

SI mértékegység rendszer:

<u>Fizikai mennyiség</u>	<u>SI egység neve</u>	<u>SI egység szimbóluma</u>	<u>Kifejezése SI-alapegységekkel</u>	
<u>elektromos töltés</u> (q)	<u>coulomb</u>	C	As	
<u>elektromos feszültség</u> , (U), <u>elektromos potenciálkülönbség</u>	<u>volt</u>	V	J/C	$\frac{kg \cdot m^2}{A \cdot s^3}$
áram erősség (I)	amper	A	C/s	
<u>elektromos ellenállás</u> (R)	ohm	Ω	V/A	$\frac{kg \cdot m^2}{A^2 \cdot s^3}$
reaktancia (X)	ohm	Ω		
impedancia (Z)	ohm	Ω		
<u>kapacitás</u> (C)	farad	F	As/V	$\frac{A^2 \cdot s^4}{kg \cdot m^2}$
<u>induktivitás</u> (L)	henry	H	Vs/A	$\frac{kg \cdot m^2}{A^2 \cdot s^2}$
<u>teljesítmény</u> , <u>hőáramlás</u> (P)	<u>watt</u>	W	J/s	$\frac{kg \cdot m^2}{s^3}$
meddő teljesítmény (Q)	var	VA _r		
látszólagos teljesítmény (S)	voltamper	VA		
<u>frekvencia</u> (f)	<u>hertz</u>	Hz	1/s	
Elektromos térerősség (E)		V/m	N/C	
<u>munka</u> (W)	joule	J		

SI-prefixumok			
Előtag	Jele	Szorzó	
		hatvánnyal	számnévvel
yotta-	Y	10^{24}	kvadrillió
zetta-	Z	10^{21}	trilliárd
exa-	E	10^{18}	trillió
peta-	P	10^{15}	billiárd
tera-	T	10^{12}	billió
giga-	G	10^9	milliárd
mega-	M	10^6	millió
kilo-	k	10^3	ezer
hekto-	h	10^2	száz
deka-	dk	10^1	tíz
–	–	10^0	egy
deci-	d	10^{-1}	tized
centi-	c	10^{-2}	század
milli-	m	10^{-3}	ezred
mikro-	μ	10^{-6}	milliomod
nano-	n	10^{-9}	milliárdod
piko-	p	10^{-12}	billiomod
femto-	f	10^{-15}	billiárdod
atto-	a	10^{-18}	trilliomod
zepto-	z	10^{-21}	trilliárdod
yokto-	y	10^{-24}	qadrilliomod

- 25.17 Négy egyenlő nagyságú ($3\mu\text{C}$), pontszerűnek tekinthető, töltés helyezünk el egy 40cm oldalhosszúságú négyzet csúcaiban. Két egymással szemben lévő töltés pozitív előjelű, míg a másik két töltés negatív előjelű. Határozza meg az egyik negatív töltésre ható erőt!

Megoldás:

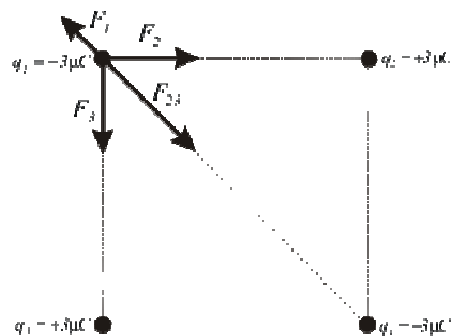
$$F_2 = F_3 = k \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} = 9 \cdot 10^9 \frac{(3 \cdot 10^{-6})^2 \text{C}^2}{0,4^2 \text{m}^2} = 0,51 \text{N}$$

Mivel az F_2 és az F_3 erők eredője egy egyenesbe esik a az F_4 erő hatásvonalával csak ellentétes irányú, így felírhatjuk:

$$F_{23} = F_2 \cdot \cos 45^\circ + F_3 \cdot \cos 45^\circ = (2 \cdot 0,51 \text{N}) \frac{2}{\sqrt{2}} = 0,72 \text{N}$$

$$F_4 = k \frac{q_1 \cdot q_2}{(\sqrt{2} \cdot r)^2} = 9 \cdot 10^9 \frac{(3 \cdot 10^{-6})^2 \text{C}^2}{2 \cdot 0,4^2 \text{m}^2} = 0,25 \text{N}$$

Tehát az eredő erő: $F_e = F_{23} - F_4 = 0,72 \text{N} - 0,25 \text{N} = 0,47 \text{N}$ és a q_4 felé mutató erő.



- 25.18 Három $+2\mu\text{C}$, $+3\mu\text{C}$, $-8\mu\text{C}$ töltést helyezünk el 10cm oldalhosszúságú, egyenlő oldalú háromszög csúcaiban. Határozza meg a másik két töltés által a $-8\mu\text{C}$ töltésre ható erőt!

Megoldás:

$$F_1 = k \frac{q_1 \cdot q_3}{r^2} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{2 \cdot 10^{-6} \text{C} \cdot 8 \cdot 10^{-6} \text{C}}{0,1^2 \text{m}^2} = 14,4 \text{N}$$

$$F_2 = k \frac{q_2 \cdot q_3}{r^2} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{3 \cdot 10^{-6} \text{C} \cdot 8 \cdot 10^{-6} \text{C}}{0,1^2 \text{m}^2} = 21,6 \text{N}$$

Mint látható az erők vonzóak ezért a töltés polaritását a vektor felrajzolásakor már figyelembe vettük így a számításba csak az abszolút értékével kell számolni. Az ábrán látható módon felvéve x-y koordináta rendszert az alábbiakat kapjuk az eredő vektor kiszámítására:

$$F_x = F_{1x} + F_{2x} = -14,4 \text{N} - 21,6 \text{N} \cdot \cos 60^\circ = -25,4 \text{N}$$

$$F_y = F_{1y} + F_{2y} = 0 - 21,6 \text{N} \cdot \sin 60^\circ = -18,7 \text{N}$$

$$\text{Tehát az eredő erő: } F_e = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{25,4^2 \text{N}^2 + 18,7^2 \text{N}^2} = 31,4 \text{N}$$

A koszinusz tétellel is számítható: $F_e = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot \cos(120^\circ)} = 31,38 \text{N}$

- 25.36 Egy $+1\mu\text{C}$ és egy $-1\mu\text{C}$ nagyságú pontszerű töltést egy szabályos háromszög két csúcsába helyezünk el. A szabályos háromszög oldalának a hossza $0,7\text{m}$. Határozza meg az elektromos térerősséget a háromszög harmadik csúcsában!

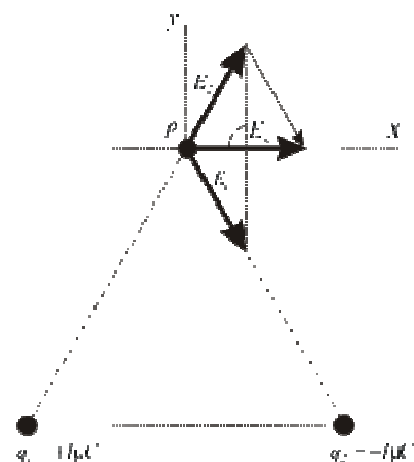
Megoldás:

$$E_1 = k \frac{q_1}{r^2} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{10^{-6} \text{C}}{0,7^2 \text{m}^2} = 18,4 \frac{\text{kN}}{\text{C}}$$

$$E_2 = k \frac{q_2}{r^2} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{10^{-6} \text{C}}{0,7^2 \text{m}^2} = 18,4 \frac{\text{kN}}{\text{C}}$$

Mint látható a két erő különböző hatású, amit a térerősség felrajzolásakor veszünk figyelembe.

Az ábrán látható módon felvéve x-y koordináta rendszert az alábbiakat kapjuk az eredő vektor kiszámítására:



$$E_x = E_{1x} + E_{2x} = 18,4 \frac{kN}{C} \cdot \cos 60^\circ + 18,4 \frac{kN}{C} \cdot \cos 60^\circ = 18,4 \frac{kN}{C}$$

$$E_y = E_{1y} + E_{2y} = 18,4 \frac{kN}{C} \cdot \sin 60^\circ - 18,4 \frac{kN}{C} \cdot \sin 60^\circ = 0 \frac{kN}{C}$$

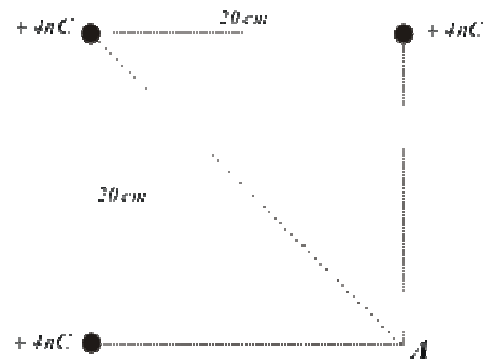
$$\text{Tehát az eredő térerősség: } E_e = 18,4 \frac{kN}{C}$$

26.17 Három $+4nC$ nagyságú pontszerűnek tekinthető töltést, egy $20cm$ oldalhosszúságú négyzet három csúcsába helyezünk el. Határozza meg a potenciál értékét a négyszög negyedik csúcsában!

Megoldás:

$$U_A = k \left(\frac{q_1}{r} + \frac{q_2}{r \cdot \sqrt{2}} + \frac{q_3}{r} \right)$$

$$U_A = 9 \cdot 10^9 \cdot \left(\frac{4 \cdot 10^{-9} C}{0,2m} + \frac{4 \cdot 10^{-9} C}{0,283m} + \frac{4 \cdot 10^{-9} C}{0,2m} \right) = 233V$$



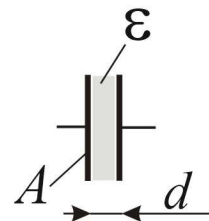
2.1 Az adatok alapján, kérdés a kondenzátor kapacitása, feszültsége, és a tárolt töltés mennyisége.

$$A = 0,1m^2$$

$$d = 10mm = 10 \cdot 10^{-3}m$$

$$E = 40.000 \frac{V}{m} \text{ (elektromos térerősség)}$$

$$\epsilon = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot 9 \cdot 10^9} \frac{As}{Vm} \text{ (permittivitás szigetelő anyagban)}$$



Megoldás:

$$\text{Kapacitás: } C = \epsilon \frac{A}{d} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot 9 \cdot 10^9} \frac{As}{Vm} \cdot \frac{0,1m^2}{10 \cdot 10^{-3}m} = 88,4 pF$$

$$\text{Feszültsége: } U = E \cdot d = 40.000 \cdot 10 \cdot 10^{-3} = 400V \quad u = U_{max} \cdot \sin \omega t$$

$$\text{Tárolt töltés: } Q = C \cdot U = 88,4 \cdot 10^{-12} F \cdot 400V = 35,4 \cdot 10^{-9} = 35,4nC$$

- 2.2 Egy elektron az ábrán látható kondenzátor lemez „A” oldaláról zérus kezdősebességgel indul. Mekkora lesz az elektronra ható erő? Mekkora az elektron gyorsulása? Mekkora az elektron végsebessége? Mennyi idő alatt éri el a „B” lemezt? Mekkora az elektron sebessége félúton? Ha a lemezek $d = 5\text{mm}$ távolságban vannak, és a rákapcsolt feszültség $U = 200\text{V}$.

Megoldás:

$$F = q \cdot E = q \cdot \frac{U}{d} = 1,6 \cdot 10^{-19} \frac{200\text{V}}{5 \cdot 10^{-3}\text{m}} = 6,4 \cdot 10^{-15}\text{N}$$

$$a = \frac{F}{m} = \frac{6,4 \cdot 10^{-15}\text{N}}{9,11 \cdot 10^{-31}\text{kg}} = 7,03 \cdot 10^{15} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

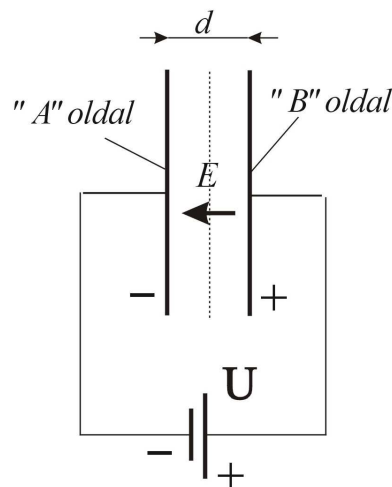
$$W = q \cdot U = \frac{1}{2} m \cdot v_{\text{vég}}^2 \Rightarrow v_{\text{vég}} = \sqrt{\frac{2 \cdot q \cdot U}{m}}$$

$$v_{\text{vég}} = \sqrt{\frac{2 \cdot q \cdot U}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}\text{C} \cdot 200\text{V}}{9,11 \cdot 10^{-31}\text{kg}}} = 8381675 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$t = \frac{v}{a} = \frac{8381675 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{7,03 \cdot 10^{15} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 1,19 \cdot 10^{-9}\text{s}$$

$$E = \frac{U}{d} \Rightarrow U = E \cdot d$$

$$v_{\text{félút}} = \sqrt{\frac{2 \cdot q \cdot U_{\text{félút}}}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot q \cdot \frac{E \cdot d}{2}}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot q \cdot U}{m \cdot 2}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}\text{C} \cdot 200\text{V}}{9,11 \cdot 10^{-31}\text{kg} \cdot 2}} = 5926739 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$



- 1.2 A televízió képernyő és az elektront kibocsátó katód közötti távolság 200mm . Mennyi idő alatt éri el a katódról zérus sebességgel induló elektron az anódot? Mekkora az elektron energiája a becsapódás pillanatában?

$$d = 200\text{mm} = 0,2\text{m}$$

$$U_{\text{Anód}} = 2000\text{V}$$

Megoldás:

$$\text{A Katód anód közti télerősség: } E = \frac{U_{\text{Anód}}}{d} = \frac{2000\text{V}}{0,2\text{m}} = 10 \cdot 10^3 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

$$\text{Az elektronra ható erő: } F = q \cdot \frac{U}{d} = q \cdot E = 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10 \cdot 10^3 \frac{\text{V}}{\text{m}} = 1,6 \cdot 10^{-15}\text{N}$$

$$\text{A gyorsulás: } a = \frac{F}{m} = \frac{1,6 \cdot 10^{-15}\text{N}}{9,11 \cdot 10^{-31}\text{kg}} = 1,76 \cdot 10^{15} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Az elektron által befutott út:

$$d = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2 \cdot d}{a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,2}{1,76 \cdot 10^{15}}} = 15,1\text{ns}$$

$$\text{A becsapódás energiája: } W = q \cdot U = 1,6 \cdot 10^{-19}\text{C} \cdot 2000\text{V} = 3,2 \cdot 10^{-16}\text{Ws}$$

$$\text{Az energia a klasszikus mozgásegyenletek alapján is felírható: } W = \frac{1}{2} m \cdot v_{\text{vég}}^2$$

$$\text{A végsebesség: } v_{\text{vég}} = \sqrt{\frac{2 \cdot q \cdot U}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 2000}{9,11 \cdot 10^{-31}}} = 26,51 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$W = \frac{1}{2} m \cdot v_{\text{vég}}^2 = \frac{9,11 \cdot 10^{-31} \cdot 26,51 \cdot 10^6}{2} = 3,2 \cdot 10^{-16}\text{Ws}$$

1.4 Az ábrán látható E elektromos térben egy negatív töltésű elektron, amely amikor a pozitív lemezoldaltól s távolságra van, az erőterrel megegyező irányú és értelmű v_y sebességgel rendelkezik. Az elektromos erőter $F = q \cdot E$ ereje ezt a mozgást fékezni fogja olyan mértékben, hogy a vizsgált ponttól h távolságra nullára csökken, majd visszafordulva, sebességét növelve becsapódik a + lemezbe.

