

7.1 Átviteli jellemzők fogalma és ábrázolása!

A kondenzátor kapacitív reaktanciája:

$$\bar{Z}_C = \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C} = -j \frac{1}{\omega \cdot C}$$

Tehát az áramkör jellemzői a rákapcsolt szinuszos jel frekvenciájától függenek, ha az áramkör energiatároló elemet (C, L) is tartalmaz.

A kondenzátor feszültségét feszültség osztó felírásával kaphatjuk meg:

$$\bar{U}_C = \bar{U} \frac{\frac{1}{j \cdot \omega \cdot C}}{R + \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C}} = \bar{U} \frac{1}{1 + j \cdot \omega \cdot C \cdot R}$$

Képezve a két feszültség hányadosát kapjuk:

$$\frac{\bar{U}_C}{\bar{U}} = \frac{1}{1 + j \cdot \omega \cdot C \cdot R}$$

Ez lesz a négy-pólus feszültség átviteli függvénye:

$$\bar{A}_U(j\omega) = \frac{\bar{U}_C}{\bar{U}} = \frac{\bar{U}_{Ki}}{\bar{U}_{Be}}$$

Mivel az adott áramkör egyetlen energiatárolót tartalmaz, aminek a feszültség átviteli függvénye

$\frac{1}{1 + j \cdot \omega \cdot C \cdot R}$, amiről belátható, hogy a végpontja egy félkörön fog mozogni a frekvencia függvényében.

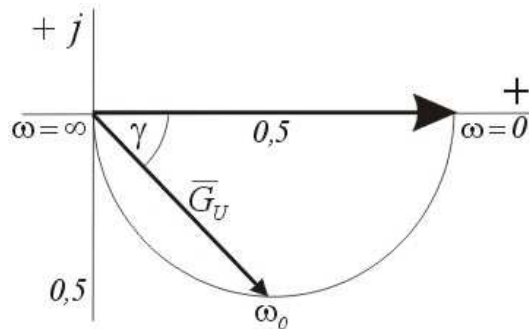
Egyenáram esetén (ha $\omega = 0$) akkor $\bar{A}_U(j0) = \frac{1}{1 + j0} = 1$

Ha $\omega = \infty$ akkor $\bar{A}_U(j\infty) = \frac{1}{1 + j\infty} = 0$

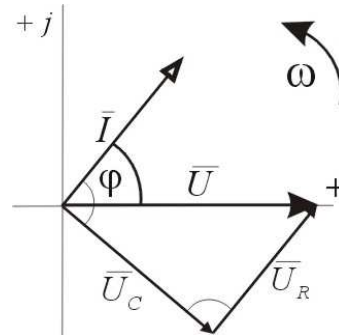
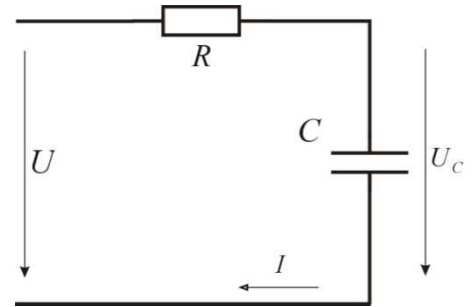
A kör harmadik pontjának meghatározásához egy könnyen kiszámítható pontot keressünk

Ha $\omega_0 = \frac{1}{C \cdot R}$ akkor $\bar{A}_U(j\omega_0) = \frac{1}{1 + j1} = 0,5 - j0,5 = \frac{\sqrt{2}}{2} \angle -45^\circ$

A három pont alapján a kör megszerkeszthető.



Az így kapott ábrát Nyquist – diagramnak nevezzük.



Az ábrázolás célszerűsítése érdekében a fázis és az amplitúdó jellemzőket szét kellene választani. A leolvasás pontosságát kellene növelni, hogy széles frekvencia tartományban lehessen leolvasni az értékeket erre a logaritmikus ábrázolás a legcélszerűbb.

Tehát az átviteli függvény **amplitúdójának logaritmusát** (amplitúdó karakterisztika) és **szögét** (fáziskarakterisztika) ábrázoljuk a frekvencia logaritmusának a függvényében. Ezt az ábrázolási módot nevezzük BODE diagramnak.

$$\text{Az ábrázolandó mennyiség: } \bar{W} = \frac{\bar{U}_2}{\bar{U}_1} = \frac{U_2 \cdot e^{j\varphi_2}}{U_1 \cdot e^{j\varphi_1}} = \frac{U_2}{U_1} \cdot e^{j(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

Mindkét oldal természetes alapú logaritmusát képezve: $\ln \bar{W} = \ln \frac{U_2}{U_1} + j(\varphi_2 - \varphi_1)$ adódik.

$W[Np] = \ln \frac{U_2}{U_1}$ A kifejezés a fesz erősítést (csillapítást) Néperben adja.

A teljesítmény viszonyokat a következőkkel írhatjuk le: $W_p[dB] = 10 \cdot \lg \frac{P_2}{P_1} = 10 \cdot \lg \frac{\frac{U_2^2}{R}}{\frac{U_1^2}{R}}$

Ezek alapján a feszültség viszony: $W[dB] = 10 \cdot \lg \frac{U_2^2}{U_1^2} = 20 \cdot \lg \frac{U_2}{U_1}$

Az amplitúdó karakterisztika a két feszültség arányának decibelben kifejezett értékét (erősítést) ábrázolja.

$$W[dB] = 20 \cdot \lg |\bar{W}| = 20 \cdot \lg \frac{U_2}{U_1}$$

Az erősítésre nézve néhány példát:

$W = -20dB$	$\lg \frac{U_2}{U_1} = -1$	$\frac{U_2}{U_1} = 10^{-1} = 0,1$	Csillapítás jön létre, a kimeneten az U_1 feszültség 10%-a jelenik meg.
$W = 0dB$	$\lg \frac{U_2}{U_1} = 0$	$\frac{U_2}{U_1} = 10^0 = 1$	Teljes átvitel jön létre, a kimenet és a bemenet egyforma $U_1 = U_2$
$W = +20dB$	$\lg \frac{U_2}{U_1} = 1$	$\frac{U_2}{U_1} = 10^1 = 10$	Erősítés van a kimeneten, a kimeneten az U_1 feszültség 10 szerese jelenik meg.
$W = +40dB$	$\lg \frac{U_2}{U_1} = 2$	$\frac{U_2}{U_1} = 10^2 = 100$	Erősítés van a kimeneten, a kimeneten az U_1 feszültség 100 szorosa jelenik meg.

A logaritmus függvény tulajdonságát kihasználva:

$$\bar{W} = \bar{W}_1 \cdot \bar{W}_2 \quad W[dB] = 20 \cdot \lg |\bar{W}| = 20 \cdot \lg |\bar{W}_1| + 20 \cdot \lg |\bar{W}_2| = W_1[dB] + W_2[dB]$$

Tehát az egyes részfeszültségek külön-külön ábrázolhatóak, és az eredő függvény ezek grafikus összegzésével határozható meg.

Elsőfokú frekvencia-függvény jelleggörbéi:

$$\bar{W}(j\omega) = \frac{\bar{U}_2}{\bar{U}_1} = \frac{\frac{1}{j \cdot \omega \cdot C}}{R + \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C}} = \frac{1}{1 + j \cdot \omega \cdot C \cdot R} = \frac{1}{1 + j \cdot \frac{\omega}{\omega_0}}, \text{ ahol ugyancsak } \omega_0 = \frac{1}{C \cdot R}$$

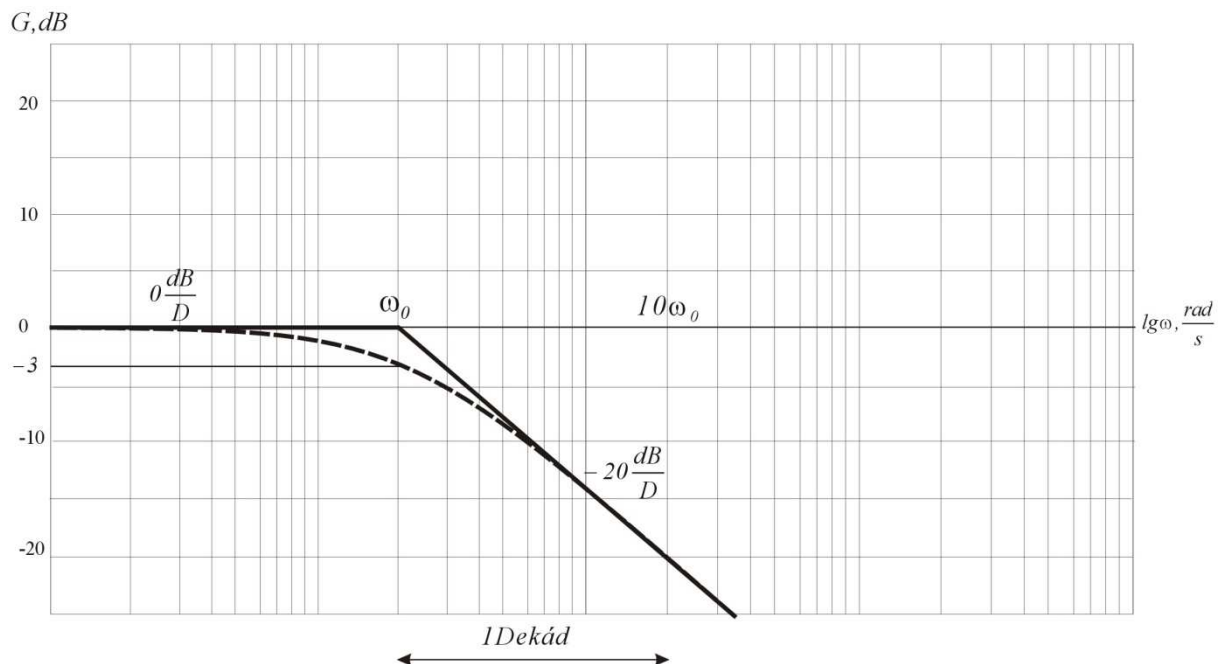
Amplitúdó karakterisztika függvénye (itt csak az abszolút érték kerül beírásra ami a két komplex komponens négyzetösszegének a gyöke):

$$W[dB] = 20 \cdot \lg|\bar{W}| = 20 \cdot \lg \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} = 20 \cdot \lg \left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} = -10 \cdot \lg \left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \right)$$

Az ábrázoláshoz vizsgáljuk meg a $\omega = 0$ és az $\omega = \infty$ eseteket.

$$\omega = 0 \text{ esetén } W[dB] = -10 \cdot \lg \left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \right) = -10 \cdot \lg 1 = 0 \text{ tehát } 0 \left[\frac{dB}{D} \right] \text{ vízszintes lesz.}$$

$\omega = \infty$ esetén $W[dB] \cong -10 \cdot \lg \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 = -20 \cdot \lg \frac{\omega}{\omega_0}$. Ez pedig $-20 \left[\frac{dB}{D} \right]$ meredekségű egyenes egyenlete lesz. Az egyenes metszéspontja a nulla decibeles tengellyel $\omega = \omega_0$ -nál lesz.



$$W[\omega_0] = -10 \cdot \lg \left(1 + \left(\frac{\omega_0}{\omega_0}\right)^2 \right) = -10 \cdot \lg (1 + 1) = -10 \cdot \lg 2 = -3,01 dB$$

Határozza meg a függvény 3dB-es pontjához húzható érintő meredekségét. Tehát a függvény differenciája az adott pontban:

$$\text{Érdeemes bevezetni a } x = \lg \frac{\omega}{\omega_0} \text{ ami alapján: } \frac{\omega}{\omega_0} = 10^x$$

$$\frac{dA}{dx} = \frac{d}{dx} \left[-10 \cdot \lg \left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right) \right] = \frac{d}{dx} \left[-10 \cdot \lg (1 + 10^{2x}) \right] = -10 \cdot \frac{1}{(1 + 10^{2x}) \cdot \ln 10} \cdot 2 \cdot 10^{2x} \cdot \ln 10$$

$$\frac{dA}{dx} \Big|_{x=0} = -20 \cdot \frac{10^{2 \cdot 0}}{1 + 10^{2 \cdot 0}} = -10 \frac{dB}{D}$$

A fáziskarakterisztika felírásához gyöktelenítéssel írjuk fel a függvényt:

$$\bar{W} = \frac{1}{1 + j \cdot \frac{\omega}{\omega_0}} = \frac{1 - j \cdot \frac{\omega}{\omega_0}}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2} \text{ amiből a fázis karakterisztika fgv: } \varphi = \arctg \frac{-\frac{\omega}{\omega_0}}{1} = -\arctg \frac{\omega}{\omega_0}$$

Trigonometriából ismeretes, hogy φ értéke nullához tart, ha ω értéke tart a nullához. Illetve -90° -hoz tart, ha ω tart a végtelenhez.

Így meg van a fázis karakterisztika két asszimptótája, már csak az inflexiós pont meghatározása van hátra.

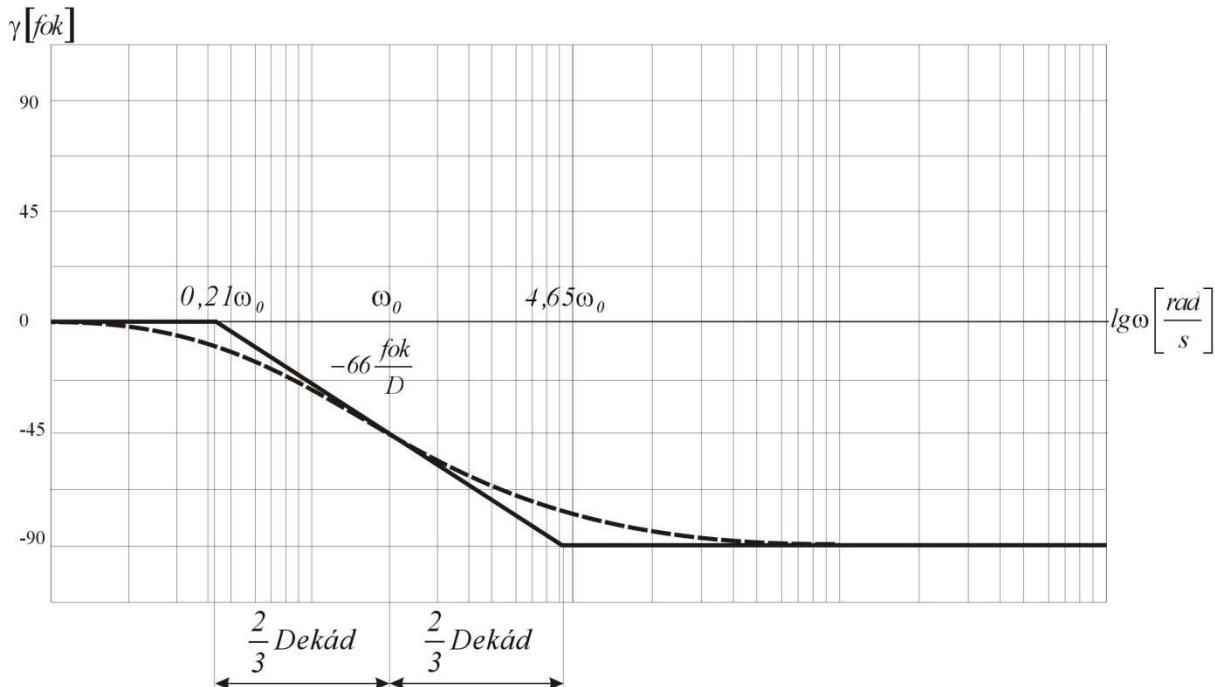
Amely $\omega = \omega_0$ esetén számítható $\varphi = -\arctg \frac{\omega_0}{\omega_0} = -\arctg 1 = -45^\circ$ fázis érték.

Meghatározandó az inflexiós pontban, az érintő meredeksége. Tehát a függvény differenciája az adott pontban:

Érdekes ismét bevezetni a $x = \lg \frac{\omega}{\omega_0}$ ami alapján: $\frac{\omega}{\omega_0} = 10^x$

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{d}{dx} \left[-\arctg \frac{\omega}{\omega_0} \right] = \frac{d}{dx} \left[-\arctg 10^x \right]_{x=0} = -\frac{1}{1 + 10^{2x}} \cdot 10^x \cdot \ln 10$$

$$\frac{d\varphi}{dx} \Big|_{x=0} = -\frac{1}{1 + 10^{2 \cdot 0}} \cdot 10^0 \cdot \ln 10 = -\frac{\ln 10}{2} = -1,15 \frac{rad}{D} = -1,15 \cdot \frac{180}{\pi} = -65,96 \frac{fok}{D} \cong -66 \frac{fok}{D}$$



A legnagyobb eltérés a két sarokpontonál van: $\varphi = -\arctg \frac{\omega}{\omega_0} = -\arctg \frac{0,21}{1} = -11,8^\circ$

7.2 Ábrázolja az átviteli jellemzőket ha $L = 100\text{mH}$, $R = 50, 200, 1000\Omega$ értékű!

Írjuk fel az átviteli függvény általános alakját!

