldhatjuk meg. Az alábbi két egyenlet írható fel.

$$I_1 = (Y_1 + Y_2) \cdot U_1 - (Y_2) \cdot U_2$$

$$I_2 = -(Y_2) \cdot U_1 + (Y_2 + Y_3) \cdot U_2$$

A felírt egyenletrendszerből azonnal láthatóak az impedancia paraméterek:

$$I_1 = Y_{11} \cdot U_1 + Y_{12} \cdot U_2$$

$$I_2 = Y_{21} \cdot U_1 + Y_{22} \cdot U_2$$

$$Y_{11} = \frac{1}{20} + \frac{1}{80} = 0,0625s \quad Y_{12} = -0,0125s$$

$$Y_{21} = -\frac{1}{80} = -0,0125s \quad Y_{22} = \frac{1}{80} + \frac{1}{40} = 0,0375s$$

A hibridparaméter egyenletrendszere:

$$U_1 = H_{11} \cdot I_1 + H_{12} \cdot U_2$$

$$I_2 = H_{21} \cdot I_1 + H_{22} \cdot U_2$$

Innen azonnal meghatározható két hibridparaméter értéke:

$$H_{11} = \left. \frac{U_1}{I_1} \right|_{U_2=0} = \frac{1}{Y_{11}} = \frac{1}{0,0625} = 16\Omega$$

$$H_{12} = \left. \frac{U_1}{U_2} \right|_{I_1=0} = \frac{-Y_{12}}{Y_{11}} = \frac{-(-0,0125)}{0,0625} = 0,2$$

A maradék két paramétert az admittancia paraméter egyenletrendszeréből kaphatjuk meg.

$$I_1 = Y_{11} \cdot U_1 + Y_{12} \cdot U_2$$

$$I_2 = Y_{21} \cdot U_1 + Y_{22} \cdot U_2$$

Amint látható, a hiányzó két paraméterben $H_{21} = \left. \frac{I_2}{I_1} \right|_{U_2=0}$ és $H_{22} = \left. \frac{I_2}{U_2} \right|_{I_1=0}$ nem szerepel U_1 .

$$U_1 = \frac{I_1 - Y_{12} \cdot U_2}{Y_{11}} \text{ Ezt visszaírva a második alapegyenletbe:}$$

$$I_2 = Y_{21} \cdot \frac{I_1 - Y_{12} \cdot U_2}{Y_{11}} + Y_{22} \cdot U_2$$

$$Y_{11} \cdot I_2 = Y_{21} \cdot I_1 - Y_{12} \cdot Y_{21} \cdot U_2 + Y_{11} \cdot Y_{22} \cdot U_2$$

$$Y_{11} \cdot I_2 = Y_{21} \cdot I_1 + U_2 (Y_{11} \cdot Y_{22} - Y_{12} \cdot Y_{21})$$

$$H_{21} = \left. \frac{I_2}{I_1} \right|_{U_2=0} = \frac{Y_{21}}{Y_{11}} = \frac{-0,0125}{0,0625} = -0,2$$

$$H_{22} = \left. \frac{I_2}{U_2} \right|_{I_1=0} = \frac{Y_{11} \cdot Y_{22} - Y_{12} \cdot Y_{21}}{Y_{11}} = \frac{0,0625 \cdot 0,0375 - (-0,0125)^2}{0,0625} = 0,035s$$

$$\text{Tehát a végeredmény: } H = \begin{vmatrix} 16\Omega & 0,2 \\ -0,2 & 0,035s \end{vmatrix}$$