Mekkora fékező erő hat az elektronra? Mennyire távolodik el az elektron a pozitív lemeztől ($s+h$)? A visszafordulás után mennyi idő múlva éri el a pozitív lemezt?

Mekkora az elektron energiája a becsapódás pillanatában?

$$q_e = -1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

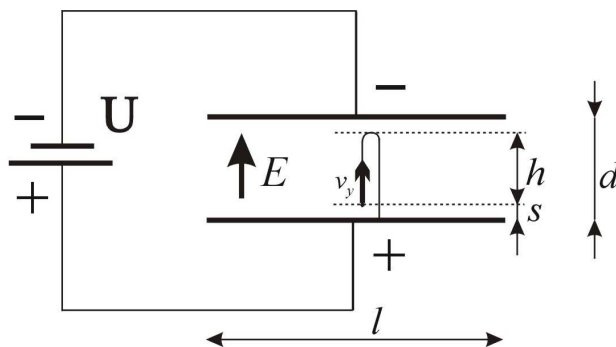
$$m_e = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$$

$$s = 1 \text{ mm} = 10^{-3} \text{ m}$$

$$d = 7 \text{ mm} = 7 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$v_y = 4500 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

$$U = 100 \text{ V}$$



Megoldás:

$$F = q \cdot E = q \cdot \frac{U}{d} = -1,6 \cdot 10^{-19} \frac{100 \text{ V}}{7 \cdot 10^{-3} \text{ m}} = -2,3 \cdot 10^{-15} \text{ N}$$

Az elektron mozgásegyenlete: $v = v_y + a \cdot t$

$$a = \frac{F}{m} = \frac{-2,3 \cdot 10^{-15}}{9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}} = -2,509 \cdot 10^{15} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Az elektron addig távolodik a pozitív lemeztől, amíg a sebessége nulla nem lesz:

$$0 = 4500.000 - 2,509 \cdot 10^{15} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot t$$

$$t = \frac{4500.000 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2,509 \cdot 10^{15} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 1,794 \cdot 10^{-9} \text{ s} = 1,794 \text{ ns}$$

$$h = v_y \cdot t - \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 = 4500.000 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 1,794 \cdot 10^{-9} \text{ s} - \frac{1}{2} \cdot 2,509 \cdot 10^{15} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (1,794 \cdot 10^{-9})^2 \text{ s}^2 = 4,034 \text{ mm}$$

Amikor az elektron megfordul, sebessége nulla, távolsága a lemeztől ($s+h$):

$$s + h = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 = s + h = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \Rightarrow$$

$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot (s + h)}{a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot (1 + 4,034) \cdot 10^{-3}}{2,509 \cdot 10^{15} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} = 2 \cdot 10^{-9} \text{ s} = 2 \text{ ns}$$

$$v = a \cdot t = 2,509 \cdot 10^{15} \cdot 2 \cdot 10^{-9} = 5025963 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$W = \frac{1}{2} m \cdot v^2 = \frac{9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot (5,026 \cdot 10^6)^2 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}{2} = 1,15 \cdot 10^{-17} \text{ Js}$$

Más módon kiszámítva:

$$W = q \cdot E \cdot (h + s) = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 14285,7 \frac{\text{V}}{\text{m}} \cdot 5,034 \cdot 10^{-3} = 1,15 \cdot 10^{-17} \text{ Js}$$

Az energia a ($W = q \cdot U$) képlettel itt nem számítható mert az elektron által megtett út nem egyenlő a lemezek távolságával.

- 1.5 Egy elektron $v = 4500 \frac{\text{km}}{\text{s}}$ sebességgel és $\alpha = 11,36^\circ$ -os szöggel lép be egy síkkondenzátor (homogénnek tekintett) lemezei közé pont a középvonalat elérve. Mekkora feszültséget kell a lemezekre kapcsolni, ha azt akarjuk, hogy az elektron a középvonaltól vízszintes irányban lépjen ki a lemezek közül?

$$q_e = -1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

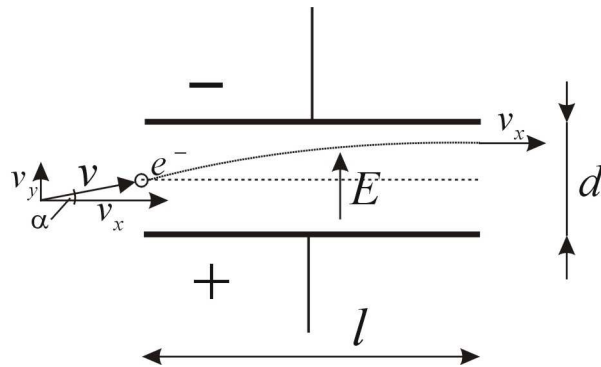
$$m_e = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$$

$$l = 20 \text{ mm} = 20 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$d = 6 \text{ mm} = 6 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$v = 4500 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

$$\alpha = 11,36^\circ$$



Megoldás:

Kiszámítjuk v_x értékét. Ebből meghatározzuk, hogy az elektron mennyi ideig tartózkodik a lemezek között:

$$t = \frac{l}{v_x} = \frac{20 \cdot 10^{-3} \text{ m}}{4500 \cdot 10^3 \cdot \cos(11,36^\circ) \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 4,53 \cdot 10^{-9} \text{ s}$$

Ennyi idő alatt kell az y irányú komponensnek 0-ra csökkennie:

$$v_{\text{kilépő } y} = v_y - a \cdot t = 0$$

$$a = \frac{v_y}{t} = \frac{4500 \cdot 10^3 \cdot \sin(11,36^\circ) \frac{\text{m}}{\text{s}}}{4,53 \cdot 10^{-9} \text{ s}} = 1,948 \cdot 10^{14} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Ezek után az energia megmaradást felírva:

$$F = m \cdot a = q \cdot E = q \cdot \frac{U}{d} \Rightarrow m \cdot a = q \cdot \frac{U}{d}$$

$$U = \frac{m \cdot a \cdot d}{q} = \frac{9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot 1,948 \cdot 10^{14} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 6 \cdot 10^{-3} \text{ m}}{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}} = 6,65 \text{ V}$$

- 1.6. példa. Egy elektron $v = 1000 \frac{\text{km}}{\text{s}}$ sebességgel és $\alpha = 20^\circ$ -os szöggel lép be a párhuzamos, egymástól $d=10\text{mm}$ távolságra elhelyezett, $l = 20\text{mm}$ hosszúságú lemez pár közé. A lemez párra kapcsolt feszültség $U = 1\text{V}$, az elektron tömege $m = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$.

Mekkora az elektromos erőter a lemezek között?

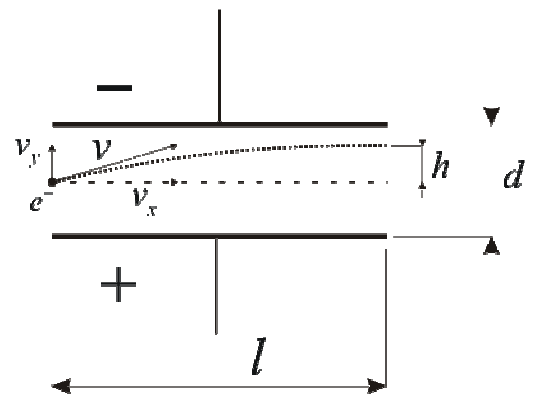
Mekkora erő hat az elektronra?

Mennyi ideig tartózkodik az elektron a lemezek között?

Mekkora az elektron gyorsulása?

A középvonaltól milyen „h” távolságra lép ki az elektron a lemezek közül?

Mi történik, ha megfordítjuk a lemezek polaritását?



Megoldás:

Az elektromos térerősség a lemezek között:

$$E = \frac{U}{d} = \frac{1\text{V}}{10 \cdot 10^{-3} \text{ m}} = 100 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

Az elektronra ható erő:

$$F = q \cdot E = 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 100 \frac{V}{m} = 1,6 \cdot 10^{-17} N$$

A lemez párok között eltöltött idő:

$$t = \frac{l}{v_x} = \frac{l}{v \cdot \cos(\alpha)} = \frac{20 \cdot 10^{-3} m}{1000 \cdot 10^3 \frac{m}{s} \cdot \cos(20^\circ)} = 2,13 \cdot 10^{-8} s = 21,3 ns$$

Az elektron gyorsulása:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{1,6 \cdot 10^{-17} N}{9,11 \cdot 10^{-31} kg} = 1,76 \cdot 10^{13} \frac{m}{s^2}$$

Kilépés távolsága a középvonaltól:

$$v_y = v \cdot \sin(\alpha) = 1000 \cdot 10^3 \frac{m}{s} \cdot \sin(20^\circ) = 34020 \frac{m}{s}$$

$$h = v_y \cdot t - \frac{a}{2} \cdot t^2 = 34020 \frac{m}{s} \cdot (2,13 \cdot 10^{-8} s) - \frac{1,76 \cdot 10^{13} \frac{m}{s^2}}{2} (2,13 \cdot 10^{-8})^2 s^2 =$$

$$= 3,29 \cdot 10^{-3} m = 3,3 mm$$

Ha megfordítjuk a lemez párokon a feszültséget, akkor a negatív töltésű elektront vonzani (gyorsítani) fogja az elektromos tér. Így kilépés helyett a falba fog csapódni, ezt az időt alábbiak szerint lehet számítani:

$$v_y \cdot t + \frac{a}{2} \cdot t^2 = 5 mm \Rightarrow 34020 \frac{m}{s} \cdot t + \frac{1,76 \cdot 10^{13} \frac{m}{s^2}}{2} \cdot t^2 = 5 \cdot 10^{-3} m$$

$$\frac{1,76 \cdot 10^{13} \frac{m}{s^2}}{2} \cdot t^2 + 34020 \frac{m}{s} \cdot t - 5 \cdot 10^{-3} m = 0$$

Másodfokú egyenlet megoldó képlete: $a \cdot t^2 + b \cdot t + c = 0 \quad t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$$t_{1,2} = \frac{-34020 \frac{m}{s} \pm \sqrt{34020^2 \frac{m^2}{s^2} - 4 \cdot \frac{1,76 \cdot 10^{13} \frac{m}{s^2}}{2} \cdot (-5 \cdot 10^{-3} m)}}{2 \cdot \frac{1,76 \cdot 10^{13} \frac{m}{s^2}}{2}} \Rightarrow 11,3 ns$$

$$l_{\text{becsapódás}} = v_x \cdot t_{1,2} = 1000 \cdot 10^3 \frac{m}{s} \cdot \cos(20^\circ) \cdot 11,3 \cdot 10^{-9} s = 10,64 mm$$

27.5 Hány elektron halad keresztül másodpercenként egy olyan huzal keresztmetszetén, amelyben 0,7A áram folyik?

Megoldás: $I = 0,7 A = 0,7 \frac{C}{s}$

Ezt az értéket elosztva az elektron töltésének nagyságával, megkapjuk az egy másodperc alatt áthaladó elektronok számát.

$$N = \frac{0,7 \frac{C}{s}}{1,6 \cdot 10^{-19} C} = 4,4 \cdot 10^{18} \frac{db}{s}$$

27.6 Egy vezetőben 7,5 A erősségű áram folyt 45 s-on keresztül.

Mennyi a töltés mennyisége?

Hány elektron haladt át a vezető egy adott keresztmetszetén ennyi idő alatt?

Megoldás: $q = I \cdot t = 7,5 \text{ A} \cdot 45 \text{ s} = 337,5 \text{ C} = 337,5 \text{ As}$

$$N = \frac{q}{e} = \frac{337,5 \text{ C}}{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}} = 2,1 \cdot 10^{21} \text{ db}$$

27.7 Egy huzal adott keresztmetszetén 45 perc alatt 0,6 mol elektron halad keresztül.

Mennyi töltés halad át a vezetőkön összesen?

Mekkora volt az áramerősség?

Megoldás:

Elsőként 0,6 mol-ban kell meghatároznunk az elektronok számát:

$$N = 0,6 \text{ mol} \cdot 6,02 \cdot 10^{23} \frac{\text{elektron}}{\text{mol}} = 3,6 \cdot 10^{23} \text{ elektron}$$

$$q = N \cdot e = 3,6 \cdot 10^{23} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} = 5,78 \cdot 10^4 \text{ C}$$

$$\text{A percet SI mértékegységbe átváltva: } t = 45 \text{ perc} \cdot 60 \frac{\text{s}}{\text{perc}} = 27 \cdot 10^3 \text{ s}$$

$$I = \frac{q}{t} = \frac{5,78 \cdot 10^4 \text{ C}}{27 \cdot 10^3 \text{ s}} = 21,4 \text{ A}$$

27.8 Egy TV készülékben található elektronágyú elektronnyalábot lő ki. A nyaláb áramerőssége $10 \mu\text{A}$.

Hány elektron éri el a TV képernyőjét másodpercenként?

Mennyi töltés csapódik a képernyőbe percenként?

Megoldás:

Legyen n_e a másodpercenként becsapódó elektronok száma!

$$n_e = \frac{I}{e} = \frac{10 \cdot 10^{-6} \frac{\text{C}}{\text{s}}}{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}} = 6,3 \cdot 10^{13} \frac{\text{elektron}}{\text{s}}$$

$$\text{A képernyőt elérő } Q \text{ töltés: } |Q| = I \cdot t = 10 \cdot 10^{-6} \frac{\text{C}}{\text{s}} \cdot 60 \text{ s} = 600 \mu\text{C}$$

Mivel elektronról van szó az egzakt végeredmény: $Q = -600 \mu\text{C}$

27.10 Egy tipikus vörösréz huzalban $2 \cdot 10^{21}$ db szabad elektron található cm-enként. Tételezzük

fel, hogy az elektronok, a huzalban $0,05 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$ sebességgel (driftsebesség) haladnak.