A feszültség osztó: $\bar{U}_2 = \bar{U}_1 \cdot \frac{R}{R + j \cdot \omega \cdot L}$

amiből:

$$\bar{W}(j\omega) = \frac{\bar{U}_2}{\bar{U}_1} = \frac{R}{R + j \cdot \omega \cdot L} = \frac{1}{1 + j \cdot \omega \cdot \frac{L}{R}} = \frac{1}{1 + j \cdot \frac{\omega}{\omega_0}}$$

$$\omega_0 = \frac{R}{L}$$

Amplitúdó karakterisztika függvénye (itt csak az abszolút érték kerül beírásra ami a két komplex komponens négyzetösszegének a gyöke):

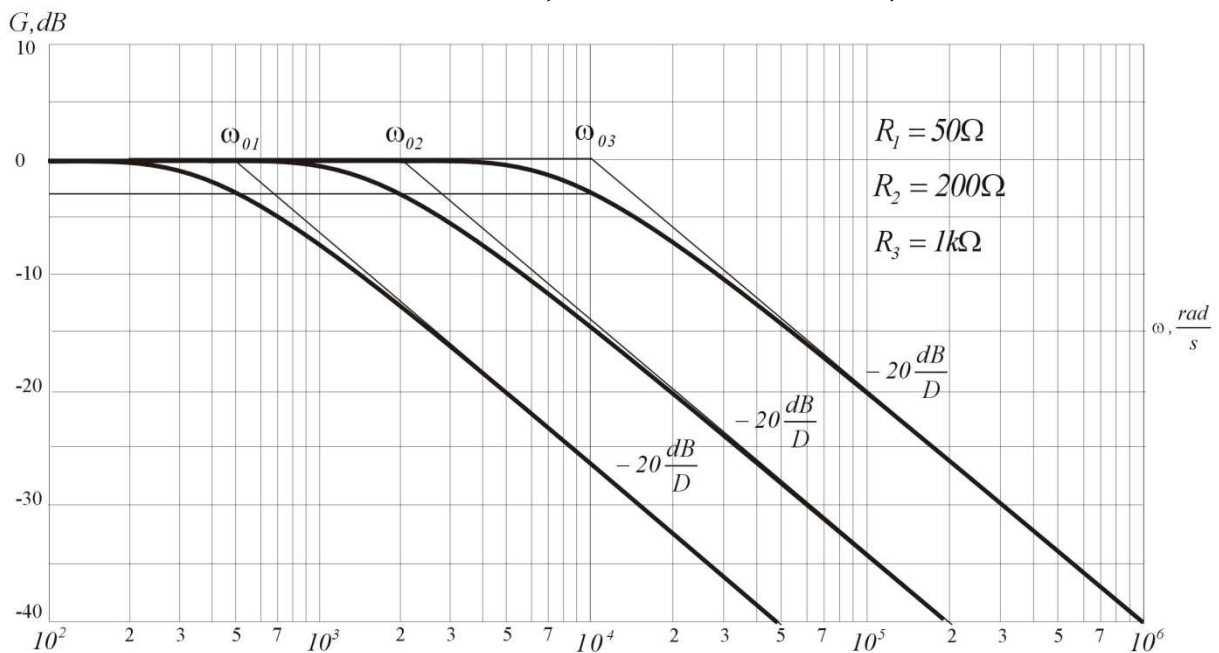
$$W[\text{dB}] = 20 \cdot \lg|\bar{W}| = 20 \cdot \lg \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} = 20 \cdot \lg \left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} = -10 \cdot \lg \left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \right)$$

Az ábrázoláshoz vizsgáljuk meg a $\omega = 0$ és az $\omega = \infty$ eseteket.

$\omega = 0$ esetén $W[\text{dB}] = -10 \cdot \lg \left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \right) = -10 \cdot \lg 1 = 0$ tehát $0 \left[\frac{\text{dB}}{D} \right]$ vízszintes lesz.

$\omega = \infty$ esetén $W[\text{dB}] \cong -10 \cdot \lg \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 = -20 \cdot \lg \frac{\omega}{\omega_0}$. Ez pedig $-20 \left[\frac{\text{dB}}{D} \right]$ meredekségű egyenes egyenlete lesz. Az egyenes metszéspontja a nulla decibeles tengellyel $\omega = \omega_0$ -nál lesz.

$$\omega_{01} = \frac{R_1}{L} = \frac{50\Omega}{100 \cdot 10^{-3}\text{H}} = 500 \frac{\text{rad}}{\text{s}}, \quad \omega_{02} = \frac{R_2}{L} = \frac{200\Omega}{0,1\text{H}} = 2000 \frac{\text{rad}}{\text{s}}, \quad \omega_{03} = \frac{1000\Omega}{0,1\text{H}} = 10^4 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$



A fáziskarakterisztika függvénye: $\varphi = -\arctg \frac{\omega}{\omega_0}$

Trigonometriából ismeretes, hogy φ értéke nullához tart, ha ω értéke tart a nullához. Illetve -90° -hoz tart, ha ω tart a végtelenhez.

Így meg van a fázis karakterisztika két asszimtótája, már csak az inflexiós pont meghatározása van hátra.

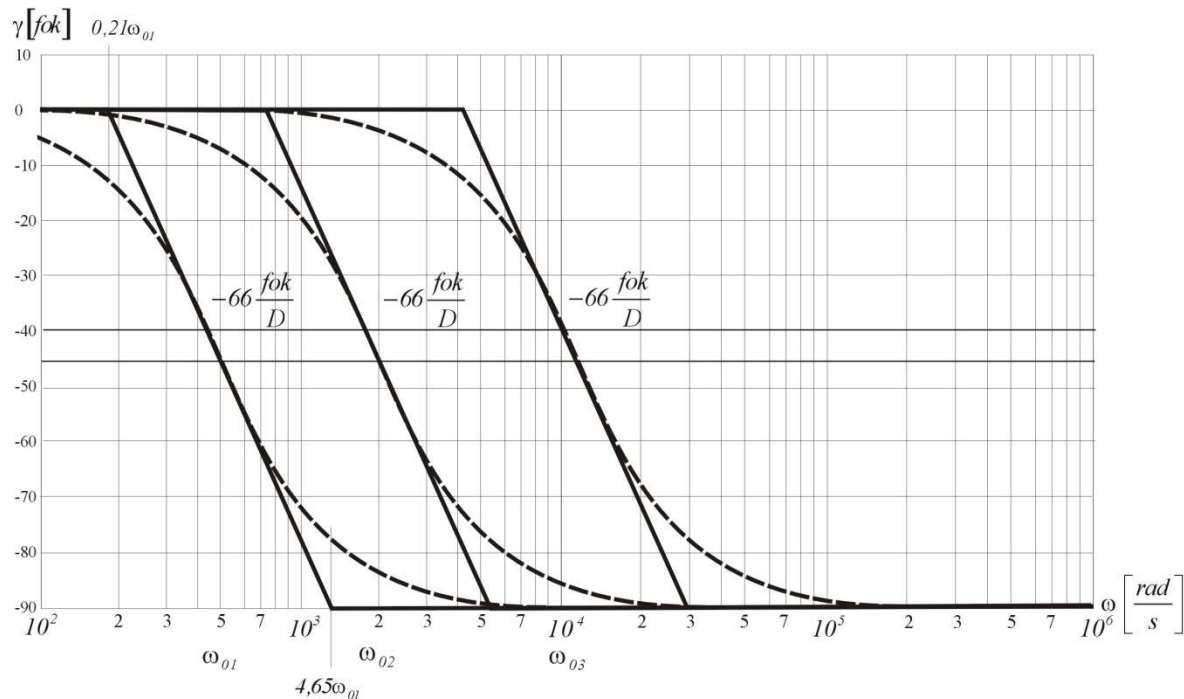
Amely $\omega = \omega_0$ esetén számítható $\varphi = -\arctg \frac{\omega_0}{\omega_0} = -\arctg 1 = -45^\circ$ fázis érték.

Meghatározandó az inflexiós pontban, az érintő meredeksége. Tehát a függvény differenciája az adott pontban:

Érdekes ismét bevezetni a $x = \lg \frac{\omega}{\omega_0}$ ami alapján: $\frac{\omega}{\omega_0} = 10^x$

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{d}{dx} \left[-\arctg \frac{\omega}{\omega_0} \right] = \frac{d}{dx} \left[-\arctg 10^x \right]_{x=0} = -\frac{1}{1+10^{2x}} \cdot 10^x \cdot \ln 10$$

$$\frac{d\varphi}{dx}_{x=0} = -\frac{1}{1+10^{2 \cdot 0}} \cdot 10^0 \cdot \ln 10 = -\frac{\ln 10}{2} = -1,15 \frac{\text{rad}}{D} = -66 \frac{\text{fok}}{D}$$



A legnagyobb eltérés a két sarokpontnál van: $\varphi = -\arctg \frac{\omega}{\omega_0} = -\arctg \frac{0,21}{1} = -11,8^\circ$

$\varphi = -\arctg \frac{\omega}{\omega_0} = -\arctg 4,65 = -77,86^\circ$ tehát az eltérés $\varphi = 90^\circ - 77,86^\circ = 12,13^\circ$

Összetett hálózatok vizsgálata is visszavezethető egyszerű elemekre való bontással, több egyszerűbb alapelem összegére. Nézzünk néhány alapfüggvényt:

$\bar{W}(j\omega) = A$ típusú függvény amplitúdó karakterisztikája: $K[dB] = 20 \cdot \lg A = \text{állandó}$ tehát a teljes tartományban egy nulla meredekségű egyenes (egy vízszintes), a fázisszög értéke 0° és állandó (nincs fázistolás).

$\bar{W}(j\omega) = j \cdot \frac{\omega}{\omega_0}$ típusú függvény amplitúdó karakterisztikája: $W[dB] = 20 \cdot \lg \frac{\omega}{\omega_0}$ tehát a teljes

tartományban $+20 \frac{dB}{D}$ meredekségű egyenes, amely az $\omega = \omega_0$ pontokban metszi a 0dB tengelyt, míg a fázisszög értéke $+90^\circ$ és állandó.

$\bar{W}(j\omega) = \frac{1}{j \cdot \frac{\omega}{\omega_0}}$ típusú függvény amplitúdó karakterisztikája: $W[dB] = -20 \cdot \lg \frac{\omega}{\omega_0}$ tehát a teljes

tartományban $-20 \frac{dB}{D}$ meredekségű egyenes, amely az $\omega = \omega_0$ pontokban metszi a 0dB tengelyt, míg a fázisszög értéke -90° és állandó

$\bar{W}(j\omega) = 1 + j \cdot \frac{\omega}{\omega_0}$ típusú függvény amplitúdó karakterisztikája: $\omega = 0$ esetén $0 \left[\frac{dB}{D} \right]$ vízszintes lesz.

$\omega = \infty$ esetén pedig $+20 \left[\frac{dB}{D} \right]$ meredekségű egyenes, töréspontja ω_0 -nál lesz.

A fázisszög értéke ω_0 -nál $66^\circ \frac{fok}{D}$ -os.

$\bar{W}(j\omega) = \frac{1}{1 + j \cdot \frac{\omega}{\omega_0}}$ típusú függvény amplitúdó karakterisztikája: $\omega = 0$ esetén $0 \left[\frac{dB}{D} \right]$ vízszintes lesz.

$\omega = \infty$ esetén pedig $-20 \left[\frac{dB}{D} \right]$ meredekségű egyenes, töréspontja ω_0 -nál lesz.

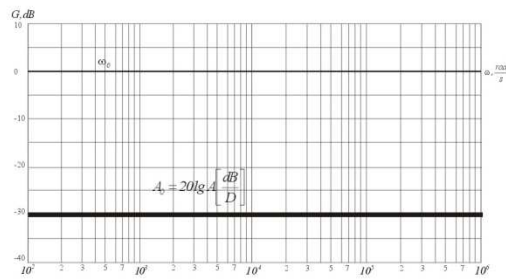
A fázisszög értéke ω_0 -nál $-66^\circ \frac{fok}{D}$ -os.

Átviteli függvény
általános alakja

Az amplitúdó-karakterisztika
törtvonalas közelítéssel

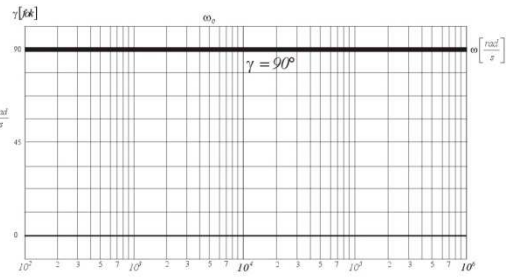
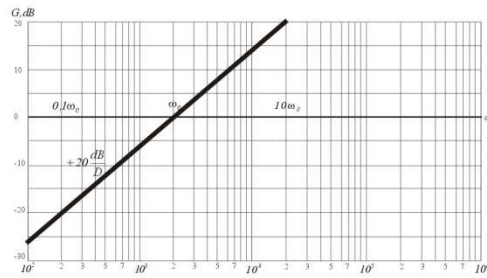
A fázis-karakterisztika
törtvonalas közelítéssel

$$\bar{A}_U(j\omega) = A$$

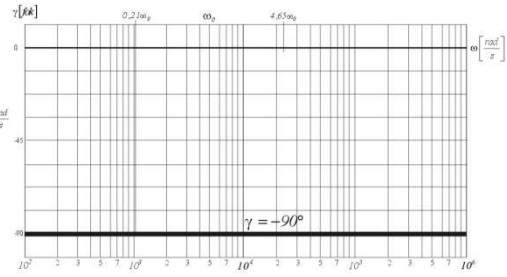
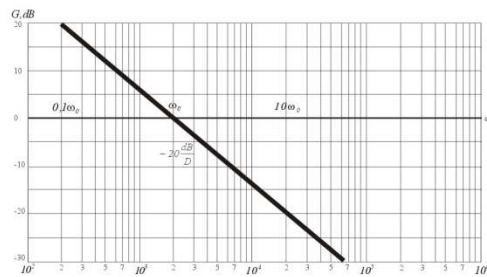


$$\gamma = 0^\circ$$

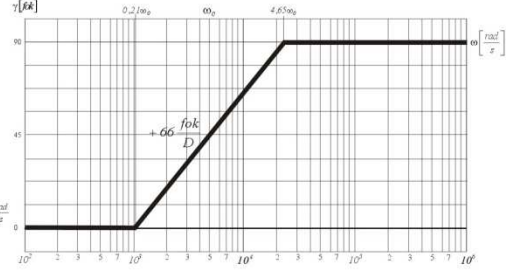
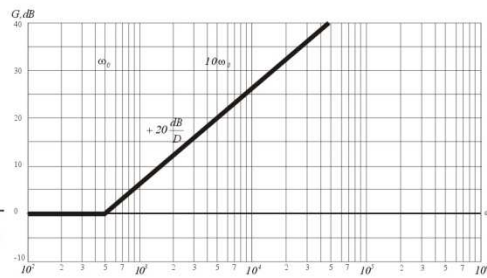
$$\bar{A}_U(j\omega) = j \cdot \frac{\omega}{\omega_0}$$



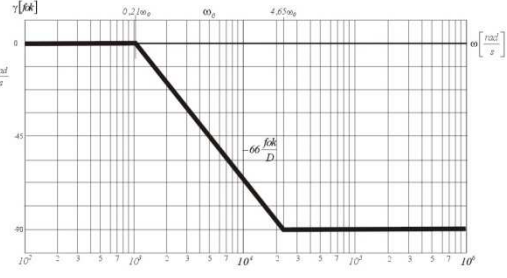
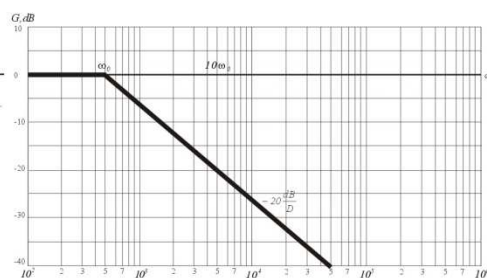
$$\bar{A}_U(j\omega) = \frac{I}{j \cdot \frac{\omega}{\omega_0}}$$



$$\bar{A}_U(j\omega) = I + j \cdot \frac{\omega}{\omega_0}$$



$$\bar{A}_U(j\omega) = \frac{I}{1 + j \cdot \frac{\omega}{\omega_0}}$$



7.3 Ábrázolja az átviteli jellemzőket, ha $L = 18\text{mH}$, $R = 90\Omega$ értékű!

Írjuk fel az átviteli függvény általános alakját!

A feszültség osztó: $\bar{U}_2 = \bar{U}_1 \cdot \frac{j \cdot \omega \cdot L}{R + j \cdot \omega \cdot L}$ amiből:

$$\bar{W}(j\omega) = \frac{\bar{U}_2}{\bar{U}_1} = \frac{j \cdot \omega \cdot L}{R + j \cdot \omega \cdot L} = \frac{j \cdot \omega \cdot \frac{L}{R}}{1 + j \cdot \omega \cdot \frac{L}{R}}$$

Mivel az adott áramkör egyetlen energiatárolót tartalmaz, aminek a

feszültség átviteli függvénye $\frac{j \cdot \omega \cdot \frac{L}{R}}{1 + j \cdot \omega \cdot \frac{L}{R}}$, amiről belátható, hogy a végpontja egy félkörön fog mozogni a

frekvencia függvényében.