Hány elektron halad keresztül egy másodperc alatt a huzal egy adott keresztmetszetén?

Mekkora áramerősség folyik a vezetőkben?

Megoldás:

$$\text{elektronok_száma_másodpercenként} = \frac{\text{szám}}{\text{hossz}} \cdot \text{sebesség} = 2 \cdot 10^{21} \frac{1}{\text{cm}} \cdot 0,05 \frac{\text{cm}}{\text{s}} = 10^{20} \frac{1}{\text{s}}$$

$$I = Q \cdot e = 10^{20} \frac{1}{\text{s}} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} = 16 \text{ A}$$

27.13 Határozzuk meg annak a vezetőnek a két vége közötti feszültséget, amelynek ellenállása 5Ω , és percenként $720C$ töltés halad keresztül rajta!

Megoldás:

$$\text{Elsőként kiszámítjuk a vezetőben folyó áram nagyságát: } I = \frac{Q}{t} = \frac{720C}{60s} = 12A$$

$$\text{Ezek után az Ohm törvény alapján felírhatjuk: } U = I \cdot R = 12A \cdot 5\Omega = 60V$$

27.15 Egy $0,2cm$ átmérőjű fémpálcában $3A$ erősségű áram folyik. A pálcát $1,5m$ hosszú, a két vége között a feszültség $0,4V$.

Határozza meg az áramsűrűséget!

Mennyi a térerősség a pálcában?

Mekkora a pálcát fajlagos ellenállása, és milyen anyagból készült?

Megoldás:

$$A = \frac{d^2 \cdot \pi}{4} = \frac{(0,2 \cdot 10^{-2})^2 \cdot \pi}{4} = 3,14 \cdot 10^{-6} m^2$$

$$\text{Áramsűrűség: } J = \frac{I}{A} = \frac{3A}{\pi \cdot 10^{-6} m^2} = 9,55 \cdot 10^5 \frac{A}{m^2}$$

$$E = \frac{U}{d} = \frac{0,4V}{1,5m} = 0,267 \frac{V}{m}$$

$$\boxed{\mu\Omega m = \frac{\Omega mm^2}{m}}$$

$$\text{Mivel ismert hogy: } J = \frac{E}{\rho} \quad \rho = \frac{E}{J} = \frac{0,267 \frac{V}{m}}{9,55 \cdot 10^5 \frac{A}{m^2}} = 0,02795 \cdot 10^{-6} \Omega m = 2,8 \cdot 10^{-8} \frac{\Omega mm^2}{m}$$

A függvény táblázat alapján: $\rho = 0,0281 \frac{\Omega mm^2}{m}$ alumínium a pálcát anyaga.

27.17 Egy $A = 3mm^2$ keresztmetszetű vörösrézvezetékön $5A$ erősségű áram folyik.

Határozza meg az elektronok haladási sebességének nagyságát (driftsebesség) a vezetékön belül.

Megoldás:

$$\text{Áramsűrűség: } J = \frac{I}{A} = \frac{5A}{3 \cdot 10^{-6} m^2} = 1,67 \cdot 10^6 \frac{A}{m^2}$$

$$\text{Ismerve a réz adatait: } M = 63,5 \frac{kg}{kmol}, \text{ és a } \rho = 8920 \frac{kg}{m^3}$$

$$n = \frac{6,02 \cdot 10^{26} \frac{atom}{kmol} \cdot 8920 \frac{kg}{m^3}}{63,5 \frac{kg}{kmol}} = 8,5 \cdot 10^{28} \frac{atom}{m^3}$$

$$\text{A driftsebesség: } v = \frac{J}{n \cdot e} = \frac{1,67 \cdot 10^6 \frac{A}{m^2}}{n \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} C} = \frac{1}{n} (1,04 \cdot 10^{25} \frac{1}{m^2 s}) = 1,2 \cdot 10^{-4} \frac{m}{s} = 0,12 \frac{mm}{s}$$

27.19 Számítsuk ki egy $180m$ hosszú ezüstvezeték ellenállását, ha a keresztmetszete $0,3mm^2$.

Feltéve, hogy a $T = 20^\circ C$ az ezüstvezeték fajlagos ellenállása $\rho = 1,65 \cdot 10^{-8} \Omega m$.

$$\text{Megoldás: Az ellenállást: } R = \rho \frac{L}{A} = 1,65 \cdot 10^{-8} \Omega m \cdot \frac{180m}{0,3 \cdot 10^{-6} m^2} = 9,9 \Omega$$

27.20 Milyen hosszú 1mm átmérőjű alumínium drótra van szükség ahhoz, hogy az ellenállása 4Ω legyen, ($T = 20^\circ\text{C}$ az alumínium fajlagos ellenállása $\rho = 2,61 \cdot 10^{-8} \Omega\text{m}$).

Megoldás:

A hosszúságot kell kifejezni az alábbi képletből: $R = \rho \frac{L}{A}$

$$L = \frac{A \cdot R}{\rho} = \frac{(0,5 \cdot 10^{-3} \text{m})^2 \cdot \pi \cdot 4\Omega}{2,61 \cdot 10^{-8} \Omega\text{m}} = 120,3\text{m}$$

27.21 Egy 20cm hosszú vörösréz cső belső átmérője $0,85\text{cm}$, külső átmérője $1,1\text{cm}$ Mekkora az ellenállása a két vége között? ($T = 20^\circ\text{C}$ a réz fajlagos ellenállása $\rho = 1,754 \cdot 10^{-8} \Omega\text{m}$).

Megoldás:

$$\text{A keresztmetszet nagysága: } \frac{\pi \cdot (1,1^2 - 0,85^2) \text{m}^2}{4 \cdot 10^4} = 3,83 \cdot 10^{-5} \text{m}^2$$

$$\text{Ezek után az ellenállás számítható: } R = \rho \frac{L}{A} = 1,754 \cdot 10^{-8} \Omega\text{m} \frac{0,2\text{m}}{3,83 \cdot 10^{-5} \text{m}^2} = 91,5 \mu\Omega$$

27.22 Egy $1,5\text{kg}$ tömegű vörösréz tömbből olyan drótot szeretnénk hengerelni, amelynek az ellenállása $t = 20^\circ\text{C}$ -on 250Ω . A réz sűrűsége $8,9 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$. Határozza meg, hogy milyen hosszú és milyen átmérőjűvé kell a tömböt hengerelni?

Megoldás:

$$\text{A térfogatból tudunk kiindulni: } m = \rho \cdot V \quad 1,5\text{kg} = \rho \cdot L \cdot A = 8,9 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot L \cdot A$$

$$L \cdot A = 0,168 \cdot 10^{-3} \text{m}^3$$

$$\text{A másik feltételt kihasználva felírhatjuk: } R = \rho \frac{L}{A} = 250\Omega = 1,754 \cdot 10^{-8} \Omega\text{m} \cdot \frac{L}{A}$$

$$L = 1,4253 \cdot 10^{10} \frac{1}{\text{m}} \cdot A \quad 1,4253 \cdot 10^{10} \frac{1}{\text{m}} \cdot A \cdot A = 0,168 \cdot 10^{-3} \text{m}^3$$

$$A = 0,1077 \text{mm}^2 \text{ innen a drót átmérője: } d = \sqrt{\frac{4 \cdot A}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 0,1077 \cdot 10^{-6} \text{m}^2}{3,1415}} = 0,37 \text{mm}$$

$$L = 1,4253 \cdot 10^{10} \frac{1}{\text{m}} \cdot A = 1,4253 \cdot 10^{10} \frac{1}{\text{m}} \cdot 0,1077 \cdot 10^{-6} \text{m}^2 = 1535,048\text{m} = 1,535\text{km}$$

27.23 Egy vörösrézdrót hossza 20m , átmérője $0,254\text{mm}$. ($T = 20^\circ\text{C}$ a réz fajlagos ellenállása $\rho = 1,754 \cdot 10^{-8} \Omega\text{m}$). Számítsuk ki az ellenállását!

Megoldás:

$$\text{Az adatok alapján felírhatjuk: } R = \rho \frac{L}{A} = 1,754 \cdot 10^{-8} \Omega\text{m} \cdot \frac{20\text{m}}{\pi \cdot 0,000127^2 \text{m}^2} = 6,8\Omega$$

27.25 Egy tekercs ellenállása $T = 20^\circ\text{C}$ hőmérsékleten 25Ω , $T = 35^\circ\text{C}$ hőmérsékleten $25,17\Omega$. Határozzuk meg az ellenállás hőmérsékleti tényezőjét!

Megoldás:

$$R = R_0[1 + \alpha(T - T_0)], \text{ vagy } \alpha = \frac{\Delta R}{R_0 \cdot \Delta T}$$

$$\text{Ahol } \Delta R = R - R_0 = 0,17\Omega \text{ és } \Delta T = T - T_0 = 15^\circ\text{C}$$

$$\text{Innen az ellenállás hőmérsékleti tényezője: } \alpha = \frac{\Delta R}{R_0 \cdot \Delta T} = \frac{0,17\Omega}{25\Omega \cdot 15^\circ\text{C}} = 4,5 \cdot 10^{-4} \frac{1}{^\circ\text{C}}$$

27.26 Egy 300m hosszú és 2mm átmérőjű fém drót ellenállása $T = 20^\circ\text{C}$ hőmérsékleten $1,6424\Omega$, $T = 150^\circ\text{C}$ hőmérsékleten $2,415\Omega$. Határozzuk meg α , R_0 , ρ_0 értékét, ahol a 0 index a $T = 0^\circ\text{C}$ -ot jelenti! Továbbá adja meg a $\rho_{20^\circ\text{C}}$ értékét is!

Megoldás:

$$R_{150^\circ\text{C}} = R_0[1 + \alpha(T - T_0)], \text{ vagyis}$$

$$R_{150^\circ\text{C}} = 2,415\Omega = R_0[1 + \alpha(150)], \quad R_{20^\circ\text{C}} = 1,6424\Omega = R_0[1 + \alpha(20)]$$

$$2,415\Omega = R_0 + R_0 \cdot \alpha \cdot 150$$

$$1,6424\Omega = R_0 + R_0 \cdot \alpha \cdot 20 \quad \text{szorozva 7,5-el és a két egyenletet kivonva egymásból.}$$

$$-9,903 = -6,5 \cdot R_0 \Rightarrow R_0 = 1,523538\Omega$$

$$\alpha = \frac{1,6424\Omega - 1,523538\Omega}{20 \cdot 1,523538\Omega} = 3,9 \cdot 10^{-3} \frac{1}{^\circ\text{C}}$$

$$R = \rho \frac{L}{A} \Rightarrow 1,5234\Omega = \rho_0 \frac{300\text{m}}{\frac{\pi \cdot (2 \cdot 10^{-3})^2 \text{m}^2}{4}} \quad \text{innen az eredmény: } \rho_0 = 1,596 \cdot 10^{-8} \Omega\text{m}$$

Így $\rho_{20^\circ\text{C}} = \rho_0[1 + \alpha(20)] = (1,596 \cdot 10^{-8})[1 + (3,9 \cdot 10^{-3})(20)] = 1,72 \cdot 10^{-8} \Omega\text{m}$ ami alapján a keresett fém vörösréz lesz.

27.29 Egy 75W -os wolframszálas lámpa üzemi ellenállása 190Ω , hideg ellenállása 15Ω .

Határozza meg a lámpa üzemi hőmérsékletét, ha az $\alpha = 4,5 \cdot 10^{-3} \frac{1}{^\circ\text{C}}$!

Megoldás:

Csak durva becslésre vállalkozhatunk ezen adatok ismeretében, hiszen ezen hőmérsékleti tartomány már túl széles ahhoz, hogy az α állandónak tekinthető legyen.

$$R = R_{20}[1 + \alpha \cdot \Delta T], \text{ vagy } \Delta T = \frac{R - R_{20}}{\alpha \cdot R_{20}}$$

$$\text{innen: } T - 20^\circ\text{C} = \frac{190\Omega - 15\Omega}{4,5 \cdot 10^{-3} \frac{1}{^\circ\text{C}} \cdot 15\Omega} = 2590^\circ\text{C}$$

27.30 Egy $220W$ -os terhelésen $0,958A$ áramerősség halad keresztül, ha $230V$ -os feszültségforrásról üzemeltetjük. A wolfram izzószál hőmérséklete ekkor $1800^{\circ}C$. Számítsa ki a szál üzemi ellenállását! Adja meg az ellenállás közelítő értékét $20^{\circ}C$ -on!

Megoldás:

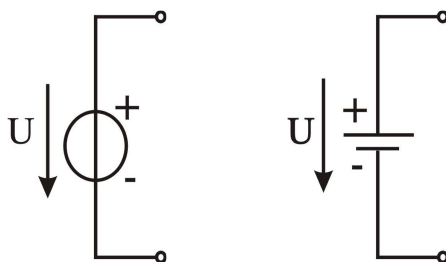
Csak durva becslésre vállalkozhatunk ezen adatok ismeretében, hiszen ezen hőmérsékleti tartomány már túl széles ahhoz, hogy az α állandónak tekinthető legyen.

Ohm törvény alapján: $U = I \cdot R \Rightarrow R = \frac{U}{I} = \frac{230V}{0,958A} = 240\Omega$

$$R = R_{20} [1 + \alpha \cdot \Delta T], \text{ tehát } 240\Omega = R_{20} \left[1 + 4,5 \cdot 10^{-3} \frac{1}{^{\circ}C} \cdot 1780^{\circ}C \right]$$

innen: $R_{20} = 26,6\Omega$

Feszültség forrás olyan eszköz, amely táplálja a rajta átfolyó áramkör áramát.



Ellenállások soros kapcsolása:



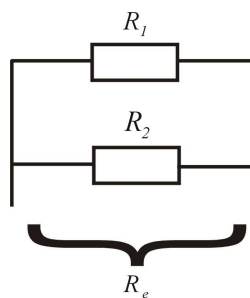
$$U = I \cdot R_1 + I \cdot R_2 + \dots + I \cdot R_n$$

$$I = \frac{U}{R_e} = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} + \dots + \frac{U}{R_n}$$

$$R_e = R_1 + R_2 + \dots + R_n$$

Két ellenállás párhuzamos kapcsolása:

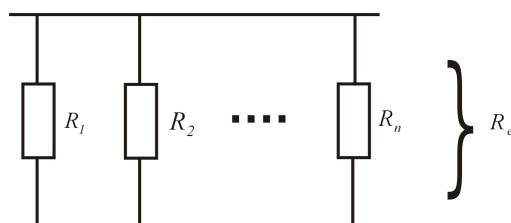
$$R_e = R_1 \times R_2 = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$



Ellenállások párhuzamos kapcsolása:

$$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}$$

$$R_e = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}}$$



Delta-csillag átalakítás:

$$R_A = \frac{R_{AB} \cdot R_{AC}}{R_{AB} + R_{AC} + R_{BC}}$$

Csillag-delta átalakítás:

$$R_{AB} = \frac{R_A \cdot R_B}{\frac{1}{\frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_B} + \frac{1}{R_C}}}$$

Induktivitások soros kapcsolása:



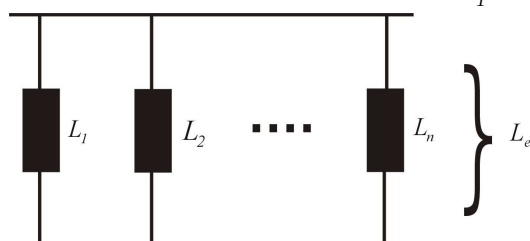
$$L_e = L_1 + L_2 + \dots + L_n$$

Két induktivitás párhuzamos kapcsolása:

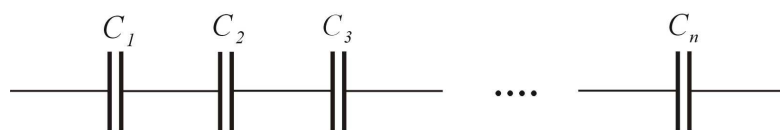
$$L_e = L_1 \times L_2 = \frac{L_1 \cdot L_2}{L_1 + L_2}$$

Induktivitás párhuzamos kapcsolása:

$$\frac{1}{L_e} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \dots + \frac{1}{L_n} \qquad L_e = \frac{1}{\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \dots + \frac{1}{L_n}}$$



Kondenzátorok soros kapcsolása:



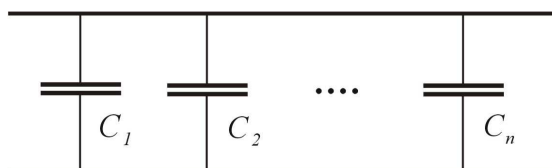
$$\frac{1}{C_e} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n} \qquad C_e = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n}}$$

Két kondenzátor párhuzamos kapcsolása:

$$C_e = C_1 \times C_2 = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2}$$

Kondenzátorok párhuzamos kapcsolása:

$$C_e = C_1 + C_2 + \dots + C_n$$



Ohm törvény: A vezető két végpontja között mérhető feszültség egyenesen arányos a rajta átfolyó árammal. Ezt az arányossági tényezőt a vezető ellenállásának nevezzük.

$$R = \frac{U}{I}$$

$$I = \frac{U}{R}$$

$$U = I \cdot R$$

Teljesítmény:

$$P = U \cdot I = I^2 \cdot R = \frac{U^2}{R} \quad (\text{ha } \cos \phi = 1)$$

$$P = \sqrt{S^2 - Q^2}$$

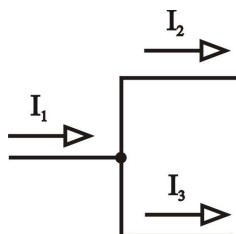
Teljesítmények felírása bármilyen esetre:

$$\bar{S} = \bar{U} \cdot \bar{I}^* \text{ [VA]}$$

$$Q = U \cdot I \cdot \sin \phi \text{ [VAr]}$$

$$P = U \cdot I \cdot \cos \phi \text{ [W]}$$

Kirchoff I. törvénye – csomóponti törvény: Adott t idő alatt egy csomópontba befolyó és onnan elfolyó áramok összege zérus.

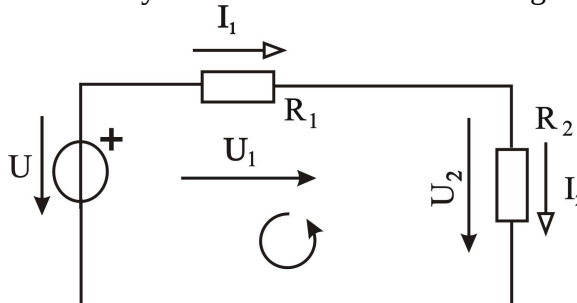


$$\sum_{k=1}^n I_k = 0$$

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0$$

$$I_1 = I_2 + I_3$$

Kirchoff II. törvénye – a hurok törvény: Zárt áramkörben a feszültség algebrai összege zérus.



$$\sum_{k=1}^n U_k = 0$$

$$U - U_2 - U_1 = 0$$

$$U_1 = I \cdot R_1$$

$$U_2 = I \cdot R_2$$

$$U = I \cdot R_1 + I \cdot R_2 = I(R_1 + R_2)$$

Feszültség osztó:

$$\frac{U_1}{R_1} = I \text{ bővítve } (R_1 + R_2) \text{-vel}$$

$$\frac{U_1}{R_1} (R_1 + R_2) = I(R_1 + R_2)$$

$$U_1(R_1 + R_2) = \underbrace{I(R_1 + R_2)}_U R_1$$

$$U_1 = U \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

Áram osztó:

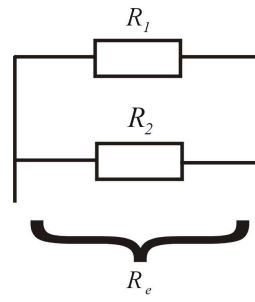
$$U = I \cdot (R_1 \times R_2)$$

$$U \cdot R_1 + U \cdot R_2 = I \cdot R_1 \cdot R_2 \text{ osztva } R_1 \text{-el}$$

$$\frac{U}{R_1} (R_1 + R_2) = R_2 \underbrace{\left(\frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} \right)}_I$$

$$I_1 R_1 + I_1 R_2 = I \cdot R_2$$

$$I_1 = I \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

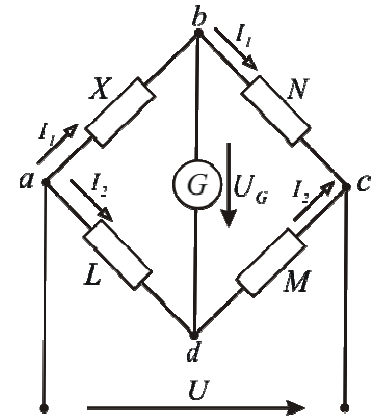


- 27.90 Egy Wheatstone-hídat használunk az X ellenállás megmérésére. Egyensúlyban, amikor a G galvanométeren zérus áram halad keresztül, az L , M és N ellenállások értékei rendre: 3Ω , 2Ω és 10Ω . Határozzuk meg az X értékét!

Megoldás:

A Wheatstone-híd olyan nagyon pontos ellenállásokat tartalmaz, amelyeknek értékeit úgy választjuk meg, hogy a G galvanométer zérus értéket mutasson. A felső ág árama legyen I_1 , az alsó ág árama legyen I_2 . Ezek felhasználásával $I_1 \cdot X = I_2 \cdot L$ és $I_1 \cdot N = I_2 \cdot M$ két egyenletet felírhatjuk. Majd az első a másodikkal osztva megkapjuk:

$$X = \frac{L}{M} \cdot N = \frac{3\Omega}{2\Omega} \cdot 10\Omega = 15\Omega$$

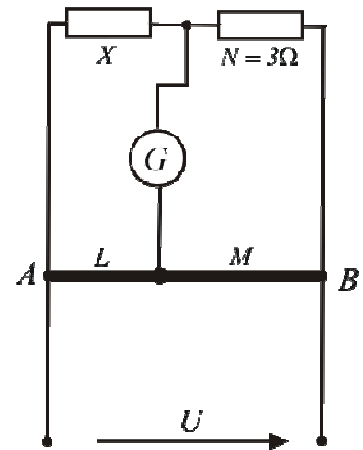


- 27.91 Egy Csuszkás Wheatstone-hídban lévő G galvanométer nem jelez áramot, ha a csuszka az AB egyenletes keresztmetszetű huzalt $40\text{cm} / 60\text{cm}$ az ábrán látható módon osztja ketté. Határozzuk meg az X ellenállás értékét!

Megoldás:

Könnyű belátni hogy ez a híd teljesen hasonló az előző példában szereplőhöz. Így ugyanazokat a jelöléseket használva felírhatjuk:

$$\frac{X}{3\Omega} = \frac{L}{M} = \frac{40\text{cm}}{60\text{cm}} \text{ innen kifejezve X-et: } X = 2\Omega$$



- 27.96 $0,5\text{A}$ amper áramerősség 200Ω -os ellenálláson halad keresztül. Mekkora a teljesítményvesztés az ellenálláson?

Megoldás:

Egyenáramú körök esetén igaz: $\text{teljesítmény} = P = U \cdot I = I^2 \cdot R = 0,5^2 \cdot 200\Omega = 50\text{W}$

Ez lesz a teljesítményvesztés. Ebben az esetben minden másodpercben 50J energia elvész.

Másképpen megfogalmazva minden másodpercben $\frac{50}{4,184} = 11,95\text{cal}$ hő keletkezik.

- 27.97 Egy 230V , 90W -ra tervezett égőt 220V -os feszültségforrásról működtetünk. Határozza meg az égő ellenállását, és az égőn átfolyó áram erősségét! Mekkora teljesítményt ad így le az izzó?

Megoldás:

Megállapíthatjuk, hogy a névlegestől kisebb feszültség esetén nem fogja leadni az izzó a névleges (elvárt) teljesítményt.

$$P = U \cdot I = I^2 \cdot R = \frac{U^2}{R} \qquad R = \frac{U^2}{P} = \frac{230^2 V^2}{90W} = 587,7 \Omega$$

$$I = \frac{U}{R} = \frac{220V}{587,7 \Omega} = 0,3743 A$$

$$\text{Az izzó által leadott teljesítmény: } P = \frac{U^2}{R} = \frac{220^2 V^2}{587,7 \Omega} = 82,344W$$

$$P = \frac{U^2}{R} = \frac{220^2 V^2}{587,7 \Omega} = 82,344W$$

$$\frac{P_{90\%}}{P_{100\%}} = \frac{82,344W}{90W} \cdot 100\% = 91,49\% \quad \text{Tehát a névleges teljesítményének csak a kilencvenegy}$$

százalékát adja le az ellenállás 5% feszültség csökkenés esetén.

- 27.99 Mekkora az ellenállása a 230V -os, 1000W -os kenyérpirítónak, és mekkora biztosítékkal kell biztosítani az áramkört?

Megoldás:

$$R = \frac{U^2}{P} = \frac{230^2 V^2}{1000W} = 52,9 \Omega \qquad I = \frac{U}{R} = \frac{230V}{52,9 \Omega} = 4,34 A$$

- 27.102 230V -os hálózati áramkörben egy 40W -os, egy 60W -os és egy 75W -os égőt üzemeltetünk. Határozzuk meg ezeknek a fényforrásoknak az eredő ellenállását!

Megoldás:

$$R = \frac{1}{\frac{1}{R_{40}} + \frac{1}{R_{60}} + \frac{1}{R_{75}}} = \frac{1}{\frac{1}{\frac{U^2}{P_{40}}} + \frac{1}{\frac{U^2}{P_{60}}} + \frac{1}{\frac{U^2}{P_{75}}}} = \frac{1}{\frac{P_{40}}{U^2} + \frac{P_{60}}{U^2} + \frac{P_{75}}{U^2}} = \frac{1}{\frac{40W}{230^2} + \frac{60W}{230^2} + \frac{75W}{230^2}} = 302,285 \Omega$$

$$R = \frac{U^2}{P_{40} + P_{60} + P_{75}} = \frac{230^2 V^2}{175W} = 302,285 \Omega$$

- 27.103 Mekkora teljesítmény disszipálódik egy 4Ω -os izzó esetén, ha 12V -os, telepről üzemeltetjük? Egy 2Ω -os izzó esetén, mekkora teljesítmény disszipálódik el? Melyik izzó a fényesebb?

Megoldás:

$$P_4 = \frac{U^2}{R} = \frac{12^2 V^2}{4 \Omega} = 36W \qquad P_2 = \frac{U^2}{R} = \frac{12^2 V^2}{2 \Omega} = 72W$$

Mivel az izzó fényereje az általa leadott teljesítménytől függ, ezért a 2Ω -os fog fényesebben világítani.

- 27.105 Egy izzólámpában két izzószál található, amelynek két vége és a középső közös pontja van kivezetve. Hányféle módon tudunk $230V$ -ot az izzószálakra rákapcsolni. Mekkora lehet a leadott teljesítménye az egyes esetekben, ha $R_1 = 529\Omega$, és $R_2 = 881\Omega$?
- b.,) Egy másik ugyan ilyen feszültségű három kivezetéses izzó két legkisebb leadott teljesítménye $150W$, $100W$. Mekkora a két izzószál ellenállása ebben az égőben?

Megoldás:

$$\text{Az ab esetben: } P_1 = \frac{U^2}{R_1} = \frac{230^2 V^2}{529\Omega} = 100W$$

$$\text{A bc esetben: } P_2 = \frac{U^2}{R_2} = \frac{230^2 V^2}{881\Omega} = 60,04W$$

$$\text{Az ac esetben: } P_3 = \frac{U^2}{R_1 + R_2} = \frac{230^2 V^2}{529\Omega + 881\Omega} = 37,5W$$

A két izzószálat párhuzamosan kapcsolva: $P_4 = P_1 + P_2 = 160W$

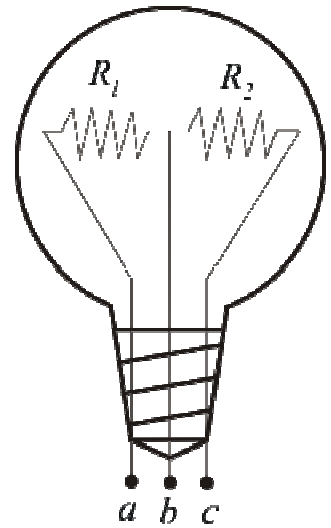
b.,)

A legkisebb ellenálláson a legnagyobb a teljesítmény:

$$R_2 = \frac{U^2}{P_2} = \frac{230^2 V^2}{150W} = 352,6\Omega$$

$$R_1 + R_2 = \frac{U^2}{P_3} = \frac{230^2 V^2}{100W} = 529\Omega = 352,6\Omega + 176,3\Omega$$

$$R_1 = 529\Omega - 352,6\Omega = 176,3\Omega$$



- 27.106 Tizenkét karácsonyfa égőt párhuzamosan kapcsolunk. Az égőket $230V$ -ról üzemeltetjük, és így mindegyik $10W$ teljesítményt ad le.
- Mekkora az egyes égők ellenállása?
- Mekkora a teljes égősor eredő ellenállása?
- Mekkora az égősor összes teljesítménye?
- Mekkora az áramerősség az a, b, c, d pontokban?
- b.,) Az égők soros kapcsolása esetén is válaszolja meg az előző négy kérdést!