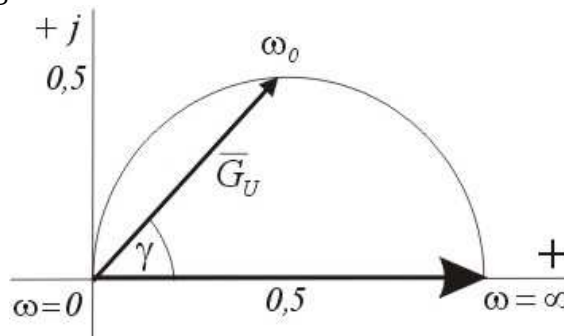
Egyenáram esetén (ha $\omega = 0$) akkor $\bar{W}(0) = \frac{j \cdot 0 \cdot \frac{L}{R}}{1 + j \cdot 0 \cdot \frac{L}{R}} = 0$

Ha $\omega = \infty$ akkor $\bar{W}(\infty) = \frac{j \cdot \infty \cdot \frac{L}{R}}{1 + j \cdot \infty \cdot \frac{L}{R}} = 1$

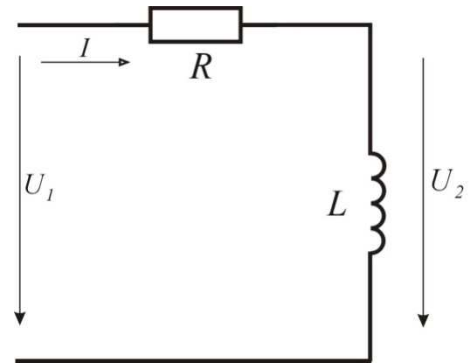
A kör harmadik pontjának meghatározásához egy könnyen kiszámítható pontot keressünk

Ha $\omega_0 = \frac{R}{L}$ akkor $\bar{W}(\omega_0) = \frac{j \cdot \frac{R}{L} \cdot \frac{L}{R}}{1 + j \cdot \frac{R}{L} \cdot \frac{L}{R}} = \frac{j}{1 + j} \cdot \frac{1 - j}{1 - j} = \frac{1 + j}{2} = 0,5 + j0,5 = \frac{\sqrt{2}}{2} \angle 45^\circ$

A három pont alapján a kör megszerkeszthető.



Az így kapott ábrát Nyquist – diagramnak nevezzük.



A sarok (törési) körfrekvencia: $\omega_0 = \frac{R}{L} = \frac{90\Omega}{0,018H} = 5000 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$

A Bode diagrammot amplitúdó és fázis karakterisztika függvényét (itt csak az abszolút érték kerül beírásra ami a két komplex komponens négyzetösszegének a gyöke):

$$W[\text{dB}] = 20 \cdot \lg |\bar{W}| = 20 \cdot \lg \frac{\omega \cdot \frac{L}{R}}{\sqrt{1 + \left(\omega \cdot \frac{L}{R}\right)^2}} = 20 \cdot \lg \left(\omega \cdot \frac{L}{R} \right) - 20 \lg \sqrt{1 + \left(\omega \cdot \frac{L}{R}\right)^2} = A_1(\omega) + A_2(\omega) \text{ Mindkét}$$

görbét a $\lg(\omega)$ függvényében ábrázoljuk. (A vízszintes tengely lg beosztású.) A logaritmus vétel miatt a szorzatból összeg lesz, így mind a fázis mind a amplitúdó jelleggörbéket tényezőnként ábrázolhatjuk, majd összegezzük.

Az első tényező $A_1(\omega)$:

$$W_1(\omega) = 20 \cdot \lg \left(\omega \cdot \frac{L}{R} \right) = 20 \cdot \lg \omega + 20 \cdot \lg \frac{L}{R} \text{ ebből az alakból jól látható, hogy } y = m \cdot x + b \text{ egyenes}$$

egyenlete. Amelynek az iránytangense $m = +20 \frac{\text{dB}}{D}$. A vízszintes tengelyt akkor metszi, ha $W_1(\omega) = 0$.

Tehát $\lg(\omega) = -\lg \frac{L}{R}$ ez pedig akkor igaz, ha $\omega = \frac{R}{L} = 5 \frac{\text{krad}}{\text{s}}$ vagyis a sarok (törési) körfrekvenciánál.

Az második tényező $W_2(\omega)$:

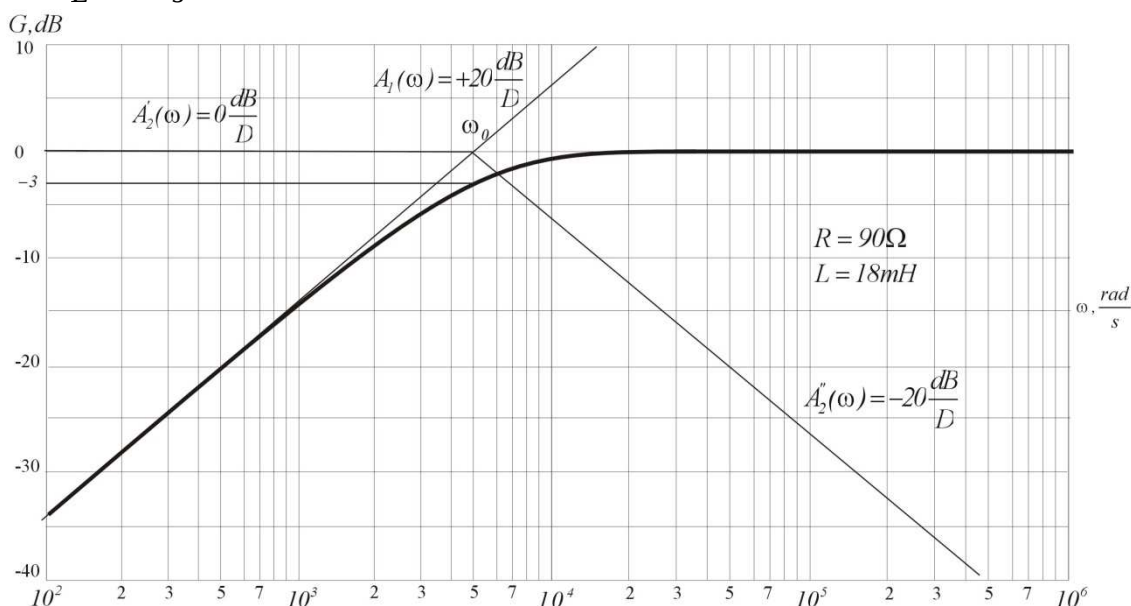
Ezt törtvonalas közelítéssel tudjuk felrajzolni:

Első közelítés, ha: $\omega \cdot \frac{L}{R} \ll 1$, $W_2'(\omega) = 20 \cdot \lg(1) = 0$

Második közelítés, ha: $\omega \cdot \frac{L}{R} \gg 1$, $A_2''(\omega) = -20 \cdot \lg(\omega) - 20 \cdot \lg \left(\frac{L}{R} \right)$. Ebből az alakból jól látható, hogy ez is

egy ($y = m \cdot x + b$) egyenes egyenlete. Amelynek az iránytangense $m = -20 \frac{\text{dB}}{D}$. A vízszintes tengelyt

szintén az $\omega = \frac{R}{L} = 5 \frac{\text{krad}}{\text{s}}$ vagyis a sarok (törési) körfrekvenciánál.



Ezen közelítést alkalmazva tudnunk kell, hogy a legnagyobb eltérés a sarok körfrekvenciánál lesz, amelynek

az értéke: $\omega_0 = \frac{R}{L}$

$$W(\omega_0) = 20 \cdot \lg \frac{\frac{R}{L} \cdot \frac{L}{R}}{\sqrt{1 + \left(\frac{R}{L} \cdot \frac{L}{R}\right)^2}} = 20 \cdot \lg \frac{1}{\sqrt{2}} = 20 \cdot \lg 1 + 20 \cdot \lg 2^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} \cdot 20 \cdot \lg 2 = -3\text{dB}$$

A fáziskarakterisztika függvénye: $\varphi(\omega) = \arctg \frac{\text{Im}[\bar{W}(j\omega)]}{\text{Re}[\bar{W}(j\omega)]}$

$$\bar{W}(j\omega) = \frac{\bar{U}_2}{\bar{U}_1} = \frac{j \cdot \omega \cdot \frac{L}{R}}{1 + j \cdot \omega \cdot \frac{L}{R}} = \frac{j \cdot \frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j \cdot \omega \cdot \frac{\omega}{\omega_0}} = \left[j \cdot \frac{\omega}{\omega_0} \right] \cdot \left[\frac{1}{1 + j \cdot \omega \cdot \frac{\omega}{\omega_0}} \right]$$

A szorzat első tényezőjét vizsgálva, amely $\bar{W}(j\omega) = j \cdot \frac{\omega}{\omega_0}$, ahol a fázis érték a $+j$ -s tag miatt $+90^\circ$ lesz.

A szorzat második tényezője esetén: $\varphi = -\arctg \frac{\omega}{\omega_0}$ Trigonometriából ismeretes, hogy φ értéke nullához

tart, ha ω értéke tart a nullához. Illetve -90° -hoz tart, ha ω tart a végtelenhez.

Így meg van a fázis karakterisztika két asszimptótája, már csak az inflexiós pont meghatározása van hátra.

Amely $\omega = \omega_0$ esetén számítható $\varphi = \arctg \frac{\omega_0}{\omega_0} = \arctg 1 = -45^\circ$ fázis érték.

Meghatározandó az inflexiós pontban, az érintő meredeksége. Tehát a függvény differenciája az adott pontban:

Érdemes ismét bevezetni a $x = \lg \frac{\omega}{\omega_0}$ ami alapján: $\frac{\omega}{\omega_0} = 10^x$

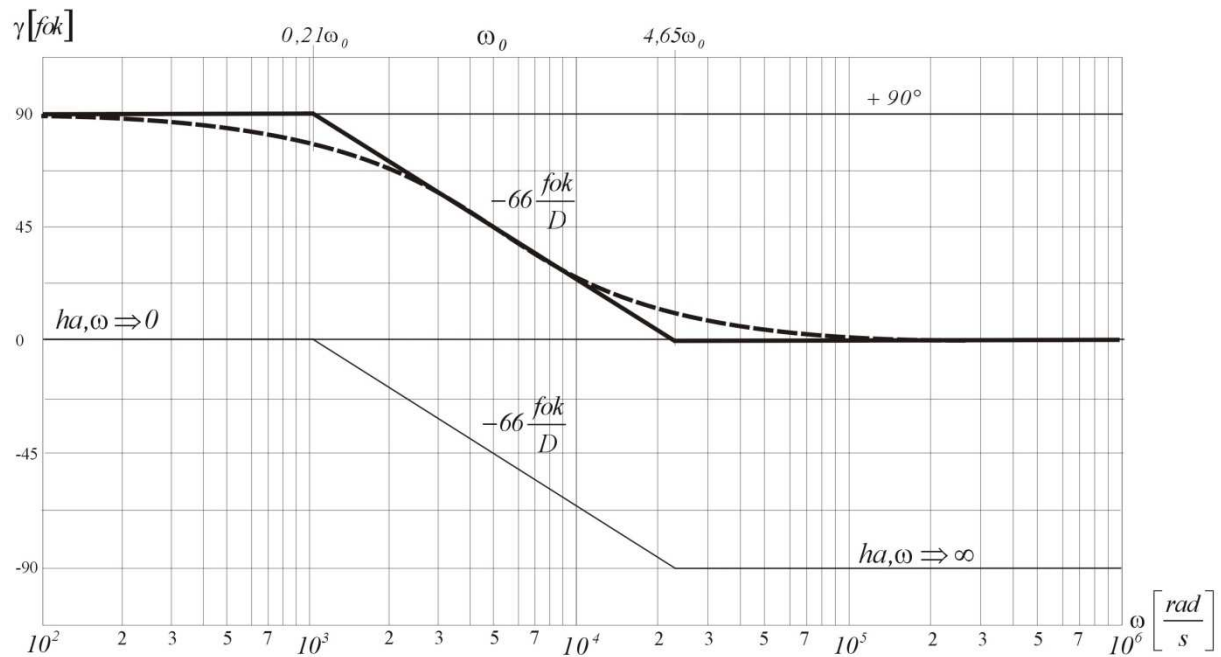
$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{d}{dx} \left[-\arctg \frac{\omega}{\omega_0} \right] = \frac{d}{dx} \left[-\arctg 10^x \right]_{x=0} = -\frac{1}{1+10^{2x}} \cdot 10^x \cdot \ln 10$$

$$\frac{d\varphi}{dx}_{x=0} = -\frac{1}{1+10^{2 \cdot 0}} \cdot 10^0 \cdot \ln 10 = -\frac{\ln 10}{2} = -1,15 \frac{\text{rad}}{D} = -66 \frac{\text{fok}}{D}$$

A legnagyobb eltérés a két sarokpontnál van. Az egyik: $\omega = 0,21 \cdot \omega_0$

Itt a pontos érték: $\varphi = -\arctg \frac{\omega}{\omega_0} = -\arctg \frac{0,21}{1} = -11,8^\circ$ és a másik esetben: $\omega = 4,65 \cdot \omega_0$

Ahol $\varphi = -\arctg \frac{\omega}{\omega_0} = -\arctg 4,65 = -77,86^\circ$ tehát az eltérés $\varphi = 90^\circ - 77,86^\circ = 12,13^\circ$

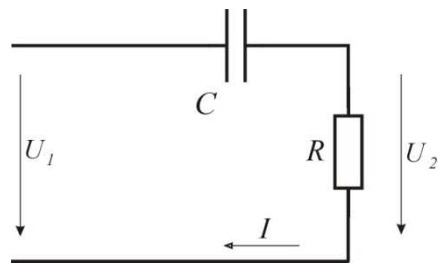


7.4 Határozza meg az ábrán megadott négpólus BODE diagramját törtvonalas közelítéssel, ha az elemek értékei: $C = 100\text{nF}$, $R = 5\text{k}\Omega$! Mekkora frekvenciájú jelet kapcsolunk a kétpóluspár bemenetére, ha $U_1 = 20\text{V}$ esetén $U_2 = 5\text{V}$ mérhető a kimeneten?

Írjuk fel az átviteli függvény általános alakját!

A feszültség osztó: $\bar{U}_2 = \bar{U}_1 \cdot \frac{R}{R + \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C}}$ amiből:

$$\omega_0 = \frac{1}{C \cdot R} = \frac{1}{100 \cdot 10^{-9} \frac{\text{As}}{\text{V}} \cdot 5 \cdot 10^3 \frac{\text{V}}{\text{A}}} = 2000 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$



$$\bar{W}(j\omega) = \frac{\bar{U}_2}{\bar{U}_1} = \frac{R}{R + \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C}} = \frac{j \cdot \omega \cdot C \cdot R}{1 + j \cdot \omega \cdot C \cdot R} = \frac{j \cdot \frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j \cdot \frac{\omega}{\omega_0}} = j \frac{\omega}{\omega_0} \cdot \frac{1}{1 + j \cdot \frac{\omega}{\omega_0}} = \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2$$

Az első tényező $\bar{A}_1(\omega)$:

$A_1(\omega) = 20 \cdot \lg(\omega \cdot C \cdot R) = 20 \cdot \lg \omega + 20 \cdot \lg C \cdot R$ ebből az alakból jól látható, hogy $y = m \cdot x + b$ egyenes egyenlete. Amelynek az iránytangense $m = +20 \frac{\text{dB}}{D}$. A vízszintes tengelyt akkor metszi, ha $W_1(\omega) = 0$.

Tehát $\lg(\omega) = -\lg C \cdot R$ ez pedig akkor igaz, ha $\omega = \frac{1}{C \cdot R} = 2 \frac{\text{krad}}{\text{s}}$ vagyis a sarok (törési) körfrekvenciánál.

Az második tényező $\bar{W}_2(\omega)$:

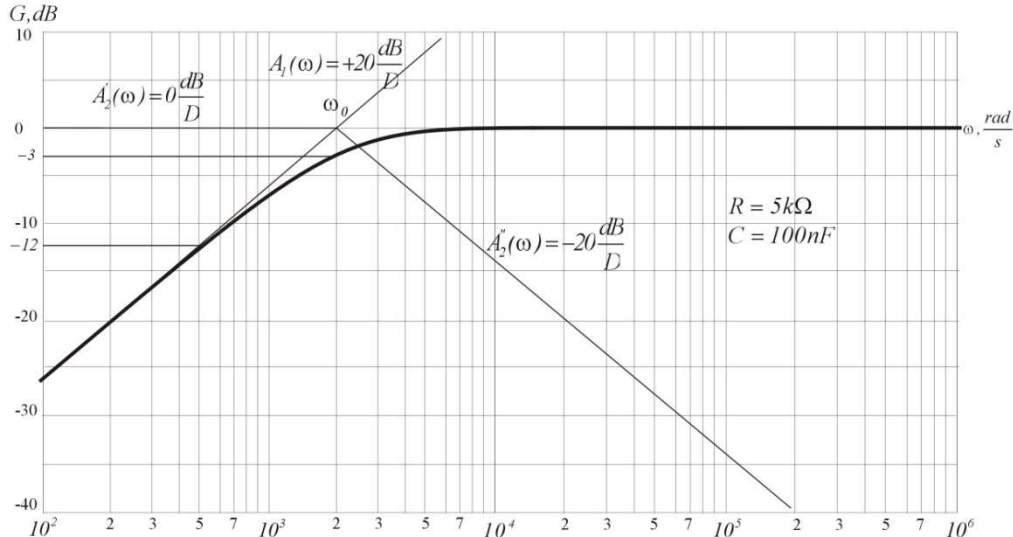
Ezt törtvonalas közelítéssel tudjuk felrajzolni:

Első közelítés, ha: $\omega \cdot C \cdot R \ll 1$, $W_2'(\omega) = 20 \cdot \lg(1) = 0$

Második közelítés, ha: $\omega \cdot C \cdot R \gg 1$, $W_2''(\omega) = -20 \cdot \lg(\omega) - 20 \cdot \lg\left(\frac{L}{R}\right)$. Ebből az alakból jól látható, hogy ez

is egy ($y = m \cdot x + b$) egyenes egyenlete. Amelynek az iránytangense $m = -20 \frac{dB}{D}$. A vízszintes tengelyt

szintén az $\omega = \frac{1}{C \cdot R} = 2 \frac{krad}{s}$ vagyis a sarok (törési) körfrekvenciánál.



Ezen közelítést alkalmazva tudnunk kell, hogy a legnagyobb eltérés a sarok körfrekvenciánál lesz, amelynek

az értéke: $\omega_0 = \frac{1}{C \cdot R}$

A fáziskarakterisztika függvénye: $\varphi(\omega) = \arctg \frac{\text{Im}[\bar{A}(j\omega)]}{\text{Re}[\bar{A}(j\omega)]}$

$$\bar{W}(j\omega) = \frac{\bar{U}_2}{\bar{U}_1} = \frac{R}{R + \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C}} = \frac{j \cdot \omega \cdot C \cdot R}{1 + j \cdot \omega \cdot C \cdot R} = \frac{j \cdot \frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j \cdot \frac{\omega}{\omega_0}} = j \frac{\omega}{\omega_0} \cdot \frac{1}{1 + j \cdot \frac{\omega}{\omega_0}} = \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2$$

A szorzat első tényezőjét vizsgálva, amely $\bar{W}(j\omega) = j \cdot \frac{\omega}{\omega_0}$, ahol a fázis érték a $+j$ -s tag miatt $+90^\circ$ lesz.

A szorzat második tényezője esetén: $\varphi = -\arctg \frac{\omega}{\omega_0}$ Trigonometriából ismeretes, hogy φ értéke nullához

tart, ha ω értéke tart a nullához. Illetve -90° -hoz tart, ha ω tart a végtelenhez.

Így meg van a fázis karakterisztika két asszimptótája, már csak az inflexiós pont meghatározása van hátra.

Amely $\omega = \omega_0$ esetén számítható $\varphi = \arctg \frac{\omega_0}{\omega_0} = \arctg 1 = -45^\circ$ fázis érték.

Meghatározandó az inflexiós pontban, az érintő meredeksége. Tehát a függvény differenciája az adott pontban:

Érdeemes ismét bevezetni a $x = \lg \frac{\omega}{\omega_0}$ ami alapján: $\frac{\omega}{\omega_0} = 10^x$

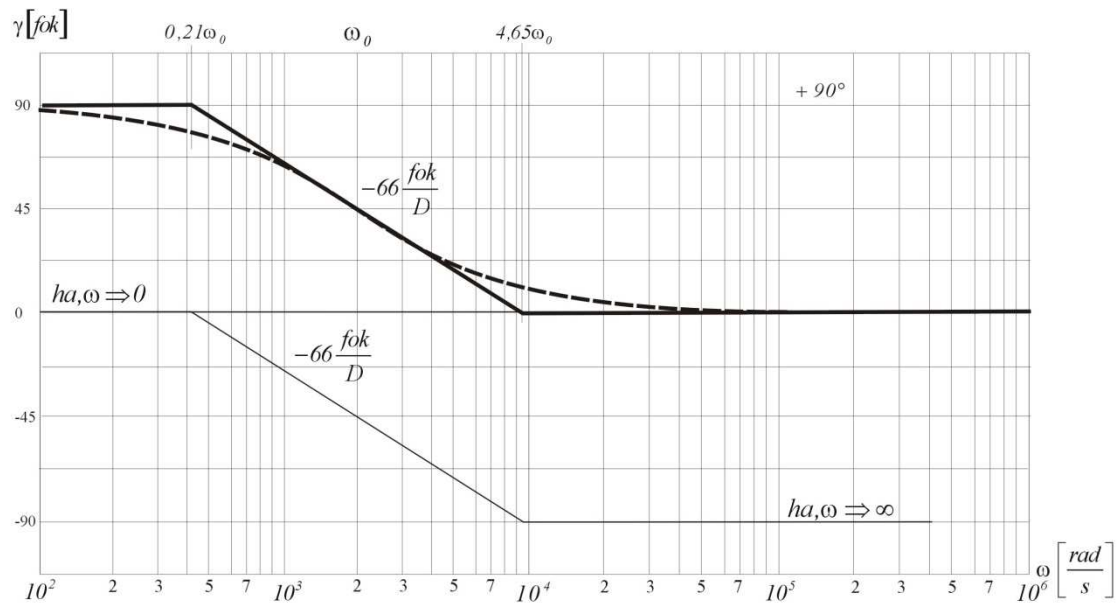
$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{d}{dx} \left[-\arctg \frac{\omega}{\omega_0} \right] = \frac{d}{dx} \left[-\arctg 10^x \right]_{x=0} = -\frac{1}{1+10^{2x}} \cdot 10^x \cdot \ln 10$$

$$\frac{d\varphi}{dx}_{x=0} = -\frac{1}{1+10^{2 \cdot 0}} \cdot 10^0 \cdot \ln 10 = -\frac{\ln 10}{2} = -1,15 \frac{rad}{D} = -66 \frac{fok}{D}$$

A legnagyobb eltérés a két sarokpontnál van. Az egyik: $\omega = 0,21 \cdot \omega_0$

Itt a pontos érték: $\varphi = -\arctg \frac{\omega}{\omega_0} = -\arctg \frac{0,21}{1} = -11,8^\circ$ és a másik esetben: $\omega = 4,65 \cdot \omega_0$

Ahol $\varphi = -\arctg \frac{\omega}{\omega_0} = -\arctg 4,65 = -77,86^\circ$ tehát az eltérés $\varphi = 90^\circ - 77,86^\circ = 12,13^\circ$



A feladatban szereplő rákapcsolt frekvencia a következő képen határozható meg:

Az U_1 és U_2 feszültségek ismeretében a csillapítás: $A = 20 \cdot \lg \frac{5V}{20V} = 20 \cdot \lg(0,25) = -12dB$

Az előző ábra alapján könnyen leolvasható hogy $-12dB$ -es csillapítás $\omega = 500 \frac{rad}{s}$ esetén lép fel. A

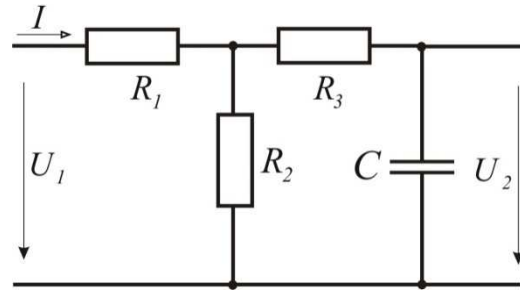
kérdéses frekvencia a körfrekvencia alapján: $f = \frac{\omega}{2 \cdot \pi} = \frac{500}{2 \cdot \pi} Hz = 79,6 Hz$.

Az ilyen tulajdonságú szűrőt felül áteresztő (alulvágó) szűrőnek nevezzük.

7.5 Határozza meg az ábrán látható négypólus BODE diagramját! $C = 100\mu F$, $R_1 = 20\Omega$, $R_2 = 20\Omega$, $R_3 = 90\Omega$. Rajzolja meg az átviteli függvény pontos menetét. Határozza meg a fázisdiagram menetét!

Írjuk fel az átviteli függvény általános alakját!
Kétszeres feszültség osztót felírva:

$$\bar{W}(j\omega) = \frac{\bar{U}_2}{\bar{U}_1} = \frac{\bar{Z}_p}{\bar{Z}_p + R_1} \cdot \frac{1}{R_3 + \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C}}$$



Elsőként a $\bar{Z}_p$ értékét határozzuk meg:

$$\bar{Z}_p = \frac{R_2 \cdot \left(R_3 + \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C} \right)}{R_2 + R_3 + \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C}} = \frac{R_2 \cdot R_3 + \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C} \cdot R_2}{R_2 + R_3 + \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C}} = \frac{j \cdot \omega \cdot C \cdot R_2 \cdot R_3 + R_2}{j \cdot \omega \cdot C \cdot R_2 + j \cdot \omega \cdot C \cdot R_3 + 1}$$

$$\bar{Z}_p = \frac{R_2 \cdot (1 + j \cdot \omega \cdot C \cdot R_3)}{1 + j \cdot \omega \cdot C \cdot (R_2 + R_3)}$$

Vissza helyettesítve az eredeti összefüggésbe, a törtet úgy alakítsuk át, hogy polinomokat kapjunk (ne legyen emeletes tört).

Elsőként szoroznunk kell a tört számlálóját és nevezőjét $(1 + j \cdot \omega \cdot C \cdot (R_2 + R_3))$ értékkel.

$$\bar{W}(j\omega) = \frac{\frac{R_2 \cdot (1 + j \cdot \omega \cdot C \cdot R_3)}{1 + j \cdot \omega \cdot C \cdot (R_2 + R_3)}}{R_1 + \frac{R_2 \cdot (1 + j \cdot \omega \cdot C \cdot R_3)}{1 + j \cdot \omega \cdot C \cdot (R_2 + R_3)}} \cdot \frac{1}{R_3 + \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C}}$$

$$\bar{W} = \frac{R_2 \cdot (1 + j \cdot \omega \cdot C \cdot R_3)}{R_1(1 + j \cdot \omega \cdot C \cdot (R_2 + R_3)) + R_2 \cdot (1 + j \cdot \omega \cdot C \cdot R_3)} \cdot \frac{1}{1 + R_3 \cdot j \cdot \omega \cdot C}$$

A törtet egyszerűsíthetjük $(1 + j \cdot \omega \cdot C \cdot R_3)$ -al:

$$\bar{W} = \frac{R_2}{R_1 + R_2 + j \cdot \omega \cdot C \cdot R_1 \cdot (R_2 + R_3) + j \cdot \omega \cdot C \cdot R_2 \cdot R_3} = \frac{R_2}{R_1 + R_2 + j \cdot \omega \cdot C (R_1 \cdot (R_2 + R_3) + R_2 \cdot R_3)}$$

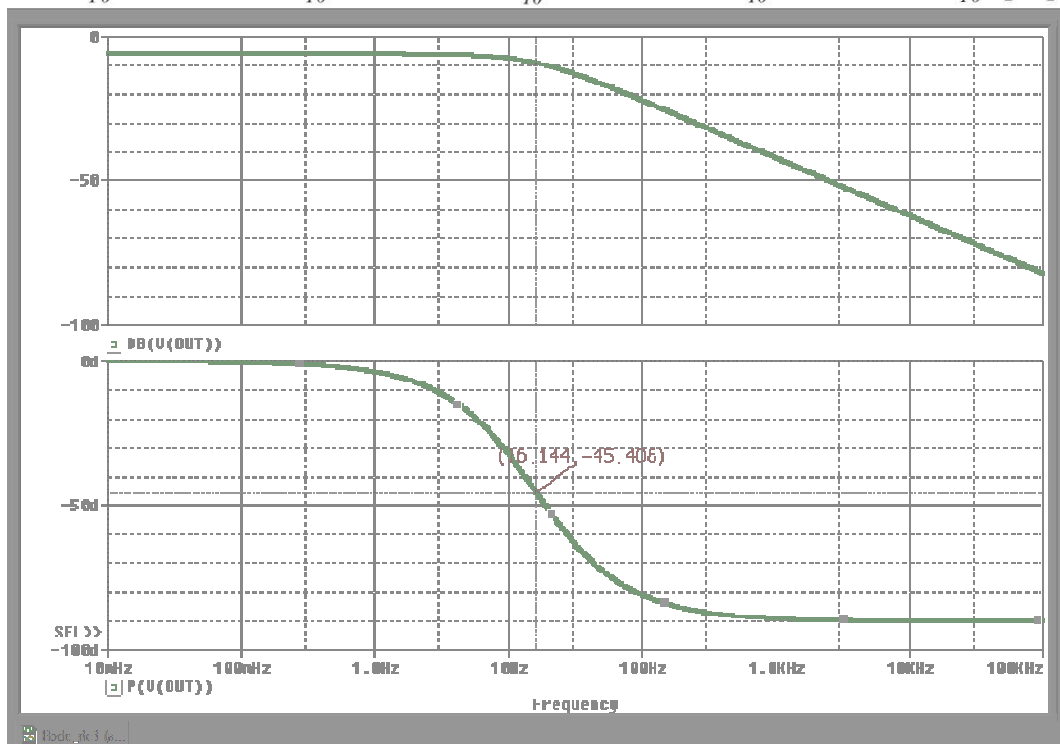
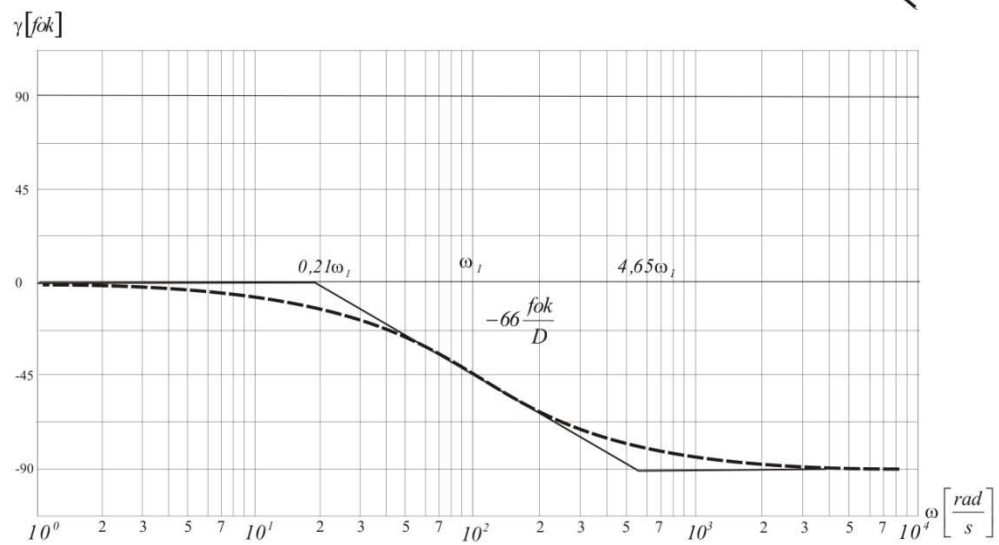
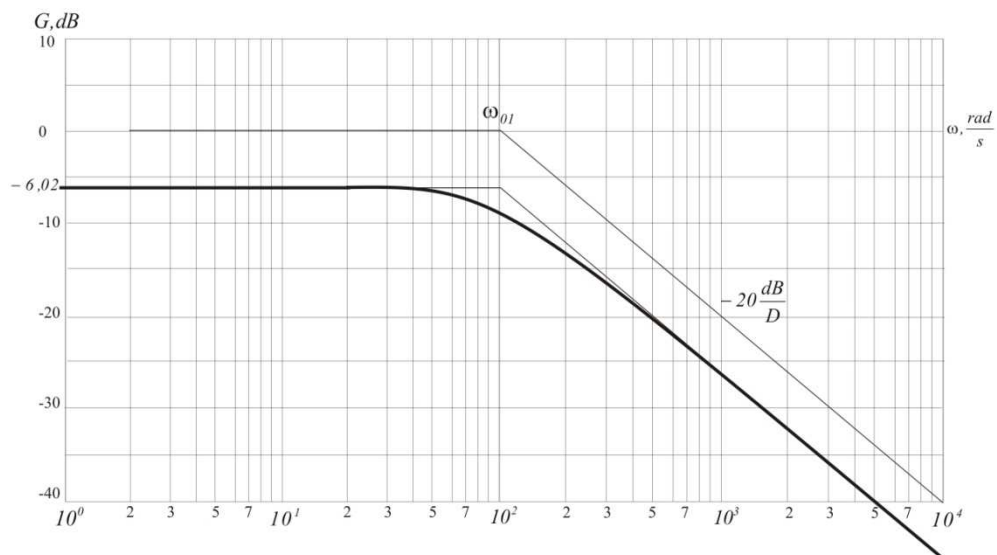
A nevezőből $(R_1 + R_2)$ értékét kiemelve, alapfüggvények szorzatát kapjuk:

$$\bar{W} = \frac{R_2}{\underbrace{R_1 + R_2}_K} \cdot \frac{1}{1 + j \cdot \omega \cdot C \underbrace{\left(\frac{R_1 \cdot (R_2 + R_3)}{R_1 + R_2} + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_1 + R_2} \right)}_{\omega_1}} = K \cdot \frac{1}{1 + j \cdot \frac{\omega}{\omega_0}}$$

$$K[dB] = 20 \cdot \lg \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 20 \cdot \lg \frac{20}{20 + 20} = -6,02 \text{ dB/D}$$

$$\omega_1 = \frac{1}{C \left(\frac{R_1 \cdot (R_2 + R_3)}{R_1 + R_2} + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_1 + R_2} \right)} = \frac{1}{100 \cdot 10^{-6} \left(\frac{20 \cdot (20 + 90)}{20 + 20} + \frac{20 \cdot 90}{20 + 20} \right)} = 100 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$f_1 = \frac{100}{2 \cdot \pi} = 15,91 \text{ Hz}$$



7.6 Határozza meg az ábrán látható négyfókus BODE diagramját! $L = 10\text{mH}$, $R_1 = 100\Omega$, $R_2 = 100\Omega$, $R_3 = 150\Omega$. Rajzolja meg az átviteli függvény pontos menetét. Határozza meg a fázisdiagram menetét!

Írjuk fel az átviteli függvény általános alakját!

Kétszeres feszültség osztót felírva:

$$\bar{W}(j\omega) = \frac{\bar{U}_2}{\bar{U}_1} = \frac{\bar{Z}_p}{\bar{Z}_p + R_1} \cdot \frac{j \cdot \omega \cdot L}{R_3 + j \cdot \omega \cdot L}$$

Elsőként a $\bar{Z}_p$ értékét határozzuk meg:

$$\bar{Z}_p = \frac{R_2 \cdot (R_3 + j \cdot \omega \cdot L)}{R_2 + R_3 + j \cdot \omega \cdot L} = \frac{R_2 \cdot R_3 + j \cdot \omega \cdot L \cdot R_2}{R_2 + R_3 + j \cdot \omega \cdot L}$$

Vissza helyettesítve az eredeti összefüggésbe, a törtet úgy alakítsuk át, hogy polinomokat kapjunk (ne legyen emeletes tört).