Megoldás:

$$\text{Minden égő azonos ellenállású: } R = \frac{U^2}{P} = \frac{230^2 V^2}{10W} = 5290\Omega$$

$$\text{A teljes égősor ellenállása: } R_e = \frac{1}{12 \cdot \frac{1}{R}} = \frac{R}{12} = 440,83\Omega$$

$$\text{Összes teljesítmény: } P_e = \frac{U^2}{R_e} = \frac{230^2 V^2}{440,83\Omega} = 120W \text{ vagy}$$

$$P_e = 12 \cdot P = 12 \cdot 10W = 120W$$

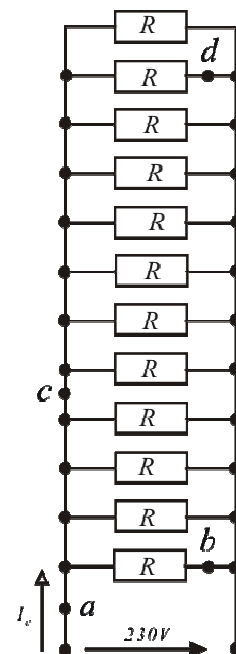
$$I_a = \frac{U}{R_e} = \frac{230V}{440,83\Omega} = 0,5217A, \quad I_b = \frac{U}{R} = \frac{230V}{5290\Omega} = 43,47mA,$$

$$I_c = I_a - 4I_b = 0,3477A, \quad I_d = I_b = 43,47mA$$

b.,)

Minden égő azonos ellenállású: $R = 5290\Omega$

A teljes égősor ellenállása: $R_e = 12 \cdot R = 63,480k\Omega$

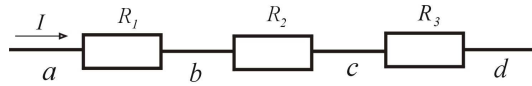


$$\text{Összes teljesítmény: } P_e = \frac{U^2}{R_e} = \frac{230^2 V^2}{63480 \Omega} = 0,83 W$$

$$I_e = \frac{U}{R_e} = \frac{230 V}{623480 \Omega} = 0,003623 A = 3,623 mA,$$

Soros kapcsolás esetén: $I_e = I_a = I_b = I_c = I_d$

27.31 Az R_1 , R_2 , R_3 ellenállásokat az alábbi ábra alapján elsőként sorosan majd párhuzamosan kötjük. Adja meg mindkét esetben az eredő ellenállásra vonatkozó formulát!



$$U_{ad} = U_{ab} + U_{bc} + U_{cd} = I \cdot R_1 + I \cdot R_2 + I \cdot R_3$$

mivel az I áramerősség ugyanaz minden ellenállásra vonatkozóan. I -vel osztva:

$$\frac{U_{ad}}{I} = R_1 + R_2 + R_3 \text{ vagy } R_e = R_1 + R_2 + R_3,$$

ugyanis $\frac{U_{ad}}{I}$ definíció szerint a kapcsolás R_e eredő ellenállása.

A második esetben: A potenciálkülönbség mindhárom ellenálláson azonos, így

$$I_1 = \frac{U_{ab}}{R_1}, I_2 = \frac{U_{ab}}{R_2}, I_3 = \frac{U_{ab}}{R_3}$$

Mivel a főág áramerőssége a mellékágak összegeként kapható meg, így

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{U_{ab}}{R_1} + \frac{U_{ab}}{R_2} + \frac{U_{ab}}{R_3}$$

ezt elosztva U_{ab} -vel.

$$\frac{I}{U_{ab}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}, \text{ vagy } \frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

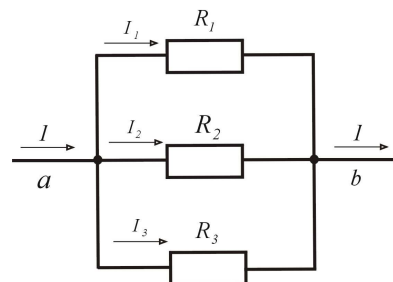
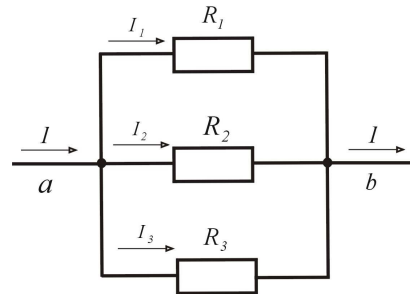
27.32 Határozza meg az eredő ellenállást az alábbi három párhuzamosan kapcsolt ellenállás esetén: $R_1 = 12 \Omega$, $R_2 = 12 \Omega$, $R_3 = 6 \Omega$!

Megoldás:

$$\text{Az eredő ellenállás } \frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

$$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{12 \Omega} + \frac{1}{12 \Omega} + \frac{1}{6 \Omega} = \frac{4}{12 \Omega}$$

$$\text{tehát } R_e = \frac{12 \Omega}{4} = 3 \Omega.$$



27.33 Mekkora az eredő ellenállás az ábrán látható kapcsolás **a** és **b** pontja között?

Megoldás:

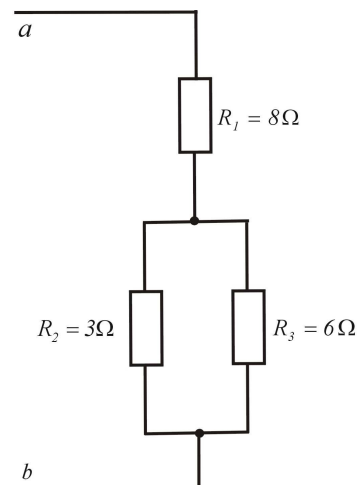
Először a két párhuzamosan kapcsolt ellenállás eredőjét

$$\text{számítjuk ki: } \frac{1}{R_{3,6}} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6\Omega}$$

$$\text{tehát } R_{3,6} = 2\Omega.$$

Ez sorba van kötve egy 8Ω -os ellenállással, így

$$R_{ab} = 2\Omega + 8\Omega = 10\Omega$$



27.34 Mekkora az eredő ellenállás az ábrán látható kapcsolás **a** és **b** pontja között?

Megoldás:

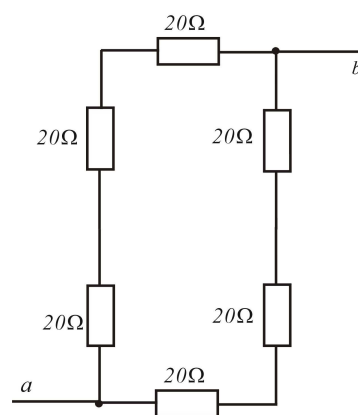
Először a három sorosan kapcsolt 20Ω -os eredőjét számítjuk ki

$$R_{abl} = 20\Omega + 20\Omega + 20\Omega = 60\Omega$$

Ebből 2 egyforma van amik párhuzamosan helyezkednek el. E kettő eredője:

$$\frac{1}{R_{ab}} = \frac{1}{60} + \frac{1}{60} = \frac{1}{30\Omega}$$

$$\text{azaz: } R_{ab} = 30\Omega$$



27.40 Határozza meg az ábrán látható elrendezés eredőjét az **a** és **b** pontok között!

Megoldás:

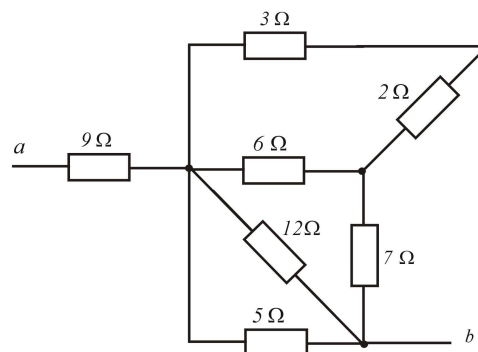
Jól látható, hogy a 3Ω -os és a 2Ω -os ellenállás sorba van kapcsolva, eredőjük 5Ω . Ez párhuzamosan kapcsolódik a 6Ω -os ellenállással, ami legyen R_1 .

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{5\Omega} + \frac{1}{6\Omega} = 0,369 \frac{1}{\Omega} \text{ azaz } R_1 = 2,73\Omega$$

Észrevehetjük, hogy a 12Ω -os és a 5Ω -os ellenállások párhuzamosan vannak kötve, ezen felül az R_1 és a 7Ω -os eredője is párhuzamosan van kötve, tehát eredőjük számítható:

$$\frac{1}{R_2} = \frac{1}{5\Omega} + \frac{1}{12\Omega} + \frac{1}{9,73\Omega} = 0,386 \frac{1}{\Omega} \text{ azaz } R_2 = 2,6\Omega$$

Ezzel sorba van kötve a 9Ω -os ellenállás, tehát a kapcsolás eredője $R_e = 11,6\Omega$



27.41 Az ábrán látható telep feszültsége $12V$, az ellenállások pedig $R_1 = 50\Omega$ és $R_2 = 150\Omega$.

a., Mekkora a kör eredő ellenállása?

b., Mekkora az I_1 , I_2 , I áramerősség?

Megoldás:

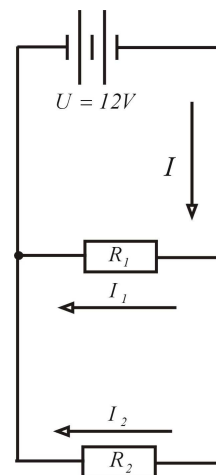
A párhuzamos kapcsolás miatt a kör eredője:

$$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{50\Omega} + \frac{1}{150\Omega} = \frac{4}{150\Omega} \text{ azaz: } R_e = 37,5\Omega$$

b., A kör két ágára Ohm törvény alapján számítható.

$$I_1 = \frac{U}{R_1} = \frac{12V}{50\Omega} = 0,24A, \quad I_2 = \frac{U}{R_2} = \frac{12V}{150\Omega} = 0,08A$$

A kör eredő árama az I_1 -es és az I_2 -es áramok összegeként számítható: $I = I_1 + I_2 = 0,32A$.



$$\text{Ellenőrzés: } I = \frac{U}{R_e} = \frac{12V}{37,5\Omega} = 0,32A$$

27.43 Az ábrán látható három ellenállás értéke $R_1 = 25\Omega$, $R_2 = 50\Omega$, $R_3 = 100\Omega$.

a., Mekkora az eredő ellenállás?

b., Mekkora I_1 , I_2 , I_3 értéke, ha a telep feszültsége $12V$?

Megoldás:

Először a párhuzamosan kötött R_2 , R_3 eredőjét érdemes meghatározni:

$$\frac{1}{R_{23}} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{1}{50\Omega} + \frac{1}{100\Omega} = \frac{3}{100\Omega} \text{ azaz: } R_{23} = 33,3\Omega$$

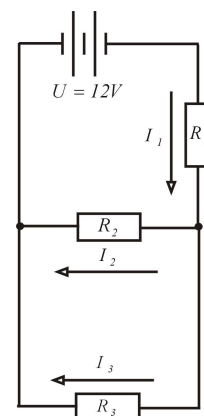
Mivel R_{23} sorosan van kapcsolva R_1 -el ezért a kör ellenállása a kettőjük soros eredője lesz: $R_e = R_{23} + R_1 = 33,3\Omega + 25\Omega = 58,3\Omega$

b., A kör eredő árama az I_1 -es áram.

$$I_1 = \frac{U}{R_e} = \frac{12}{58,3\Omega} = 0,206A$$

Az R_2 és az R_3 ellenállásokra jutó feszültség: $U' = U - R_1 \cdot I_1 = 12V - 25\Omega \cdot 0,206A = 6,85V$.

$$\text{Így } I_2 = \frac{U'}{R_2} = \frac{6,85V}{50\Omega} = 0,137A, \quad I_3 = \frac{U'}{R_3} = \frac{6,85V}{100\Omega} = 0,0685A.$$



27.44 Az ábrán látható három ellenállás értéke $R_1 = 80\Omega$, $R_2 = 25\Omega$, $R_3 = 15\Omega$.

a., Mekkora az eredő ellenállás?

b., Mekkora I , I_2 értéke és a telep feszültsége, ha $I_1 = 0,3A$?

Megoldás:

A sorba kapcsolt R_2 , R_3 eredőjét érdemes meghatározni:

$$R_{23} = R_2 + R_3 = 15\Omega + 25\Omega = 40\Omega.$$

Mivel R_{23} párhuzamosan van kapcsolva R_1 -el ezért a kör ellenállása a

$$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_{23}} = \frac{1}{80\Omega} + \frac{1}{40\Omega} = \frac{3}{80\Omega}$$

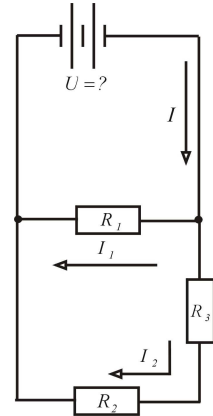
$$\text{Tehát } R_e = 26,7\Omega$$

b., A kör eredő feszültsége innen már számítható:

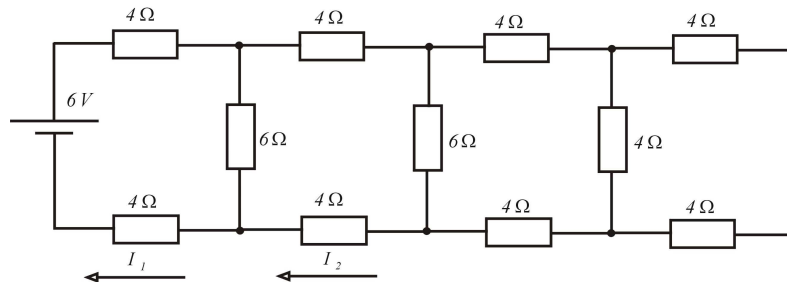
$$U = R_1 \cdot I_1 = 80\Omega \cdot 0,3A = 24V, \quad I_2 = \frac{U}{R_{23}} = \frac{24V}{40\Omega} = 0,6A$$

$$I = I_1 + I_2 = 0,9A$$

$$\text{Ellenőrzés: } I = \frac{U}{R_e} = \frac{24V}{26,7\Omega} = 0,9A$$



27.45 Mekkora I_1 , I_2 értéke az alábbi áramkörben?



Megoldás:

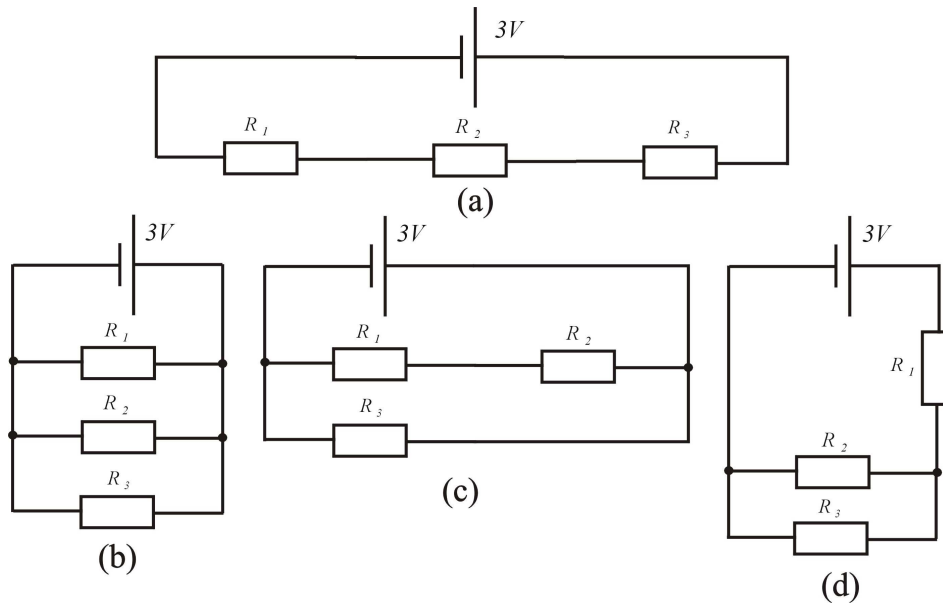
A kapcsolás végén a két 4Ω -os ellenállás nyugodtan elhagyhatjuk arra nem fog áram folyni. Ekkor látható, hogy a három 4Ω -os sorba van kötve, amikkel a 6Ω -os párhuzamosan. Eredőjük:

$$R_2 = \frac{12\Omega \cdot 6\Omega}{18\Omega} = 4\Omega$$

$$\text{Így ugyanaz a helyzet mint az előző esetben. } I_1 = \frac{6V}{12\Omega} = 0,5A$$

$$U_{4\Omega} = 0,5A \cdot 4\Omega = 2V, \quad I_2 = \frac{2V}{12\Omega} = 0,166A$$

27.46 Három ellenállást $R_1 = 5\Omega$, $R_2 = 15\Omega$, $R_3 = 25\Omega$, négy különböző képen kötünk. Számítsa ki I_1 , I_2 , I_3 áramok értékeit és a telep áramát, minden esetben.



a), $R = R_1 + R_2 + R_3 = 45\Omega$, $I = I_1 = I_2 = I_3 = \frac{U}{R} = \frac{3V}{45\Omega} = 0,067 A$

b), $I_1 = \frac{U}{R_1} = \frac{3V}{5\Omega} = 0,6 A$, $I_2 = \frac{U}{R_2} = \frac{3V}{15\Omega} = 0,2 A$, $I_3 = \frac{U}{R_3} = \frac{3V}{25\Omega} = 0,12 A$

$I = I_1 + I_2 + I_3 = 0,92 A$

c), $I_3 = \frac{U}{R_3} = \frac{3V}{25\Omega} = 0,12 A$, $I_2 = I_1 = \frac{U}{R_1 + R_2} = \frac{3V}{20\Omega} = 0,15 A$, $I = I_1 + I_3 = 0,27 A$

d), $\frac{1}{R'} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{1}{15\Omega} + \frac{1}{25\Omega} = \frac{8}{75\Omega}$, $R' = 9,375\Omega$, $I_2 = \frac{U_2}{R_2} = \frac{3V - I_1 \cdot R_1}{15\Omega} = 0,13 A$

$I_1 = I = \frac{U}{R_1 + R'} = \frac{3V}{14,375\Omega} = 0,209 A$, $I_3 = I + I_2 = 0,079 A$

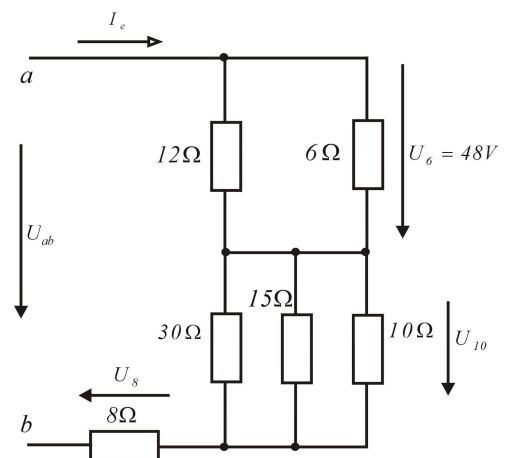
27.47 Tudjuk, hogy az alábbi kapcsolás 6Ω -os ellenállásán a feszültségesés $U_6 = 48V$.

- a., Határozza meg a főáramkör I_e áramerősségét!
 b., A 8Ω -os ellenálláson eső feszültség nagyságát!
 c., És a 10Ω -os ellenálláson lévő feszültséget!
 d., És a potenciálkülönbséget az ab pontok között!

Megoldás:

a.,) Mivel a 6Ω -os és a 12Ω -os ellenállások párhuzamosan vannak kapcsolva ezért a rájuk kapcsolt feszültség is azonos. $I = I_6 + I_{12} = \frac{48V}{6\Omega} + \frac{48V}{12\Omega} = 12 A$.

b.,) Mivel a 8Ω -os ellenálláson ugyan ez az áram folyik át így számítható a rajta eső feszültség:
 $U_8 = 12 A \cdot 8\Omega = 96 V$.



c.) Legyen a három párhuzamosan kapcsolt ellenállás eredője R' :

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{10\Omega} + \frac{1}{15\Omega} + \frac{1}{30\Omega} = \frac{6}{30\Omega}, \quad R' = 5\Omega$$

Mivel mindhárom ellenállásra ugyanaz a feszültség jut, így meghatározható a feszültség esés:

$$U' = U_{10} = I \cdot R' = 12A \cdot 5\Omega = 60V$$

d), Az ab feszültség a három részfeszültség összege:

$$U_{ab} = U_6 + U_{10} + U_8 = 48V + 60V + 96V = 204V.$$

27.48 Határozza meg R_e , I_1 és I_2 értékét az alábbi kapcsolásban.

Megoldás:

$$R_e = 5\Omega + \frac{1}{\frac{1}{3\Omega} + \frac{1}{6\Omega} + \frac{1}{2\Omega}} + \frac{9\Omega \cdot 18\Omega}{9\Omega + 18\Omega} =$$

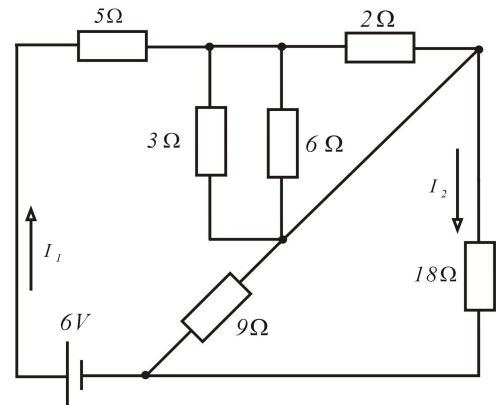
$$= 5\Omega + 1\Omega + 6\Omega = 12\Omega$$

$$\text{Ezek után az eredő áram: } I_e = \frac{6V}{12\Omega} = 0,5A$$

Mivel a 9Ω és a 18Ω -os eredője 6Ω amin ugyancsak átfolyik az I_e áram, így itt esik a fél tápfeszültség azaz

$$U_{9,18} = 0,5A \cdot 6\Omega = 3V.$$

$$I_2 = \frac{U_{9,18}}{R} = \frac{3V}{18\Omega} = 0,167A$$



27.48b Határozza meg U , I_1 és I_2 értékét az alábbi kapcsolásban.

Megoldás:

$$I_{18} = \frac{U_{18}}{R} = \frac{3V}{18\Omega} = 0,167A, \quad I_2 = \frac{U_9}{R} = \frac{3V}{9\Omega} = 0,333A$$

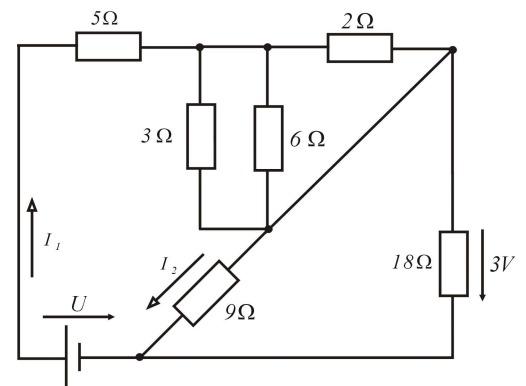
Ezek után az eredő áram: $I_1 = 0,167A + 0,333A = 0,5A$

Mivel a 3Ω , 6Ω és a 2Ω -os eredője:

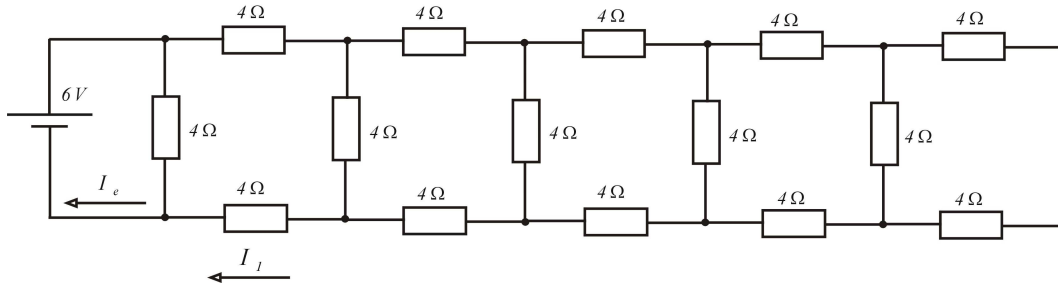
$$R_{362} = \frac{\frac{6\Omega \cdot 3\Omega}{6\Omega + 3\Omega} \cdot 2\Omega}{\frac{6\Omega \cdot 3\Omega}{6\Omega + 3\Omega} + 2\Omega} = \frac{4\Omega}{4\Omega} = 1\Omega$$

És ezzel sorba van kötve az 5Ω -os ellenállás. Amely 2 ellenállás összegén ugyancsak $3V$ lesz a feszültség esés. $U_{5,362} = I_1 \cdot (R_{362} + R_5) = 0,5A \cdot 6\Omega = 3V$

Így az U feszültség $U = U_{18} + U_{5,362} = 3V + 3V = 6V$.



27.49 Mekkora I_e , I_1 értéke az alábbi áramkörben?



Megoldás:

A kapcsolás végén a két 4Ω -os ellenállás nyugodtan elhagyhatjuk arra nem fog áram folyni. Ekkor látható, hogy a három 4Ω -os sorba van kötve, amikkel a 4Ω -os párhuzamosan. Eredőjük:

$$R_1 = \frac{12\Omega \cdot 4\Omega}{16\Omega} = 3\Omega, \text{ majd } R_2 = \frac{11\Omega \cdot 4\Omega}{15\Omega} = 2,93\Omega. \text{ A 3. eredője:}$$

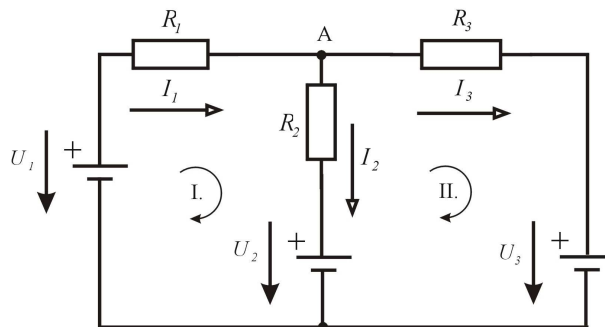
$$R_3 = \frac{10,93\Omega \cdot 4\Omega}{14,93\Omega} = 2,92857\Omega. \text{ A 4.: } R_4 = \frac{10,92857\Omega \cdot 4\Omega}{14,92857\Omega} = 2,92822\Omega$$

Így ugyanaz a helyzet mint az előző esetben.

$$I_e = \frac{6V}{2,92822\Omega} = 2,049A, \quad U_{4\Omega} = 6V \cdot \frac{4\Omega}{10,93\Omega} = 2,19512V, \quad I_1 = \frac{2,19512V}{4\Omega} = 0,5488A$$

1.7 Határozzuk meg az ábrán látható áramkörben folyó áramokat, ha ismertek:

$$U_1 = 310V, \quad U_2 = 200V, \quad U_3 = 80V, \quad R_1 = 70\Omega, \quad R_2 = 30\Omega, \quad R_3 = 30\Omega!$$



1. Megoldás: A feladatot a Kirchhoff törvények segítségével oldjuk meg!

Mivel az ábrán bejelölt 3 áram ismeretlen ezért 3 egyenletet kell felírnunk a meghatározásukra. Az ábrán bejelölt pozitív irányok mellett, illetve az I.-II. hurokra felvett körüljárási irányokkal, felírható az alábbi egyenletrendszer:

$$\text{I.} \quad -U_1 + I_1 \cdot R_1 + I_2 \cdot R_2 + U_2 = 0$$

$$\text{II.} \quad U_3 - U_2 - I_2 \cdot R_2 + I_3 \cdot R_3 = 0$$

$$\text{A.} \quad I_1 - I_2 - I_3 = 0$$

Az egyenleteket rendezzük az ismeretlenek szerint.

$$\text{I.} \quad I_1 \cdot R_1 + I_2 \cdot R_2 = U_1 - U_2$$

$$\text{II.} \quad -I_2 \cdot R_2 + I_3 \cdot R_3 = U_2 - U_3$$

$$\text{A.} \quad I_1 - I_2 - I_3 = 0$$

Behelyettesítve az értékeket.

$$\text{I.} \quad 70\Omega \cdot I_1 + 30\Omega \cdot I_2 = 110V$$

$$\text{II.} \quad -30\Omega \cdot I_2 + 30\Omega \cdot I_3 = 120V$$

$$\text{A.} \quad I_1 - I_2 - I_3 = 0$$

A feladat elektrotechnikai részét ezzel megoldottuk. A továbbiakban következik az egyenletrendszer megoldása.