Elsőként szoroznunk kell a törtet $(R_2 + R_3 + j \cdot \omega \cdot L)$ értékkel.

$$\begin{aligned} \bar{W} &= \frac{\frac{R_2 \cdot R_3 + j \cdot \omega \cdot L \cdot R_2}{R_2 + R_3 + j \cdot \omega \cdot L} \cdot \frac{j \cdot \omega \cdot L}{R_3 + j \cdot \omega \cdot L}}{\frac{R_2 \cdot R_3 + j \cdot \omega \cdot L \cdot R_2}{R_2 + R_3 + j \cdot \omega \cdot L} + R_1} = \\ &= \frac{R_2 \cdot R_3 + j \cdot \omega \cdot L \cdot R_2}{R_1 \cdot (R_2 + R_3 + j \cdot \omega \cdot L) + R_2 \cdot R_3 + j \cdot \omega \cdot L \cdot R_2} \cdot \frac{j \cdot \omega \cdot L}{R_3 + j \cdot \omega \cdot L} \end{aligned}$$

Beszorzásokat elvégezve:

$$\bar{W} = \frac{R_2 \cdot R_3 + j \cdot \omega \cdot L \cdot R_2}{R_1 \cdot R_2 + R_1 \cdot R_3 + j \cdot \omega \cdot L \cdot R_1 + R_2 \cdot R_3 + j \cdot \omega \cdot L \cdot R_2} \cdot \frac{j \cdot \omega \cdot L}{R_3 + j \cdot \omega \cdot L}$$

Kiemelve $(R_3 + j \cdot \omega \cdot L)$ értéket, majd egyszerűsítve vele:

$$\begin{aligned} \bar{W} &= \frac{R_2 \cdot (R_3 + j \cdot \omega \cdot L)}{R_1 \cdot R_2 + R_1 \cdot R_3 + R_2 \cdot R_3 + j \cdot \omega \cdot L \cdot (R_1 + R_2)} \cdot \frac{j \cdot \omega \cdot L}{R_3 + j \cdot \omega \cdot L} \\ \bar{W} &= \frac{j \cdot \omega \cdot L \cdot R_2}{(R_1 \cdot R_2 + R_1 \cdot R_3 + R_2 \cdot R_3) \cdot (1 + j \cdot \omega \cdot L \cdot \frac{R_1 + R_2}{R_1 \cdot R_2 + R_1 \cdot R_3 + R_2 \cdot R_3})} \end{aligned}$$

A kapott függvényt alapfüggvények szorzatára két féle módon bontva.

1. esetben 2 különböző törési frekvenciájú alapfüggvényt kapunk ezt kell ábrázolni:

$$\bar{W} = j \cdot \omega \cdot \underbrace{\frac{L \cdot R_2}{R_1 \cdot R_2 + R_1 \cdot R_3 + R_2 \cdot R_3}}_{w_1} \cdot \underbrace{\frac{1}{1 + j \cdot \omega \cdot L \cdot \frac{R_1 + R_2}{R_1 \cdot R_2 + R_1 \cdot R_3 + R_2 \cdot R_3}}}_{w_2}$$

$$\omega_1 = \frac{R_1 \cdot R_2 + R_1 \cdot R_3 + R_2 \cdot R_3}{R_2 \cdot L} = \frac{100\Omega \cdot 100\Omega + 100\Omega \cdot 150\Omega + 100\Omega \cdot 150\Omega}{100\Omega \cdot 10 \cdot 10^{-3} \text{H}} = 40000 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

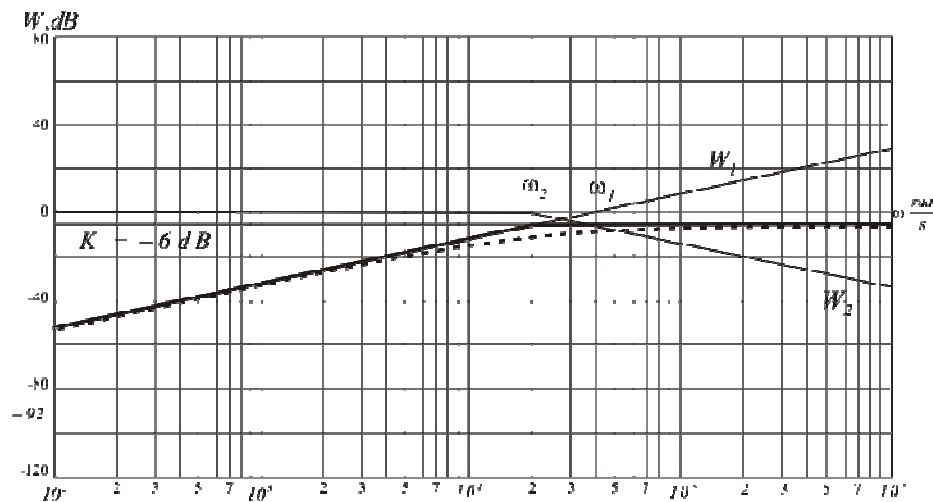
$$\omega_2 = \frac{R_1 \cdot R_2 + R_1 \cdot R_3 + R_2 \cdot R_3}{L \cdot (R_1 + R_2)} = \frac{100\Omega \cdot 100\Omega + 100\Omega \cdot 150\Omega + 100\Omega \cdot 150\Omega}{(100\Omega + 100\Omega) \cdot 10 \cdot 10^{-3} \text{H}} = 20000 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

2. esetben 1 törési frekvenciát és egy konstans kapunk és ezeket kell ábrázolni:

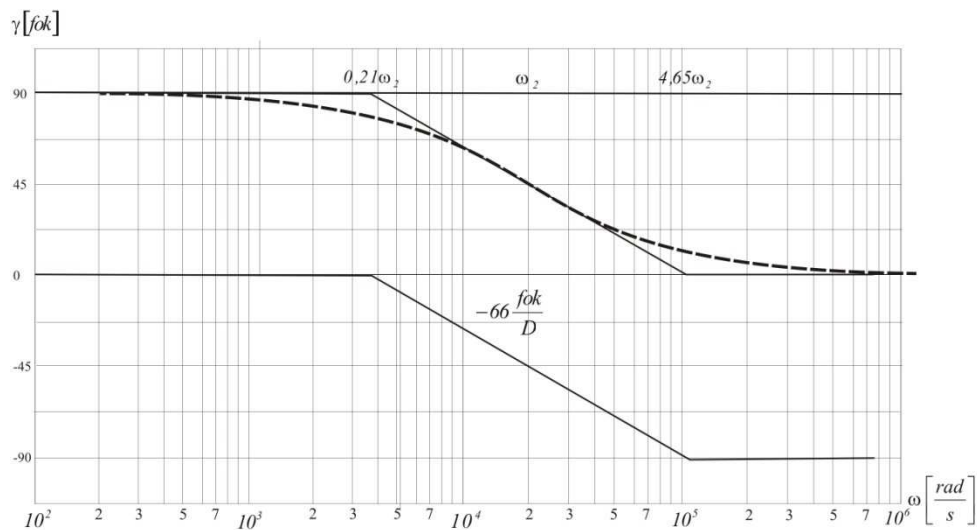
$$\bar{W} = \underbrace{\frac{R_2}{R_1 + R_2}}_K \cdot j \cdot \omega \cdot \underbrace{\frac{L(R_1 + R_2)}{R_1 \cdot R_2 + R_1 \cdot R_3 + R_2 \cdot R_3}}_{w_{01}} \cdot \underbrace{\frac{1}{1 + j \cdot \omega \cdot \frac{L(R_1 + R_2)}{R_1 \cdot R_2 + R_1 \cdot R_3 + R_2 \cdot R_3}}}_{w_{02}}$$

$$\omega_0 = \frac{R_1 \cdot R_2 + R_1 \cdot R_3 + R_2 \cdot R_3}{L \cdot (R_1 + R_2)} = \frac{100\Omega \cdot 100\Omega + 100\Omega \cdot 150\Omega + 100\Omega \cdot 150\Omega}{(100\Omega + 100\Omega) \cdot 10 \cdot 10^{-3} H} = 20000 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

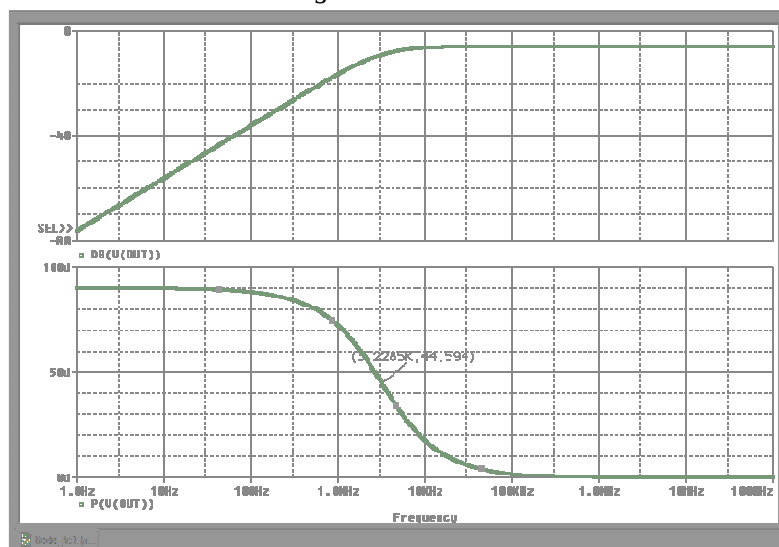
$$K[\text{dB}] = 20 \cdot \lg \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 20 \cdot \lg \frac{100}{100 + 100} = -6,02 \text{ dB}$$



A fázis diagram:



A pontos érték: $\omega_m = \sqrt{(20000 \cdot 40000)} = 28284 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$



7.7 Határozza meg az ábrán látható négypólus BODE diagramját! $C_1 = 50\text{nF}$, $C_2 = 200\text{nF}$, $R = 10\text{k}\Omega$ Rajzolja meg az átviteli függvény pontos menetét. Határozza meg a legnagyobb fázisszög értékét! Milyen körfrekvencián lép fel?

Írjuk fel az átviteli függvény általános alakját!

A feszültség osztó: $\bar{U}_2 = \bar{U}_1 \cdot \frac{R + \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C_2}}{R + \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C_1} + \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C_2}}$ amiből:

A törtet úgy alakítsuk át, hogy polinomokat kapjunk (ne legyen emeletes tört).

Elsőként bővítsük a törtet $j \cdot \omega \cdot C_2$.

$$\bar{W}(j\omega) = \frac{\bar{U}_2}{\bar{U}_1} = \frac{R + \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C_2}}{R + \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C_1} + \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C_2}} = \frac{1 + j \cdot \omega \cdot C_2 \cdot R}{j \cdot \omega \cdot C_2 \cdot R + \frac{j \cdot \omega \cdot C_2}{j \cdot \omega \cdot C_1} + 1}$$

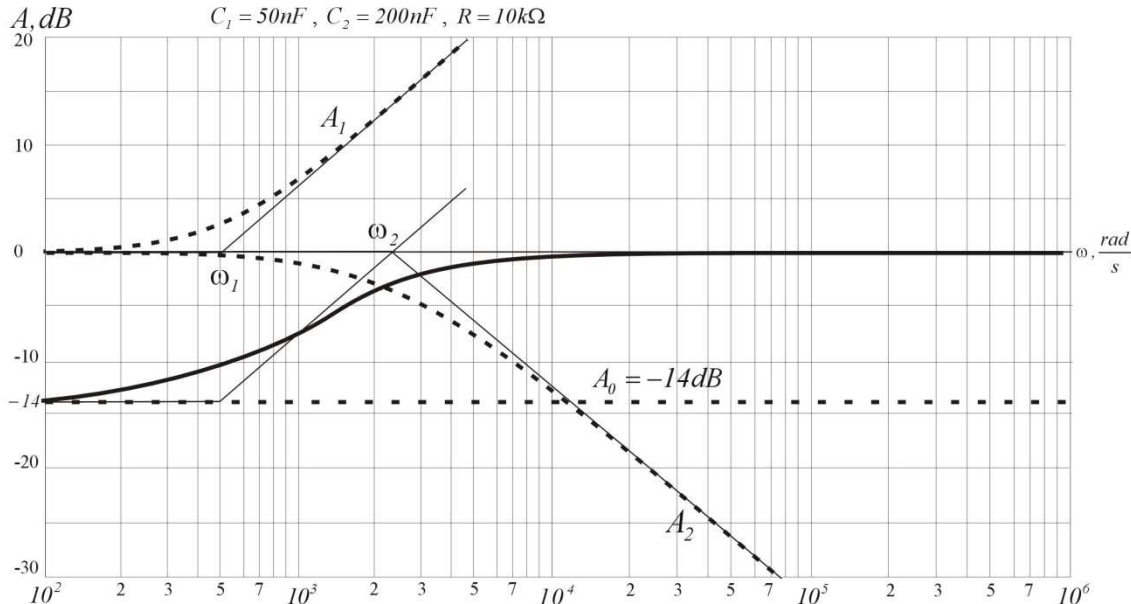
Ez után egyszerűsítsünk $j \cdot \omega$ -val és bővítsünk C_1 -el.

$$\bar{W}(j\omega) = \frac{1 + j \cdot \omega \cdot C_2 \cdot R}{j \cdot \omega \cdot C_2 \cdot R + \frac{C_2}{C_1} + 1} = \frac{C_1(1 + j \cdot \omega \cdot C_2 \cdot R)}{C_1 + C_2 + j \cdot \omega \cdot C_1 \cdot C_2 \cdot R}$$

Emeljük ki a számlálóból C_1 -et, a nevezőből pedig $C_1 + C_2$ -t.

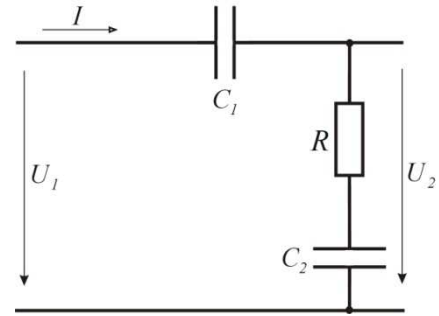
$$\bar{W}(j\omega) = \frac{C_1}{C_1 + C_2} \cdot \frac{1 + j \cdot \omega \cdot C_2 \cdot R}{1 + j \cdot \omega \cdot \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} \cdot R} = K \cdot \frac{1 + j \frac{\omega}{\omega_1}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_2}} = K \cdot \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2$$

Így egy olyan kifejezést kaptunk, amely három már ismert alapfüggvény szorzata:



$$K = \frac{C_1}{C_1 + C_2}, \bar{A}_1 = 1 + j \frac{\omega}{\omega_1}, \bar{A}_2 = \frac{1}{1 + j \frac{\omega}{\omega_2}}$$

Az ábrázoláshoz meg kell határoznunk a konstans értékét, és a törésponti körfrekvenciákat.

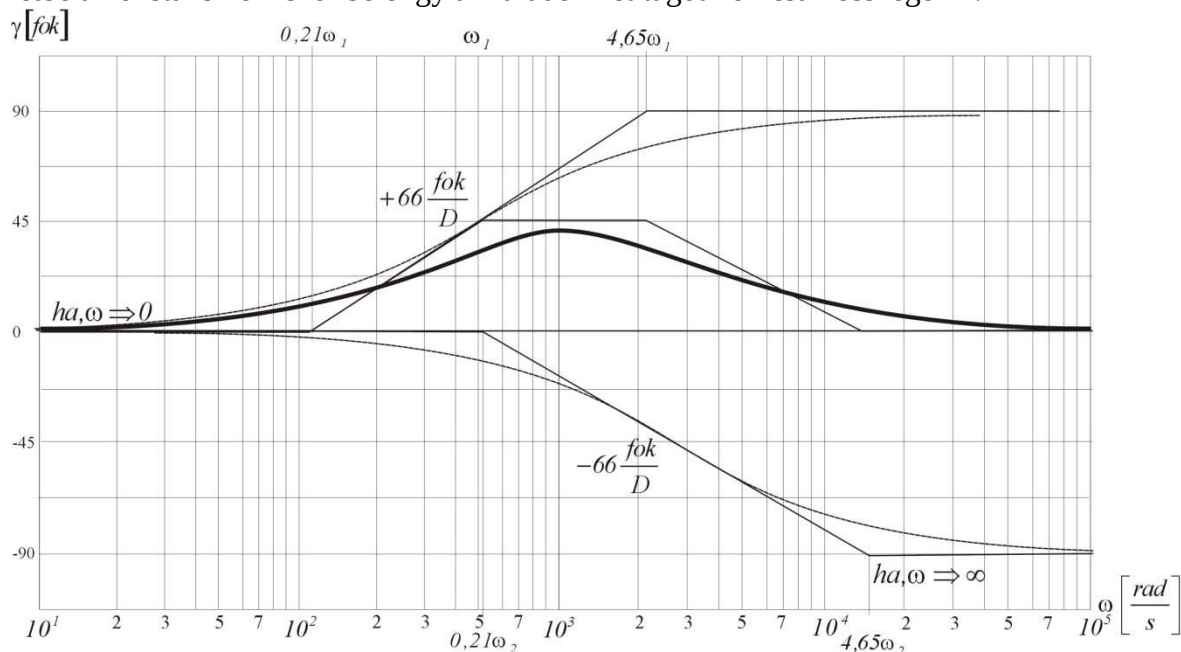


$$K = 20 \cdot \lg \frac{C_1}{C_1 + C_2} = 20 \cdot \lg \frac{50\text{nF}}{50\text{nF} + 200\text{nF}} = 20 \cdot \lg 0,2 = -14\text{dB}$$

$$\omega_1 = \frac{1}{C_2 \cdot R} = \frac{1}{100 \cdot 10^{-9} \text{F} \cdot 10 \cdot 10^3 \Omega} = 500 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\omega_2 = \frac{C_1 + C_2}{C_1 \cdot C_2 \cdot R} = \frac{250 \cdot 10^{-9} \text{F}}{50 \cdot 10^{-9} \text{F} \cdot 200 \cdot 10^{-9} \text{F} \cdot 10 \cdot 10^3 \Omega} = 2500 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

A fázismentetbe a konstans nem szól bele így a maradék két tagot kell csak összegezni.