A harmadik egyenletből kifejezve: $I_1 = I_2 + I_3$. A következőket kapjuk:

I. $100\Omega \cdot I_2 + 70\Omega \cdot I_3 = 110V$ Az I. egyenletet 10-el osztva,

II. $-30\Omega \cdot I_2 + 30\Omega \cdot I_3 = 120V$ A II. egyenletet 30-al osztva kapjuk:

Elhagyva az „ Ω ” és a „V” mértékegységeket tudjuk, hogy az eredményt „A”-ben fogjuk megkapni.

I. $10 \cdot I_2 + 7 \cdot I_3 = 11$

II. $-I_2 + I_3 = 4 \Rightarrow I_3 = 4 + I_2$ kifejezve, és vissza helyettesítve:

I. $10 \cdot I_2 + 7(4 + I_2) = 11$ innen I_2 könnyen meghatározható:

$17 \cdot I_2 + 28 = 11$ végül: $I_2 = -1A$

$I_3 = 4 + I_2$ végül: $I_3 = 4 - 1 = 3A$

$I_1 - I_2 - I_3 = 0$ végül: $I_1 = I_2 + I_3 = -1 + 3 = 2A$

2. Megoldás: A determinánsok módszerével megoldva a példát:

Elhagyva az „ Ω ” és a „V” mértékegységeket tudjuk, hogy az eredményt „A”-ben fogjuk megkapni.

Az első egyenletet 10-el a másodikat 30-al osztva:

I. $7 \cdot I_1 + 3 \cdot I_2 = 11$

II. $-I_2 + I_3 = 4$

A. $I_1 - I_2 - I_3 = 0$

Az egyenletrendszer determinánsa:

$$D = \begin{vmatrix} 7 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 7(1+1) - 3(0-1) + 0(0+1) = 17$$

Az egyes ismeretlenekhez tartozó determinánsok:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 11 & 3 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 11(1+1) - 3(-4) + 0 = 34$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 7 & 11 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 7(-4) - 11(0-1) + 0 = -17$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 7 & 3 & 11 \\ 0 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 7(0+4) - 3(0-4) + 11(0+1) = 28 + 12 + 11 = 51$$

A keresett áramok:

$$I_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{34}{17} = 2A, \quad I_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-17}{17} = -1A, \quad I_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{51}{17} = 3A$$

3. Megoldás: A hurokáramok módszerével megoldva a példát:

A felírható független egyenletek száma: $n = \text{ágak} - \text{csomópontok} + 1 = 3 - 2 + 1 = 2$

H_I. $I_1(R_1 + R_2) - I_{II} \cdot R_2 + U_2 - U_1 = 0$

H_{II}. $-I_1 \cdot R_2 + I_{II}(R_2 + R_3) + U_3 - U_2 = 0$

Behelyettesítve az megadott értékeket és elhagyva az „ Ω ” és a „V” mértékegységeket tudjuk, hogy az eredményt „A”-ben fogjuk megkapni.

H_I. $100 \cdot I_1 - 30 \cdot I_{II} = -200 + 310$

H_{II}. $-30 \cdot I_1 + 60 \cdot I_{II} = 200 - 80$ 2. egyenletet osztva 2-vel és az elsőhöz adva:

$$H_{II}. \quad -15 \cdot I_I + 30 \cdot I_{II} = 60$$

$$H_{I.}\text{-be} \quad (100 - 15)I_I = 110 + 60 \quad I_I = I_1 = 2A$$

A I_1 hurokáramot az egyenletébe vissza helyettesítve kaphatjuk meg:

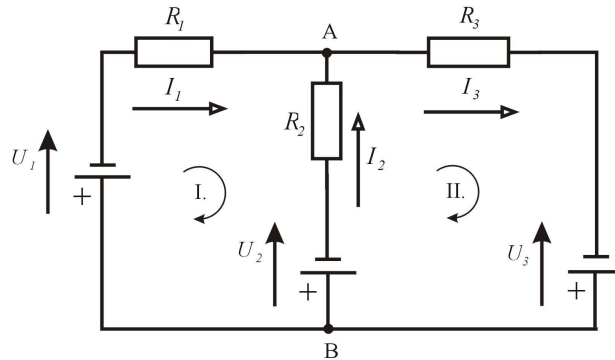
$$H_{II.}\text{-be} \quad -15 \cdot 2 + 30 \cdot I_{II} = 60 \quad I_{II} = I_3 = 3A$$

Végül a középső ág áramát a két hurokáram különbségeként tudjuk meghatározni.

$$I_2 = I_1 - I_3 = 2A - 3A = -1A$$

1.8 Határozzuk meg U_3 értékét!

$$U_1 = 130V, U_2 = 75V, I_3 = 0A, R_1 = 92\Omega, R_2 = 192\Omega, R_3 = 18M\Omega!$$



Megoldás:

Fizikailag keressük U_3 értékét úgy, hogy a harmadik ágban ne folyjék áram. A feladatot a Kirchhoff egyenletrendszer felírásával tudjuk formálisan megoldani:

$$I. \quad U_1 + I_1 \cdot R_1 - I_2 \cdot R_2 - U_2 = 0$$

$$II. \quad I_2 \cdot R_2 + U_2 + I_3 \cdot R_3 - U_3 = 0$$

$$A. \quad I_1 + I_2 - I_3 = 0$$

Az ismert értékeket behelyettesítve és rendezve a következőket kapjuk:

$$I. \quad 92 \cdot I_1 - 192 \cdot I_2 = -55$$

$$II. \quad 192 \cdot I_2 - U_3 = -75$$

$$A. \quad I_1 + I_2 = 0 \quad \Rightarrow I_1 = -I_2$$

Az első egyenletbe visszahelyettesítve:

$$I. \quad 284 \cdot I_2 = 55 \quad \Rightarrow I_2 = 0,194A$$

A második egyenletből már U_3 értéke számítható:

$$II. U_3 = 75 + 192 \cdot I_2 = 112,2V \quad \text{A felvett pozitív irányba mutató.}$$

A feladatnak egyszerűbb megoldása is van. Mivel a harmadik ágon nem folyik áram az I. körben fennálló viszonyokat nem befolyásolja.

$$I. \quad U_1 + I_1 \cdot R_1 - U_2 - I_2 \cdot R_2 = 0$$

És tudjuk, hogy $I_1 = -I_2 = I$

$$I. \quad 130 + I \cdot 92 - 75 - I \cdot 192 = 0$$

$$I = -0,194A$$

I_1 pozitív irányába vettük fel I értékét, így I_2 ezzel ellentétes értelmű így fordított polaritással kell figyelembe vennünk.

$$U_{AB} = I_2 \cdot R_2 + U_2,$$

$$U_{AB} = 0,194A \cdot 192\Omega + 75V = 112,2V$$

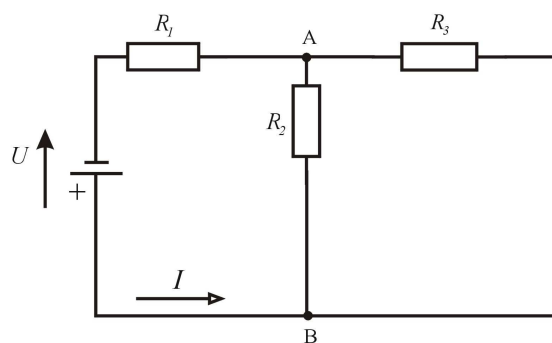
1.9 Határozzuk meg az ábrán látható feszültség forrás terhelő áramát!

$$U = 25,3V ,$$

$$R_1 = 17,6\Omega ,$$

$$R_2 = 23,9\Omega ,$$

$$R_3 = 37,6\Omega !$$



Megoldás:

$$R_e = R_1 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3} = 17,6\Omega + \frac{23,9\Omega \cdot 37,6\Omega}{23,9\Omega + 37,6\Omega} = 17,6\Omega + 14,6\Omega = 32,2\Omega$$

$$\text{A keresett áram tehát: } I = \frac{U}{R_e} = \frac{25,3V}{32,2\Omega} = 0,786 \text{ A}$$

1.10 Egy villamos motor forgórész ellenállása: $R_f = 0,18\Omega$, ezzel sorba kötött ellenállások összege $R_{sp} = 0,06\Omega$. Ezekkel párhuzamosan kötött gerjesztő tekercs ellenállása $R_g = 8,7\Omega$. Mekkora ellenállást kell a forgórészrel sorba kötni, hogy indításkor 230V-ra kapcsolva az indítási áram ne legyen nagyobb 500A-nél?

Megoldás:

A felrajzolt kapcsolás alapján a gerjesztő áram számítható:

$$I_g = \frac{230V}{8,7\Omega} = 26,437 \text{ A}$$

$$\text{Az alsó ág árama: } I_{alsó} = I - I_g = 473,563 \text{ A}$$

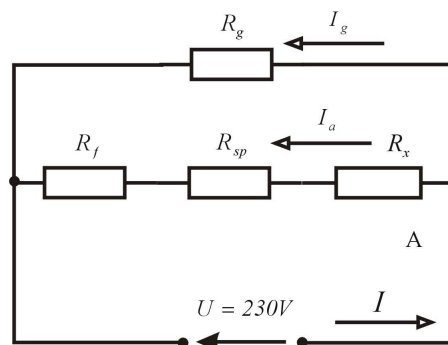
Az alsó ágban szükséges eredő ellenállás:

$$R = \frac{U}{I_{alsó}} = \frac{230V}{473,563 \text{ A}} = 0,4856\Omega$$

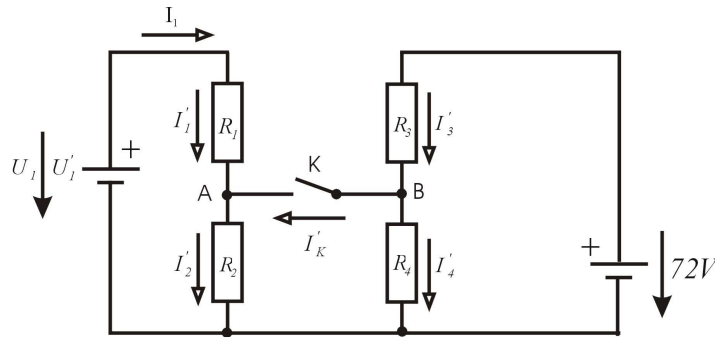
Másrészt:

$$R = R_f + R_{sp} + R_x$$

$$\text{A beállítandó érték: } R_x = 0,4856 - 0,24 = 0,2457\Omega$$



1.11 Határozza meg az ábrán látható kapcsolásban R_2 és R_4 értékét a következő feltételek szerint. A „K” kapcsoló nyitott állapotában $U = 60V$ esetén $R_1 = 180\Omega$ és árama $250mA$ legyen. A „K” kapcsoló zárt állapotában az $U' = 42V$ esetén R_1 árama $100mA$ és $R_3 = 120\Omega$.



Megoldás:

Az első feltétel szerint: $U = 60V$, és $I_1 = 0,25A$

Tehát az Ohm törvény alapján: $R = \frac{U}{I_1} = \frac{60V}{0,25A} = 240\Omega = R_1 + R_2$

$$R_2 = 240\Omega - 180\Omega = 60\Omega$$

A második feltétel szerint: $U' = 42V$, $I'_1 = 0,1A$

Az R_1 -en létrejövő feszültségesés: $U'_1 = I'_1 \cdot R_1 = 0,1A \cdot 180\Omega = 18V$

Az R_2 -en létrejövő feszültségesés: $U'_2 = U' - U'_1 = 42V - 18V = 24V$

Innen az R_2 -n folyó áram számítható: $I'_2 = \frac{U'_2}{R_2} = \frac{24V}{60\Omega} = 0,4A$

Az „A” pontra felírt csomóponti törvény alapján másik az I'_2 a másik két kapcsolódó áram eredője:

$$I'_2 = I'_1 + I'_k = 0,1A + I'_k = 0,4A. \text{ Tehát: } I'_k = 0,3A$$

A kapcsoló zárt állása esetén az „A” és a „B” pontok azonos potenciálon vannak, így:

$$U'_4 = U'_2 = 24V$$

Innen számítható U'_3 értéke: $U'_3 = 72V - U'_4 = 48V$, $I'_3 = \frac{U'_3}{R_3} = \frac{48V}{120\Omega} = 0,4A$.

Ebből a kapcsoló felé $300mA$ folyik, és a maradék folyik át az R_4 -es ellenálláson.

$$I'_4 = I'_3 - I'_k = 0,4A - 0,3A = 0,1A, \quad R_4 = \frac{U'_4}{I'_4} = \frac{24V}{0,1A} = 240\Omega$$

1.12 Hány kWh villamos energia nyerhető egy $5\text{km} \times 3\text{km} \times 15\text{m}$ -es vízgyűjtőből, ha a közepes vízésés 45m , és az energia átalakítás hatásfoka 52% .

Megoldás:

A medence köbtartalma: $V = 5 \cdot 10^3 \text{ m} \cdot 3 \cdot 10^3 \text{ m} \cdot 15 \text{ m} = 2,25 \cdot 10^8 \text{ m}^3$

A víz helyzeti energiája: $W = G \cdot h$, és $G = 2,25 \cdot 10^8 \cdot 10^3 \text{ kp}$ és h a víz közepes esése.

$W_h = 2,25 \cdot 10^{11} \text{ kp} \cdot 45 \text{ m} = 1,013 \cdot 10^{13} \text{ mkp}$ mint ismert: $1 \text{ mkp} = 9,81 \text{ Nm} = 9,81 \text{ Ws}$

tehát: $W_h = 9,95 \cdot 10^{13} \text{ Ws}$

Hány kWh termelhet az erőmű?

$1 \text{ kWh} = 10^3 \cdot 3,6 \cdot 10^3 \text{ Ws} = 3,6 \cdot 10^6 \text{ Ws}$ és így $W_h = 2,76 \cdot 10^7 \text{ kWh}$

1.16 Mekkora ellenállással terhelhetünk egy 230V -os, $0,3\Omega$ -os belső ellenállású feszültségforrást, ha a kapocsfeszültségének legalább 215V -nak kell lenni?

Megoldás:

A megengedett feszültségesés: $U = 230\text{V} - 215\text{V} = 15\text{V}$

A megengedett áram: $I = \frac{U}{R_b} = \frac{15\text{V}}{0,3\Omega} = 50\text{A}$, másrészt $I = \frac{U}{R_b + R}$.

Ezek alapján a megengedhető terhelő ellenállás: $R = \frac{U}{I} - R_b = \frac{230\text{V}}{50\text{A}} - 0,3\Omega = 4,3\Omega$

1.17 Egy feszültségforrás sarkain változtatjuk a terhelést. $I_1 = 50\text{A}$ esetén a kapocsfeszültség 490V , $I_2 = 80\text{A}$ esetén pedig 475V . Határozza meg az üresjárási feszültséget, és a belső ellenállást!