Fáziseltérés a törésponti körfrekvenciák tartományában lép fel. Ennek a legnagyobb leolvasott értéke

$$\omega_{\max} = 1000 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

A pontos érték: $\omega_{\max} = \sqrt{(500 \cdot 2500)} = 1118 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$

Ehhez a frekvenciához tartozó fázis érték pontos értéke:

$$\varphi_{\max} = \varphi_1 - \varphi_2 = \arctg \frac{\omega_m}{\omega_1} - \arctg \frac{\omega_m}{\omega_2} = \arctg \frac{1000}{500} - \arctg \frac{1000}{2500} = 63,43 - 21,8 = 41,6^\circ$$

A törtvonalas közelítéssel ennél néhány fokkal nagyobb érték adódik: $\frac{\omega}{\omega_0} = 10^x$ -t ismét beírva

$$\frac{d\varphi}{dx}_{x=0} = \frac{\ln 10}{2} = 1,15 \frac{\text{rad}}{D} = 66 \frac{\text{fok}}{D}.$$

$$\varphi'_{\max} = 66 \cdot \lg \frac{0,21 \cdot \omega_2}{0,21 \cdot \omega_1} = 66 \cdot \lg \frac{\omega_2}{\omega_1} = 66 \cdot \lg \frac{2500}{500} = 66 \cdot \lg 5 = 46,13^\circ$$

A fázisszög pozitív ami annyit jelent, hogy az U_2 siet az U_1 -hez képest.

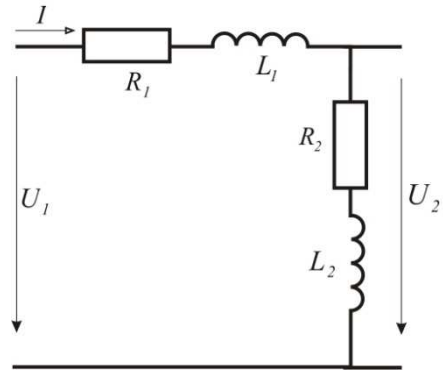
7.8 Határozza meg az ábrán látható négypólus BODE diagramját! $L_1 = 20\text{mH}$, $L_2 = 100\text{mH}$, $R_1 = 100\Omega$, $R_2 = 20\Omega$ Rajzolja meg az átviteli függvény pontos menetét. Határozza meg a legnagyobb fázisszög értékét! Milyen körfrekvencián lép fel?

Írjuk fel az átviteli függvény általános alakját!

A feszültség osztó:

$$\bar{U}_2 = \bar{U}_1 \cdot \frac{R_2 + j \cdot \omega \cdot L_2}{R_1 + j \cdot \omega \cdot L_1 + R_2 + j \cdot \omega \cdot L_2} \text{ amiből:}$$

A törtet úgy alakítsuk át, hogy polinomokat kapjunk (ne legyen emeletes tört).



$$\bar{W}(j\omega) = \frac{\bar{U}_2}{\bar{U}_1} = \frac{R_2 + j \cdot \omega \cdot L_2}{R_1 + j \cdot \omega \cdot L_1 + R_2 + j \cdot \omega \cdot L_2} = \frac{R_2 + j \cdot \omega \cdot L_2}{R_1 + R_2 + j \cdot \omega(L_1 + L_2)}$$

Ez után osztva R_2 -vel számlálót és nevezőt is.

$$\bar{W}(j\omega) = \frac{1 + j \cdot \omega \cdot \frac{L_2}{R_2}}{\frac{R_1 + R_2}{R_2} + j \cdot \omega \left(\frac{L_1 + L_2}{R_2} \right)}$$

Emeljük ki a nevezőből $\frac{R_1 + R_2}{R_2}$ -t.

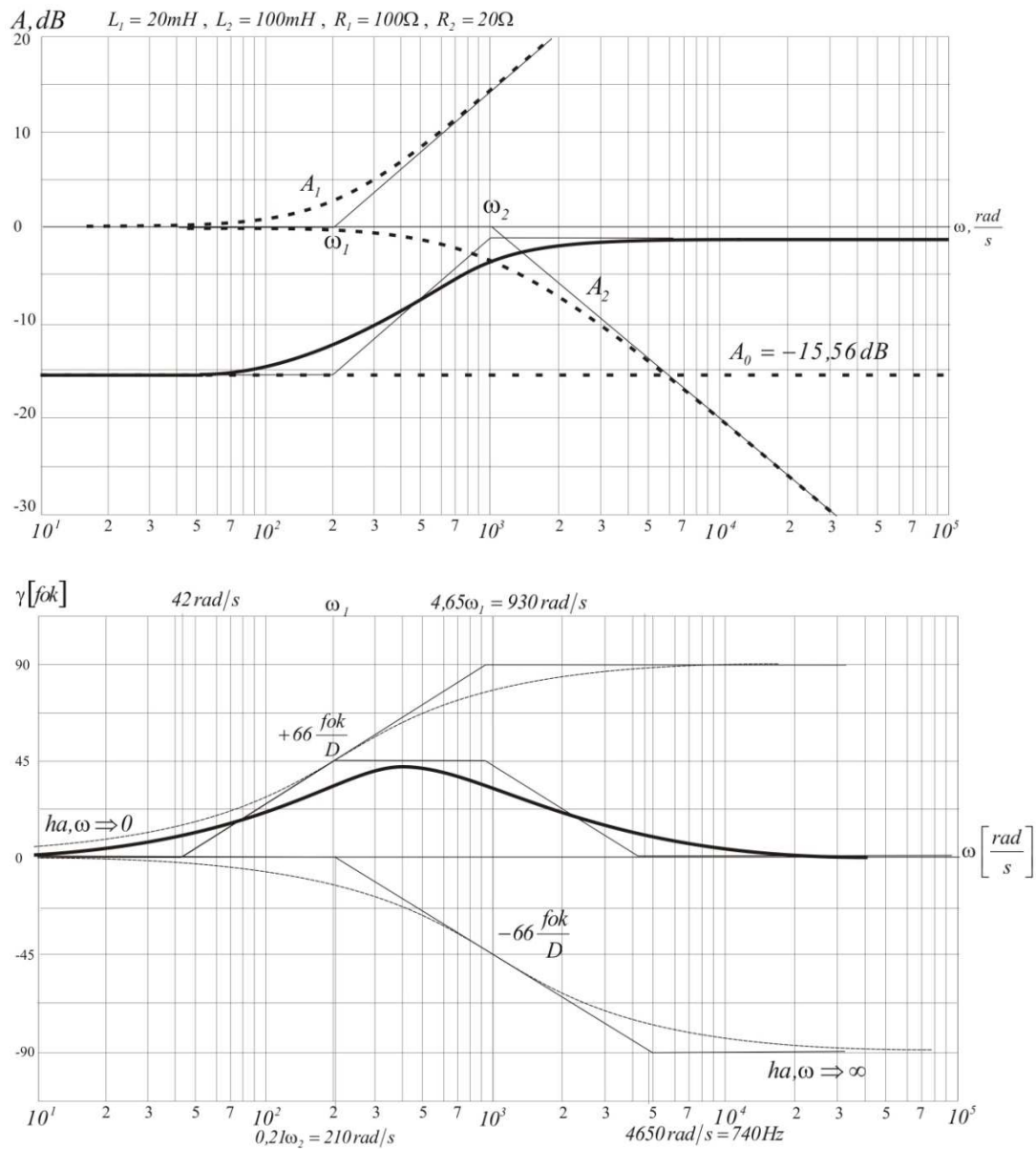
$$\bar{W} = \frac{1 + j \cdot \omega \cdot \frac{L_2}{R_2}}{\frac{R_1 + R_2}{R_2} \left[1 + j \cdot \omega \left(\frac{L_1 + L_2}{R_2} \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} \right) \right]} = \underbrace{\frac{R_2}{R_1 + R_2}}_K \cdot \underbrace{1 + j \cdot \omega \cdot \frac{L_2}{R_2}}_{A_1} \cdot \underbrace{\frac{1}{1 + j \cdot \omega \cdot \frac{L_1 + L_2}{R_1 + R_2}}}_{A_2}$$

Így egy olyan kifejezést kaptunk, amely három már ismert alapfüggvény szorzata:

$$K[\text{dB}] = 20 \cdot \lg \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 20 \cdot \lg \frac{20}{100 + 20} = -15,56 \text{ dB/D}$$

$$\omega_1 = \frac{R_2}{L_2} = \frac{20\Omega}{100 \cdot 10^{-3} \text{H}} = 200 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\omega_2 = \frac{R_1 + R_2}{L_1 + L_2} = \frac{20\Omega + 100\Omega}{20 \cdot 10^{-3} \text{H} + 100 \cdot 10^{-3} \text{H}} = 1000 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$



Fáziseltérés a törésponti körfrekvenciák tartományában lép fel. Ennek a legnagyobb értéke $\omega_{max} = 400 \frac{rad}{s}$ (az ábra alapján leolvasott érték).

$$\varphi_{max} = \varphi_1 - \varphi_2 = \arctg \frac{\omega_m}{\omega_1} - \arctg \frac{\omega_m}{\omega_2} = \arctg \frac{400}{200} - \arctg \frac{400}{1000} = 63,43 - 21,8 = 41,62^\circ$$

A pontos érték: $\omega_{max} = \sqrt{200 \cdot 1000} = 447,21 \frac{rad}{s}$ ekkor $\varphi_{max} = 65,89 - 24,08 = 41,81^\circ$

A törésvonalas közelítéssel ennél néhány fokkal nagyobb érték adódik: $\frac{\omega}{\omega_0} = 10^x$ -t ismét beírva

$$\frac{d\varphi}{dx}_{x=0} = \frac{\ln 10}{2} = 1,15 \frac{rad}{D} = 66 \frac{fok}{D}.$$

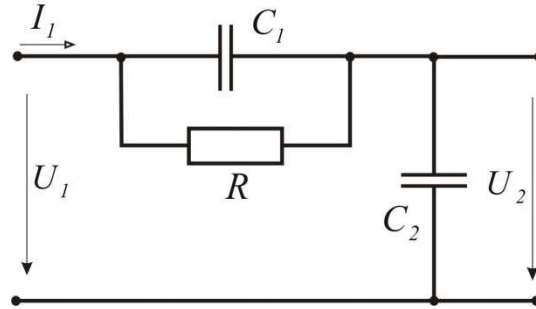
$$\varphi'_{max} = 66 \cdot \lg \frac{0,21 \cdot \omega_2}{0,21 \cdot \omega_1} = 66 \cdot \lg \frac{\omega_2}{\omega_1} = 66 \cdot \lg \frac{1000}{200} = 66 \cdot \lg 5 = 46,13^\circ$$

A fázisszög pozitív, ami annyit jelent, hogy az U_2 siet az U_1 -hez képest.

3.75 Határozza meg az ábrán látható négypólus BODE diagramját! ($R_1 = 25k\Omega$, $C_1 = 10nF$, $C_2 = 40nF$). Rajzolja meg az átviteli függvény pontos menetét. Határozza meg az ω_0 saját körfrekvencia értékét!

Ha felírjuk az átviteli függvény általános alakját, az alábbi feszültség osztóból indulhatunk ki.:

$$\bar{U}_2 = \bar{U}_1 \cdot \frac{\frac{1}{j \cdot \omega \cdot C_2}}{R \cdot \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C_1} + \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C_2}} \text{ amiből:}$$



Elsőként számítsuk ki a párhuzamos tag eredőjét.

$$\bar{Z}_{C_1 R} = \frac{R \cdot \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C_1}}{R + \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C_1}} = \frac{R}{j \cdot \omega \cdot C_1 \cdot R + 1} = \frac{R}{1 + j \cdot \omega \cdot C_1 \cdot R} \text{ Majd visszahelyettesítés után szorozzunk } j \cdot \omega \cdot C_2 -$$

vel.

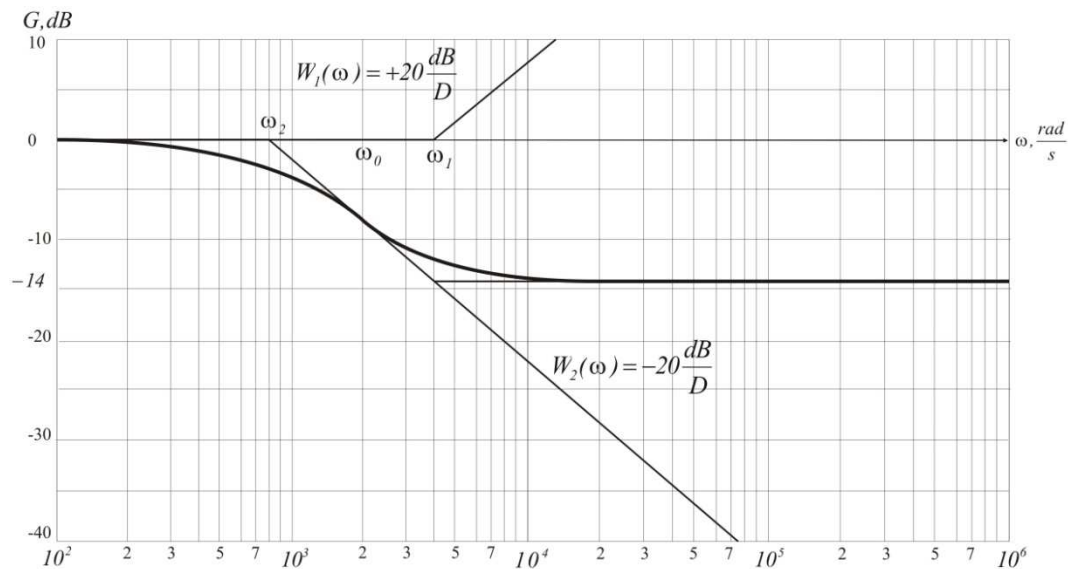
$$\bar{W}(j\omega) = \frac{\bar{U}_2}{\bar{U}_1} = \frac{\frac{1}{j \cdot \omega \cdot C_2}}{\frac{R}{1 + j \cdot \omega \cdot C_1 \cdot R} + \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C_2}} = \frac{1}{\frac{j \cdot \omega \cdot C_2 R}{1 + j \cdot \omega \cdot C_1 \cdot R} + 1} = \frac{1}{\frac{1 + j \cdot \omega \cdot C_1 \cdot R + j \cdot \omega \cdot C_2 R}{1 + j \cdot \omega \cdot C_1 \cdot R}}$$

$$\bar{W}(j\omega) = \frac{1 + j \cdot \omega \cdot C_1 \cdot R}{1 + j \cdot \omega \cdot (C_1 \cdot R + C_2 \cdot R)} = \underbrace{1 + j \cdot \omega \cdot C_1 \cdot R}_{w_1} \cdot \underbrace{\frac{1}{1 + j \cdot \omega \cdot (C_1 \cdot R + C_2 \cdot R)}}_{w_2}$$

$$\omega_1 = \frac{1}{C_1 \cdot R} = \frac{1}{10 \cdot 10^{-9} F \cdot 25 \cdot 10^3 \Omega} = 4000 \frac{rad}{s}$$

$$\omega_2 = \frac{1}{R \cdot (C_1 + C_2)} = \frac{1}{25 \cdot 10^3 \Omega \cdot (10 \cdot 10^{-9} F + 40 \cdot 10^{-9} F)} = 800 \frac{rad}{s}$$

$$\text{A maximális fáziseltérés frekvenciája: } \omega_0 = \sqrt{800 \cdot 4000} = 1788,85 \frac{rad}{s}$$



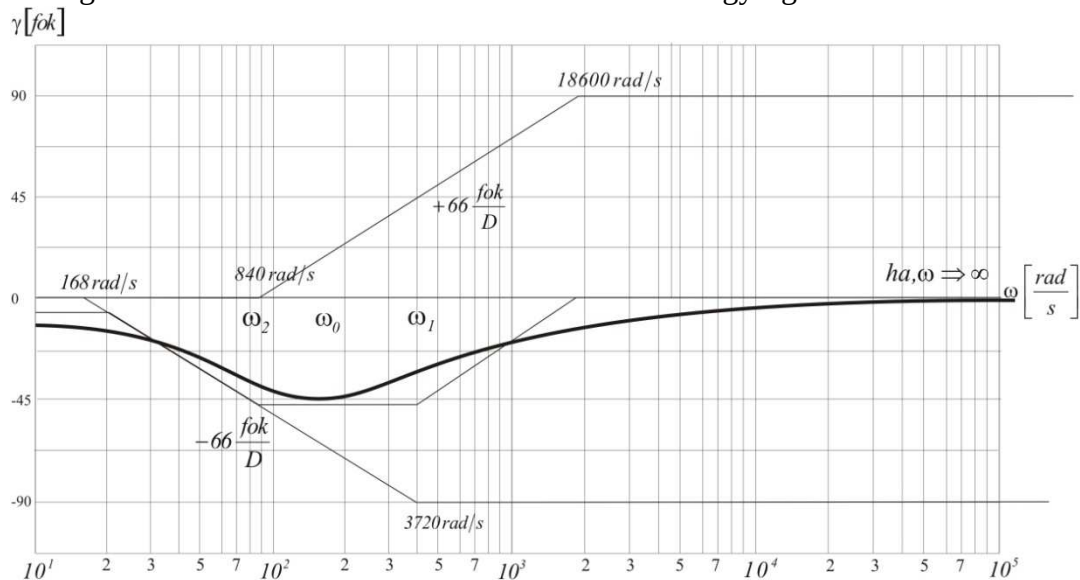
A fázis eltérésnek maximális értéke van, amely kétféle módon is számítható.

$$\varphi_{\max} = \varphi_2 - \varphi_1 = \arctg \frac{\omega_m}{\omega_2} - \arctg \frac{\omega_m}{\omega_1} = \arctg \frac{1788,85}{4000} - \arctg \frac{1788,85}{800} = 24,09 - 65,9 = -41,81^\circ$$

A törtvonalas közelítésből ennél néhány fokkal nagyobb érték adódik.

$$\varphi_{\max} = 66 \cdot \lg \frac{0,21 \cdot \omega_2}{0,21 \cdot \omega_1} = 66 \cdot \lg \frac{\omega_2}{\omega_1} = 66 \cdot \lg \frac{800}{4000} = 66 \cdot \lg 0,25 = -46,13^\circ$$

Az alábbi fázisdiagramból is leolvasható a maximális fáziseltérés nagysága.



Leolvasott érték: $\varphi_{\max} = -45^\circ$

3.74 Határozza meg az ábrán látható négy pólus BODE diagramját! ($R_1 = 60\text{k}\Omega$, $R_2 = 20\text{k}\Omega$, $C = 25\text{nF}$). Rajzolja meg az átviteli függvény pontos menetét. Határozza meg az ω_0 saját körfrekvencia értékét!

Írjuk fel az átviteli függvény általános alakját!

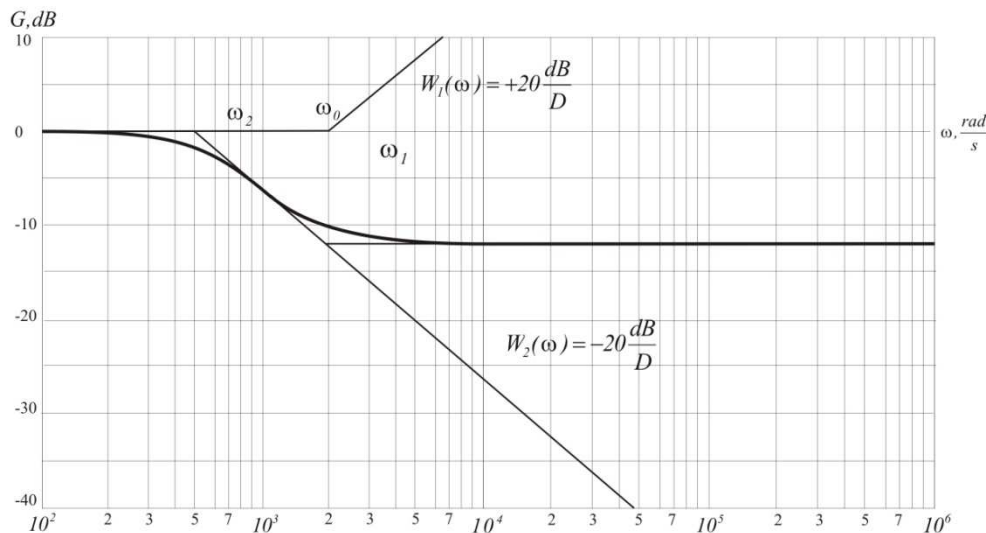
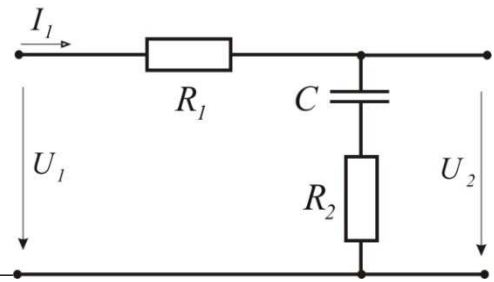
A feszültség osztó: $\bar{W}(j\omega) = \frac{\bar{U}_2}{\bar{U}_1} = \frac{R_2 + \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C}}{R_1 + R_2 + \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C}}$

$$\bar{W}(j\omega) = \frac{j \cdot \omega \cdot C \cdot R_2 + 1}{j \cdot \omega \cdot C (R_1 + R_2) + 1} = (1 + j \cdot \omega \cdot C \cdot R_2) \cdot \frac{1}{1 + j \cdot \omega \cdot C (R_1 + R_2)}$$

$$\omega_1 = \frac{1}{C \cdot R_2} = \frac{1}{25 \cdot 10^{-9} \text{ F} \cdot 20 \cdot 10^3 \Omega} = 2000 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\omega_2 = \frac{1}{C \cdot (R_1 + R_2)} = \frac{1}{25 \cdot 10^{-9} \Omega \cdot (20 \cdot 10^3 \text{ F} + 60 \cdot 10^3 \text{ F})} = 500 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

A maximális fáziseltérés frekvenciája: $\omega_0 = \sqrt{2000 \cdot 500} = 1000 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$



A fázis eltérésnek maximális értéke van amely kétféle módon is számítható.

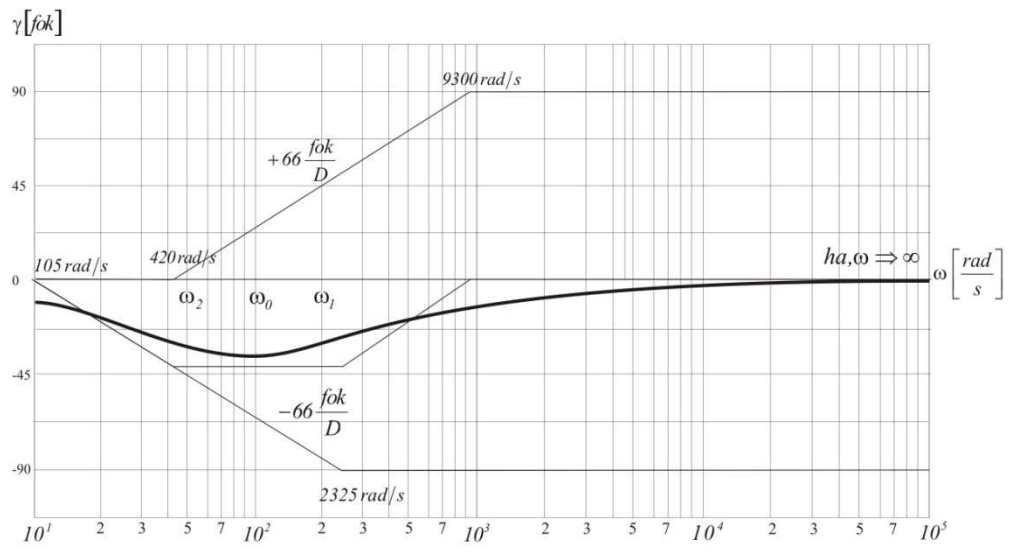
$$\varphi_{\max} = \varphi_2 - \varphi_1 = \arctg \frac{\omega_m}{\omega_2} - \arctg \frac{\omega_m}{\omega_1} = \arctg \frac{1000}{2000} - \arctg \frac{1000}{500} = 26,56 - 63,43 = -36,86^\circ$$

A törtvonalas közelítésből ennél néhány fokkal nagyobb érték adódik.

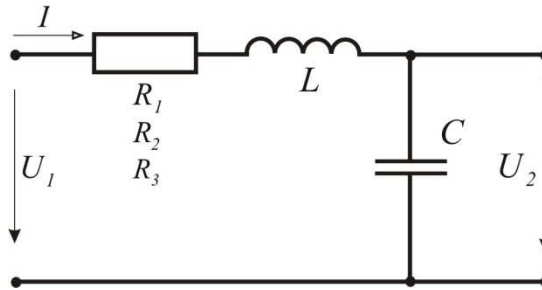
$$\varphi_{\max} = 66 \cdot \lg \frac{0,21 \cdot \omega_2}{0,21 \cdot \omega_1} = 66 \cdot \lg \frac{\omega_2}{\omega_1} = 66 \cdot \lg \frac{500}{2000} = 66 \cdot \lg 0,25 = -39,73^\circ$$

Az alábbi fázisdiagramból is leolvasható a maximális fáziseltérés nagysága.

Leolvasott érték: $\varphi_{\max} = -40^\circ$



- 7.17 Határozza meg az ábrán látható négy pólus BODE diagramját! $L = 25\text{mH}$, $C = 10\mu\text{F}$, $R_1 = 1000\Omega$. Rajzolja meg az átviteli függvény pontos menetét. Határozza meg az ω_0 saját körfrekvencia értékét!
- 2.,) Vizsgálja meg az átviteli függvényt, ha az ellenállás értéke $R_2 = 100\Omega$ -ra változik!
- 3.,) Határozza meg az átviteli függvényt, ha az ellenállás értéke $R_3 = 10\Omega$ -ra változik!



$$\bar{W}(j\omega) = \frac{\bar{U}_2}{\bar{U}_1} = \frac{1}{R + j\omega \cdot L + \frac{1}{j\omega \cdot C}} = \frac{1}{1 + j\omega \cdot C \cdot R + (j\omega)^2 \cdot L \cdot C}$$

A kifejezésben másodfokú kifejezést kapunk.

$$\frac{1}{1 + j\omega \cdot C \cdot R + (j\omega)^2 \cdot L \cdot C} = \frac{1}{R + j\omega \cdot L + \frac{1}{j\omega \cdot C}} = \frac{1}{1 + j\omega \cdot C \cdot R + (j\omega)^2 \cdot L \cdot C}$$

Kérdés, hogy felbontható-e elsőfokú függvények szorzataként.

$$\frac{1}{1 + j\omega \cdot C \cdot R + (j\omega)^2 \cdot L \cdot C} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_1}} \cdot \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_2}}$$

A nevezőben található másodfokú függvényt $\omega_{1,2}$ megoldva a kapott két gyök szorzat alakban könnyen ábrázolható.

$$(j\omega)_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} = \frac{-C \cdot R \pm \sqrt{(C \cdot R)^2 - 4 \cdot L \cdot C}}{2 \cdot L \cdot C} = -\frac{R}{2 \cdot L} \pm \sqrt{\frac{C^2 \cdot R^2}{4 \cdot L^2 \cdot C^2} - \frac{4 \cdot L \cdot C}{4 \cdot L^2 \cdot C^2}}$$

$$\alpha = \frac{R}{2 \cdot L} = \frac{1000\Omega}{2 \cdot 25 \cdot 10^{-3}\text{H}} = 20000 \frac{\Omega}{\text{H}}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 25 \cdot 10^{-3}\text{H} \cdot 10 \cdot 10^{-6}}} = 2000 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

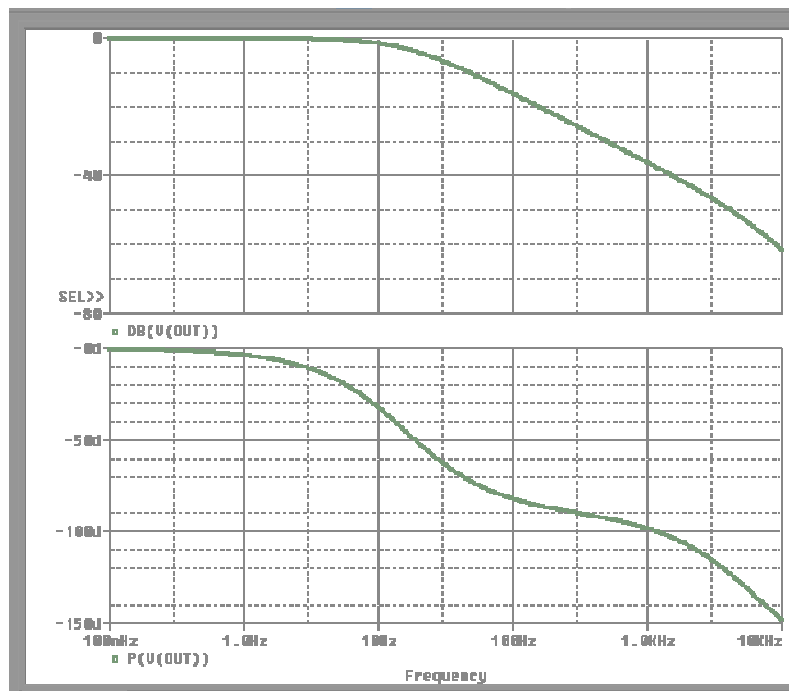
Így az α és ω_0 viszonya alapján háromféle eset lehetséges:

1.,) eset ha $\alpha > \omega_0$ akkor létezik két valós gyök.

$$(j\omega)_{1,2} = -\alpha^2 \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = 20.000^2 \pm \sqrt{20.000^2 - 2000^2} \prec \begin{matrix} \omega_1 = 100,25 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \\ \omega_2 = 39900 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \end{matrix}$$

Mivel a körfrekvencia értéke csakis pozitív lehet, ezért elhagyhatjuk a negatív előjelet. A kapott két gyök ismeretében kiszámítható (visszaellenőrizhető) az ω_0 értéke:

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \cdot \omega_2} = \sqrt{100,25 \cdot 39899,74} \cong 2000 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$



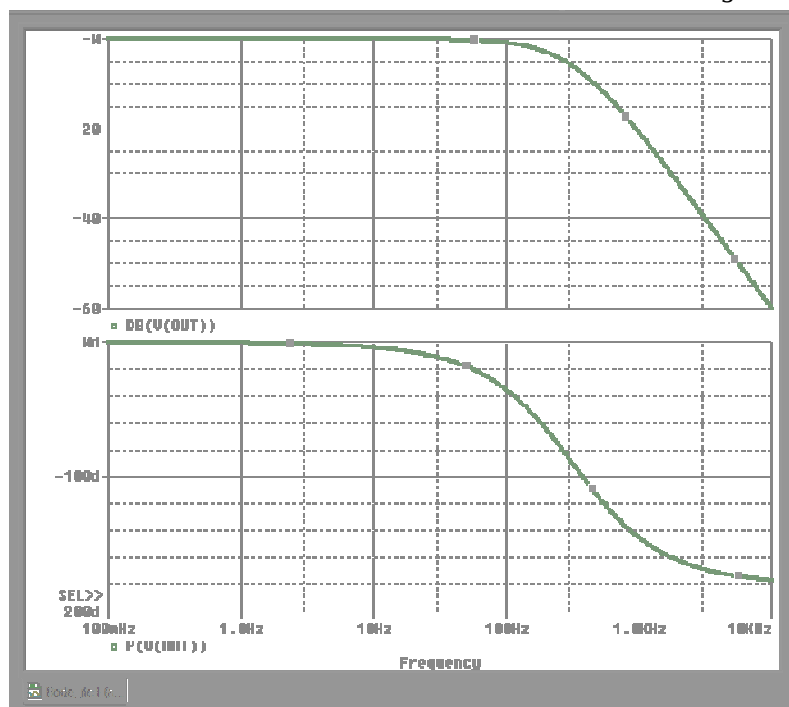
Az RLC szűrő BODE diagramja $R_1 = 1000\Omega$ esetén

2.,) eset, ha $R_2 = 100\Omega$ akkor $\alpha = \omega_0$ és létezik egy dupla gyök.

$$\alpha = \frac{R_2}{2 \cdot L} = \frac{100\Omega}{2 \cdot 25 \cdot 10^{-3}H} = 2000 \frac{\Omega}{H}$$

Az $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} = 2000 \frac{\text{rad}}{s}$ értéke változatlan marad az előző részhez képest.

$$(j\omega)_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = 2000^2 \pm \sqrt{2000^2 - 2000^2} = \omega_1 = \omega_2 = \omega_0 = 2000 \frac{\text{rad}}{s}$$



Az RLC szűrő BODE diagramja $R_2 = 100\Omega$ esetén

3.,) eset, ha $R_3 = 10\Omega$ akkor $\alpha < \omega_0$ és nincs valós gyök.

$$\alpha = \frac{R_3}{2 \cdot L} = \frac{10\Omega}{2 \cdot 25 \cdot 10^{-3} H} = 200 \frac{\Omega}{H}$$

Az $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} = 2000 \frac{rad}{s}$ értéke változatlan marad az előző részhez képest.

$$(j\omega)_{12} = -\alpha^2 \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -200^2 \pm \sqrt{200^2 - 2000^2} = \text{nincs valós gyök}$$

Ilyen esetben az α és ω_0 hányadosát írjuk fel:

$$\zeta = \frac{\alpha}{\omega_0} = \frac{R_3}{2 \cdot L \cdot \omega_0} \cdot \underbrace{\frac{C}{C}}_{\substack{\text{bővíti} \\ \text{a} \\ \text{törtet}}} = \frac{R_3 \cdot C}{2 \cdot L \cdot C \cdot \omega_0} = \frac{R_3 \cdot C}{2 \cdot \omega_0} \cdot \underbrace{\frac{1}{L \cdot C}}_{\omega_0^2} = \frac{R_3 \cdot C}{2} \cdot \omega_0 = \frac{200}{2000} = 0,1$$

$$\text{Kifejezve az eredeti egyenlet elsőfokú együtthatóját: } R_3 \cdot C = \frac{2 \cdot \zeta}{\omega_0}$$

Ezek után ezt visszahelyettesítve az eredeti egyenletbe $\frac{\omega}{\omega_0}$ -ra nézve kapunk másodfokú összefüggést.

$$\overline{W}(j\omega) = \frac{1}{(j \cdot \omega)^2 \cdot \underbrace{\frac{1}{L \cdot C}}_{\frac{1}{\omega_0^2}} + j \cdot \omega \cdot \underbrace{\frac{C \cdot R}{C}}_{\frac{2 \cdot \zeta}{\omega_0}} + 1} = \frac{1}{\left[j \cdot \frac{\omega}{\omega_0} \right]^2 + j \cdot \frac{\omega}{\omega_0} \cdot 2 \cdot \zeta + 1} = \overline{W}(j\omega) = \frac{1}{\underbrace{1 - \left[\frac{\omega}{\omega_0} \right]^2}_{\text{valós összetevő}} + j \cdot \underbrace{2 \cdot \zeta \cdot \frac{\omega}{\omega_0}}_{\text{képzetes összetevő}}}$$

Az ábrázoláshoz vizsgáljuk meg a $\omega = 0$ és az $\omega = \infty$ eseteket.

$$\omega = 0 \text{ esetén } W[dB] = -10 \cdot \lg \left(\left[1 - \left[\frac{\omega}{\omega_0} \right]^2 \right]^2 + \left[2 \cdot \zeta \cdot \frac{\omega}{\omega_0} \right]^2 \right) = -10 \cdot \lg 1 = 0$$

Tehát az asszimptóta 0dB-es tengely kis frekvenciák esetén.

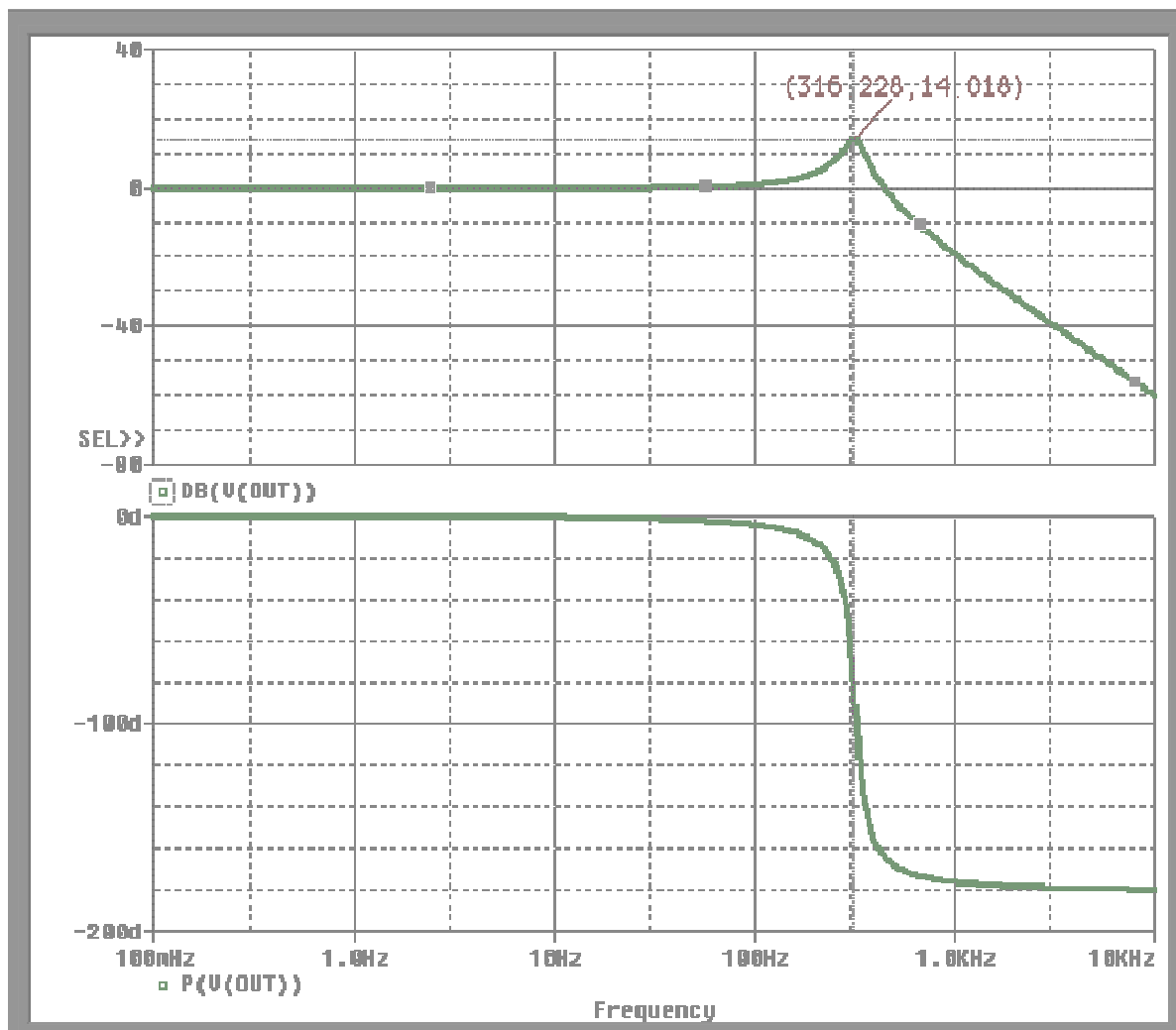
$\omega = \infty$ esetén

$$W[dB] \cong -10 \cdot \lg \left(\underbrace{\left[1 - \left[\frac{\omega}{\omega_0} \right]^2 \right]^2}_{\substack{\text{elhanyagolható} \\ \text{1}}}} + \underbrace{\left[2 \cdot \zeta \cdot \frac{\omega}{\omega_0} \right]^2}_{\text{elhanyagolható}} \right) = -10 \cdot \lg \left[\frac{\omega}{\omega_0} \right]^4 = -40 \cdot \lg \frac{\omega}{\omega_0}$$

Ez pedig $-40 \left[\frac{dB}{D} \right]$ meredekségű egyenes egyenlete lesz. Ezen egyenes, a nulla dB-es tengelyt $\omega = \omega_0$ -nál fogja metszeni.

A legnagyobb eltérés a törtvonalas ábrázolástól, megint csak ω_0 -nál várható. Ennek a pontos értéke számítással és szimulációval is kiszámításra került.

$$\overline{W}|_{\omega_0} \cong -10 \cdot \lg \left(\left[1 - \left[\frac{\omega_0}{\omega_0} \right]^2 \right]^2 + \left[2 \cdot \zeta \cdot \frac{\omega_0}{\omega_0} \right]^2 \right) = -10 \cdot \lg [0 + 2 \cdot 0,1 \cdot 1]^2 = 13,979dB$$



Az RLC szűrő BODE diagramja $R_3 = 10\Omega$ esetén

7.23 Határozza meg az ábrán látható négypólus BODE diagramját! ($R_1 = 1k\Omega$, $C_1 = 1mF$, $R_2 = 2k\Omega$, $C_2 = 0,25mF$). Rajzolja meg az átviteli függvény pontos menetét. Határozza meg az ω_0 saját körfrekvencia értékét!

Írjuk fel az átviteli függvény általános alakját!

A feszültség osztó:

$$\bar{U}_2 = \bar{U}_1 \cdot \frac{R_2 + \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C_2}}{R_2 + \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C_2} + R_1 \times \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C_1}} \text{ amiből:}$$

A törtet úgy alakítsuk át, hogy polinomokat kapjunk (ne legyen emeletes tört).

$$\text{Elsőként szorozunk } R_1 + \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C_1}.$$

$$\bar{W}(j\omega) = \frac{\bar{U}_2}{\bar{U}_1} = \frac{R_2 + \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C_2}}{R_2 + \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C_2} + \frac{R_1 \cdot \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C_1}}{R_1 + \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C_1}}} = \frac{\left(R_2 + \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C_2}\right) \cdot \left(R_1 + \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C_1}\right)}{\left(R_2 + \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C_2}\right) \cdot \left(R_1 + \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C_1}\right) + \frac{R_1}{j \cdot \omega \cdot C_1}}$$

Ezután a szorzatok tényezőin belül közös nevezőre hozunk.

$$\bar{W}(j\omega) = \frac{\left(\frac{1 + j \cdot \omega \cdot C_2 \cdot R_2}{j \cdot \omega \cdot C_2}\right) \cdot \left(\frac{1 + j \cdot \omega \cdot C_1 \cdot R_1}{j \cdot \omega \cdot C_1}\right)}{\left(\frac{1 + j \cdot \omega \cdot C_2 \cdot R_2}{j \cdot \omega \cdot C_2}\right) \cdot \left(\frac{1 + j \cdot \omega \cdot C_1 \cdot R_1}{j \cdot \omega \cdot C_1}\right) + \left(\frac{j \cdot \omega \cdot C_2 \cdot R_1}{(j \cdot \omega \cdot C_1) \cdot (j \cdot \omega \cdot C_2)}\right)}$$

Egyszerűsítve $(j \cdot \omega \cdot C_1) \cdot (j \cdot \omega \cdot C_2)$ -vel.

$$\bar{W}(j\omega) = \frac{(1 + j \cdot \omega \cdot C_2 \cdot R_2) \cdot (1 + j \cdot \omega \cdot C_1 \cdot R_1)}{(1 + j \cdot \omega \cdot C_2 \cdot R_2) \cdot (1 + j \cdot \omega \cdot C_1 \cdot R_1) + (j \cdot \omega \cdot C_2 \cdot R_1)} =$$

$$\bar{W}(j\omega) = \frac{(1 + j \cdot 1 \cdot \omega) \cdot (1 + j \cdot 0,5 \cdot \omega)}{1 + j \cdot \omega \cdot C_2 \cdot R_2 + j \cdot \omega \cdot C_1 \cdot R_1 + 1 + (j \cdot \omega)^2 \cdot C_1 \cdot R_1 \cdot C_2 \cdot R_2 + j \cdot \omega \cdot C_2 \cdot R_1}$$

$$\bar{W}(j\omega) = \frac{(1 + j \cdot 1 \cdot \omega) \cdot (1 + j \cdot 0,5 \cdot \omega)}{(j \cdot \omega)^2 \cdot 0,5 + j \cdot \omega \cdot 1,75 + 1} = \frac{\left(1 + j \cdot \frac{\omega}{\omega_1}\right) \cdot \left(1 + j \cdot \frac{\omega}{\omega_2}\right)}{\left(1 + j \cdot \frac{\omega}{\omega_3}\right) \cdot \left(1 + j \cdot \frac{\omega}{\omega_4}\right)}$$

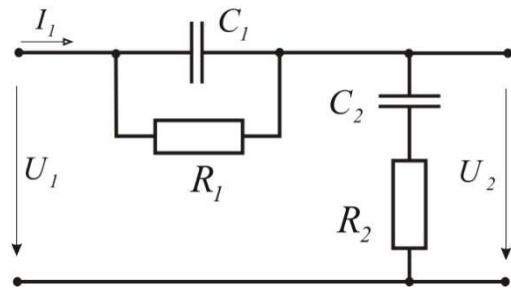
Innen azonnal látható ω_1 és ω_2 értéke:

$$\omega_1 = \frac{1}{C_2 \cdot R_2} = \frac{1}{1} = 1 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\omega_2 = \frac{1}{C_1 \cdot R_1} = \frac{1}{0,5} = 2 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

A nevező két gyökét a másodfokú egyenlet megoldásával kaphatjuk meg. A „b” érték elől elhagyhatjuk a negatív előjelet, mert az eredmények csakis pozitív értékek esetén értelmezhetők.

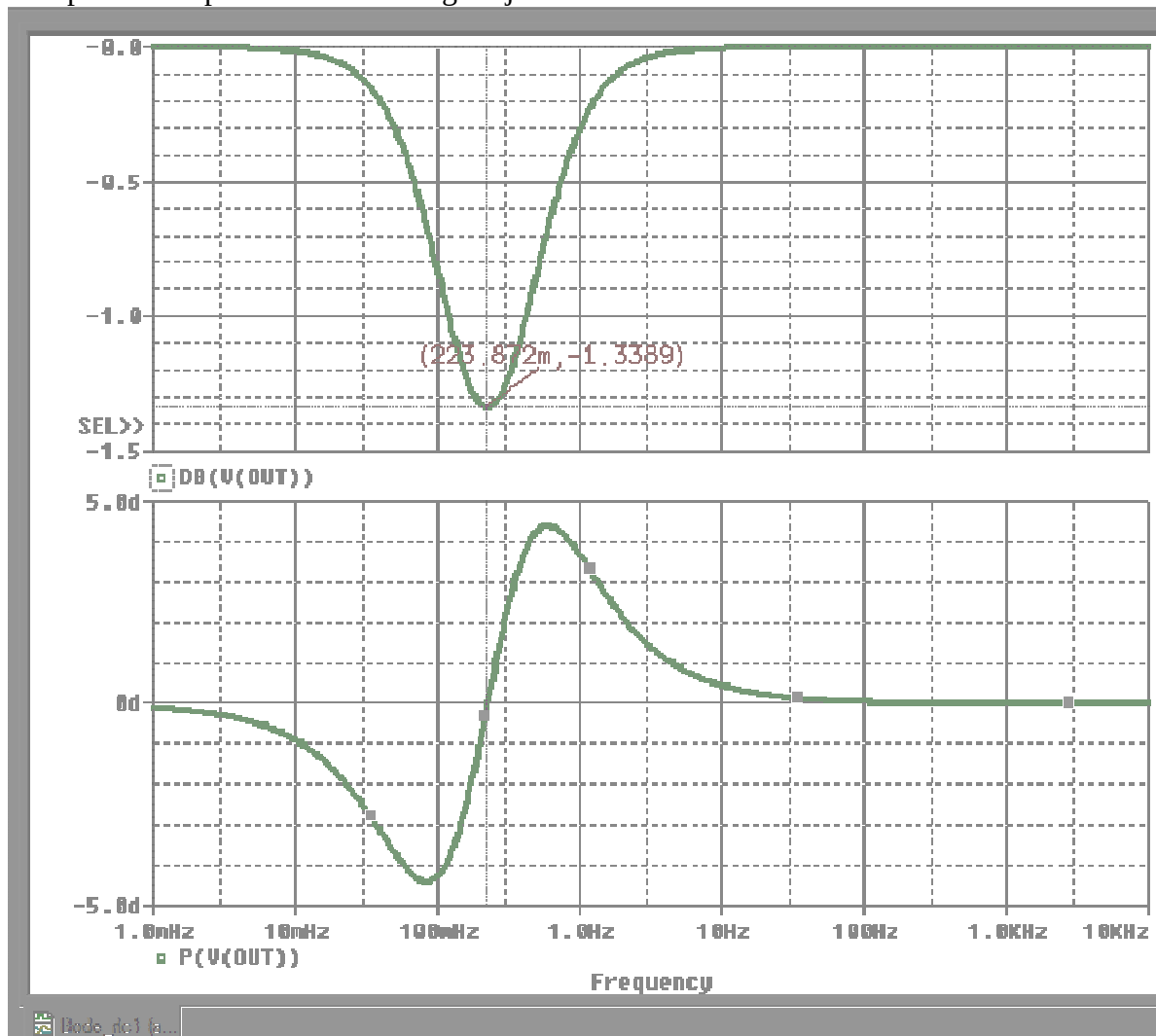
$$(j\omega)_{3,4} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} = \frac{1,75 \pm \sqrt{1,75^2 - 2}}{1} \prec \begin{matrix} \omega_3 = 0,72 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \\ \omega_4 = 2,78 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \end{matrix}$$



Így egy olyan kifejezést kaptunk, amely négy azonos típusú alapfüggvény szorzata.

$$\bar{W}(j\omega) = \frac{\left(1 + j \cdot \frac{\omega}{1}\right) \cdot \left(1 + j \cdot \frac{\omega}{2}\right)}{\left(1 + j \cdot \frac{\omega}{0,72}\right) \cdot \left(1 + j \cdot \frac{\omega}{2,78}\right)}$$

A kapcsolás amplitúdó- és fázisdiagramja



A kapott két gyök ismeretében ki számítható (visszaellenőrizhető) az ω_0 értéke:

$$\omega_{1,2} = \sqrt{\omega_1 \cdot \omega_2} = \sqrt{1 \cdot 2} = 1,41 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\omega_{3,4} = \sqrt{\omega_3 \cdot \omega_4} = \sqrt{0,72 \cdot 2,78} = 1,41 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_{1,2} \cdot \omega_{3,4}} = \sqrt{1,41 \cdot 1,41} = 1,41 \frac{\text{rad}}{\text{s}} = \frac{1,41 \frac{\text{rad}}{\text{s}}}{2 \cdot \pi} = 224 \text{mHz}$$

Látható a szimuláció eredménye az ábrán 223,872mHz.

A műszaki gyakorlatban sok esetben Laplace-operátoros alakban adják meg az átviteli függvény értékét. A Laplace transzformáció olyan matematikai módszer, amellyel a differenciál egyenletek algebrai egyenletekké alakíthatóak át. Differenciálásnak az „s”-el történő szorzás felel meg, az integrálásnak az „s”-el történő osztás felel meg.

Hálózati elem:	ellenállás	induktivitás	kapacitás
Időfüggvény:	$u = R \cdot i$	$u = L \frac{di}{dt}$	$u = \frac{1}{C} \int i dt$
Komplex alak:	$\bar{U} = R \cdot \bar{I}$	$\bar{U} = j\omega L \cdot \bar{I}$	$\bar{U} = \frac{1}{j\omega C} \cdot \bar{I}$
Laplace operátoros alak:	$U(s) = R \cdot I(s)$	$U(s) = sL \cdot I(s)$	$U(s) = \frac{1}{sC} \cdot I(s)$

A komplex alak csak szinuszos gerjesztés esetén igaz csak.

A táblázatból tehát leszűrhető: $s = j\omega$