Megoldás:

A szöveg alapján felírhatjuk: $U_{k1} = U - I_1 \cdot R_b$, illetve

$$U_{k2} = U - I_2 \cdot R_b$$

A két egyenletbe behelyettesítve és egymásból kivonva kapjuk:

$$490 = U - 50 \cdot R_b$$

$$475 = U - 80 \cdot R_b$$

$$15 = 30 \cdot R_b, \text{ innen: } R_b = 0,5\Omega$$

Ezt visszahelyettesítve az egyik egyenletbe: $490\text{V} = U - 50\text{A} \cdot 0,5\Omega$, $U = 515\text{V}$

1.18 Egy feszültségforrás üresjárási feszültsége $U_{\text{ü}} = 31,5\text{V}$. Kapcsait $7,2\Omega$ -os ellenállással zárva 72% -os hatásfokkal dolgozik. Mekkora a belső ellenállása?

Megoldás:

Az üresjárási feszültség a belső ellenálláson és a terhelő ellenálláson létrejövő feszültségekkel tart egyensúlyt: $U_{\text{ü}} = I \cdot R_b + I \cdot R$.

Szorozva az egyenletet I -vel: $U_{\text{ü}} \cdot I = I^2 \cdot R_b + I^2 \cdot R$

A hatásfok: $\eta = \frac{I^2 \cdot R}{U \cdot I} = \frac{I^2 \cdot R}{I^2 \cdot R_b + I^2 \cdot R} = \frac{R}{R_b + R}$.

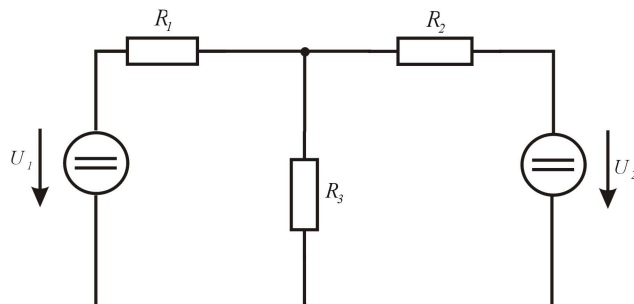
Számszerűen: $0,72 = \frac{7,2}{R_b + 7,2}$,

$$R_b = 10 - 7,2 = 2,8\Omega$$

Szuperpozíció tétele: Ha egy hálózat több generátort tartalmaz, akkor mindegyik generátor a hálózat bármely ágában a többitől függetlenül hozza létre a maga részáramát. Minden generátor hatását külön-külön vizsgáljuk, majd ezeket előjelesen összegezzük. A részáramok számításánál a többi generátort belső ellenállásával helyettesítjük (áramgenerátorokat megszakítjuk, feszültség generátorokat rövidrezárjuk).

1.19 Számítsuk ki az alábbi áramkör ágáramait a szuperpozíció tételének segítségével!

$$U_1 = 2V, U_2 = 5V, R_1 = 10\Omega, R_2 = 30\Omega, R_3 = 50\Omega$$



Megoldás:

A szuperpozíció elvét alkalmazva a feladatot két lépésben oldjuk meg. Először csak az U_1 feszültséget vesszük figyelembe.

$$I_{11} = \frac{U_1}{R_1 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3}} = \frac{2V}{10\Omega + 18\Omega} = \frac{2V}{28,75\Omega} = 0,06956 A$$

$$U_{AB1} = U_1 - I_{11} \cdot R_1 = 2V - 0,6956V = 1,3044V$$

$$I_{21} = \frac{U_{AB1}}{R_2} = \frac{1,3044V}{30\Omega} = 0,04348 A$$

$$I_{31} = I_{11} - I_{21} = 0,06956 - 0,04348 = 0,02608 A$$

Második lépésben csak az U_2 feszültség forrást vesszük figyelembe.

$$I_{22} = \frac{U_2}{R_2 + \frac{R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_3}} = \frac{5V}{30\Omega + 8,3\Omega} = \frac{5V}{38,3\Omega} = 0,131 A$$

$$U_{AB2} = U_2 - I_{22} \cdot R_2 = 5V - 3,9V = 1,1V$$

$$I_{12} = \frac{U_{AB2}}{R_1} = \frac{1,1V}{10\Omega} = 0,11 A$$

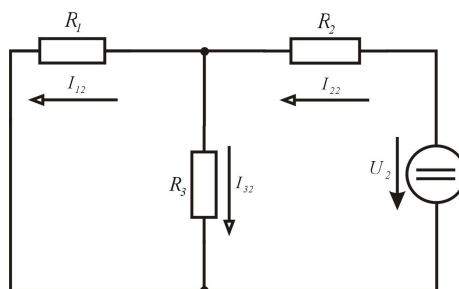
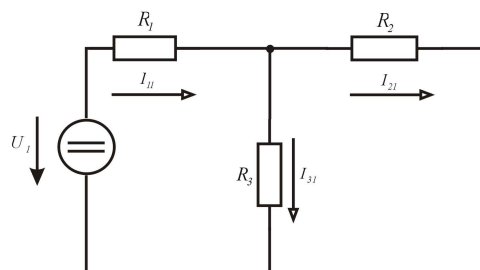
$$I_{32} = I_{22} - I_{12} = 0,131 - 0,11 = 0,021 A$$

Így végül az ágáramok (az első lépésben felvett irányokat véve pozitívnak):

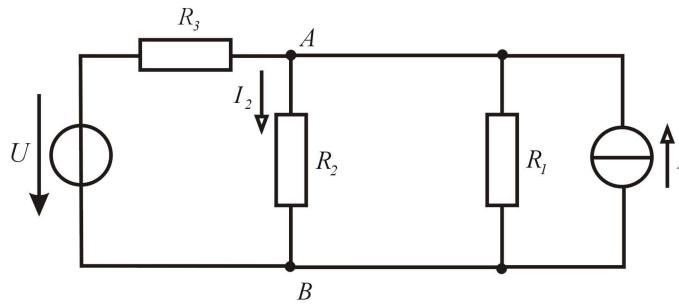
$$I_1 = I_{11} - I_{12} = 0,06956 - 0,11 = -0,04044 A = -40,44 mA,$$

$$I_2 = I_{21} - I_{22} = 0,04348 - 0,131 = -0,08752 A = -87,52 mA,$$

$$I_3 = I_{31} + I_{32} = 0,02608 + 0,021 = 0,04708 A = 47,08 mA$$



- 3.1 A szuperpozíció tételének felhasználásával határozza meg az ábrán bejelölt $\bar{I}_2$ áramot, ha $R_1 = 4\Omega$, $R_2 = 8\Omega$, $R_3 = 10\Omega$!

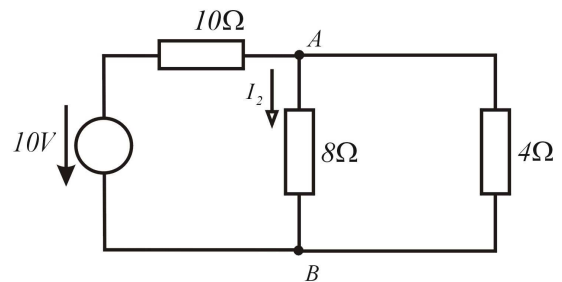


a.,) Csak a feszültség generátor hatását számolva:

$$R_e = R_1 \times R_2 + R_3 = \frac{8\Omega \cdot 4\Omega}{8\Omega + 4\Omega} + 10\Omega = 12,6\Omega$$

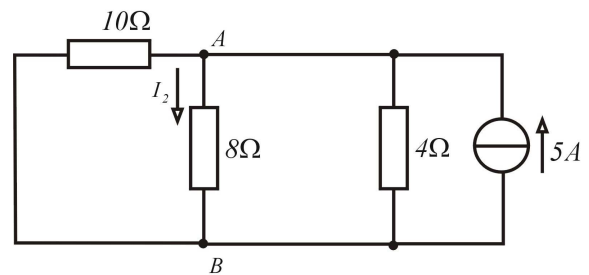
$$I_e = \frac{U}{R_e} = \frac{10V}{12,6\Omega} = 0,789A$$

$$I'_2 = I_e \frac{R_1}{R_1 + R_2} = \frac{0,789A}{3} = 0,2631A$$



b.,) Csak az áram generátor hatását számolva:

$$I''_2 = I \frac{R_1 \times R_3}{R_1 \times R_3 + R_2} = 5A \frac{\frac{40}{14}\Omega}{\frac{40}{14}\Omega + 8\Omega} = 1,3157A$$



Az eredmény a két részáram előjeles összegeként adódik:

$$I_2 = I'_2 + I''_2 = 0,2631A + 1,3157A = 1,5788A$$

1.20 Számítsa ki hurokáramok módszerével az alábbi ábrán látható kereszt-tagot tartalmazó áramkör ágáramait!

$$U_1 = 100V,$$

$$R_1 = R_2 = 10\Omega,$$

$$R_3 = R_4 = 20\Omega,$$

$$R_5 = 100\Omega,$$

$$R_6 = 50\Omega$$

Megoldás:

A független hurkok száma:

$$\text{ágak} - \text{csomópontok} + 1 = 6 - 4 + 1 = 3$$

$$(R_1 + R_4 + R_5)I_I + R_1 \cdot I_{II} - R_4 \cdot I_{III} = U$$

$$R_1 \cdot I_I + (R_1 + R_6 + R_3)I_{II} + R_6 \cdot I_{III} = 0$$

$$-R_4 \cdot I_I + R_6 \cdot I_{II} + (R_4 + R_6 + R_2)I_{III} = 0$$

$$\underline{130 \cdot I_I + 10 \cdot I_{II} - 20 \cdot I_{III} = 100} \quad /:10 \quad \underline{13 \cdot I_I + I_{II} - 2 \cdot I_{III} = 10}$$

$$\underline{10 \cdot I_I + 80 \cdot I_{II} + 50 \cdot I_{III} = 0} \quad /:10 \quad \underline{I_I + 8 \cdot I_{II} + 5 \cdot I_{III} = 0}$$

$$\underline{-20 \cdot I_I + 50 \cdot I_{II} + 80 \cdot I_{III} = 0} \quad /:10 \quad \underline{-2 \cdot I_I + 5 \cdot I_{II} + 8 \cdot I_{III} = 0}$$

a második egyenletből: $I_I = -8 \cdot I_{II} - 5 \cdot I_{III}$, a harmadik egyenletből: $I_I = 2,5 \cdot I_{II} + 4 \cdot I_{III}$

$$-8 \cdot I_{II} - 5 \cdot I_{III} = 2,5 \cdot I_{II} + 4 \cdot I_{III} \Rightarrow I_{III} = \frac{-10,5 \cdot I_{II}}{9}$$

Ezen eredményeket visszaírva az első egyenletbe: $13(2,5 \cdot I_{II} + 4 \cdot I_{III}) + I_{II} - 2 \cdot \frac{-10,5 \cdot I_{II}}{9} = 10$

$$32,5 \cdot I_{II} - \frac{546 \cdot I_{II}}{9} + I_{II} + \frac{21 \cdot I_{II}}{9} = 10$$

$$\left(\frac{292,5}{9} - \frac{546}{9} + \frac{9}{9} + \frac{21}{9}\right)I_{II} = 10 \quad -223,5 \cdot I_{II} = 90$$

$$I_{II} = -0,402685 A$$

$$I_{III} = \frac{-10,5 \cdot I_{II}}{9} = 0,469799 A$$

$$I_I = 2,5 \cdot I_{II} + 4 \cdot I_{III} = 0,87248 A$$

A három hurokáram alapján számíthatók az ágáramok:

$$R_1 \text{ ellenálláson: } I_1 = I_I + I_{II} = 0,46979 A = 469,79 mA$$

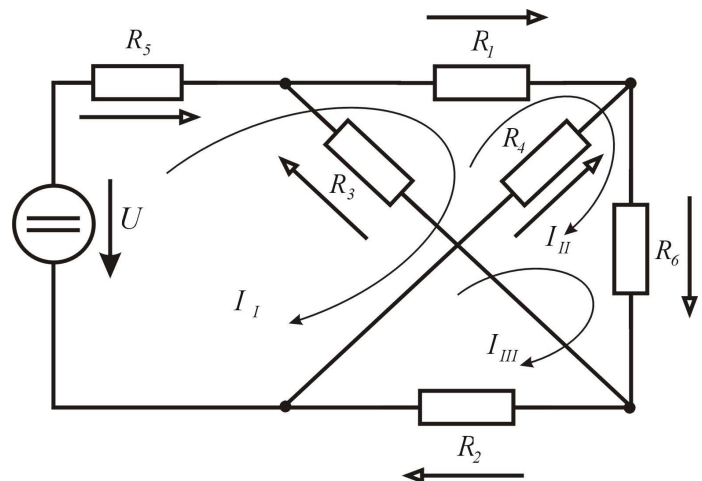
$$R_2 \text{ ellenálláson: } I_2 = I_{III} = 0,469799 A = 469,79 mA$$

$$R_3 \text{ ellenálláson: } I_3 = I_{II} = -0,402685 A = -402,68 mA$$

$$R_4 \text{ ellenálláson: } I_4 = I_{III} - I_I = -0,402681 A = -402,68 mA$$

$$R_5 \text{ ellenálláson: } I_5 = I_I = 0,87248 A = 872,48 mA$$

$$R_6 \text{ ellenálláson: } I_6 = I_{II} + I_{III} = -0,402685 + 0,469799 = 0,067114 A = 67,11 mA$$



Thevenin - tétel: A tetszőleges bonyolultságú hálózatot helyettesíthetjük egy ideális feszégenerátorral, melynek forrásfeszültsége az eredeti kétpólus üresjárási feszültségével egyenlő, és egy soros belső ellenállással, melynek értéke a kétpólus kapcsai közt mérhető ellenállással egyezik meg, ha a feszültséggenerátorokat rövidzárnak, az áramgenerátorokat szakadásnak vesszük.

3.2.7. Helyettesítsük az ábrán adott hálózat A-B pontjai között lévő összetett kétpólust egy olyan legegyszerűbb kétpólussal, amely az R_t külső terhelés szempontjából egyenértékű az összetett kétpólussal!

Megoldás:

Az R_t ellenállás áramát a Thevenin tételével számolva:

Az üresjárási feszültség az A-B pontok között (a hálózat legkülső ágaiban összegezve a részfeszültségeket):

A felíráshoz szükség van a 20Ω ellenállás áramára.

Ezt hurok törvény segítségével határozhatjuk meg:

$$I = \frac{80V}{20\Omega + 20\Omega} = 2A$$

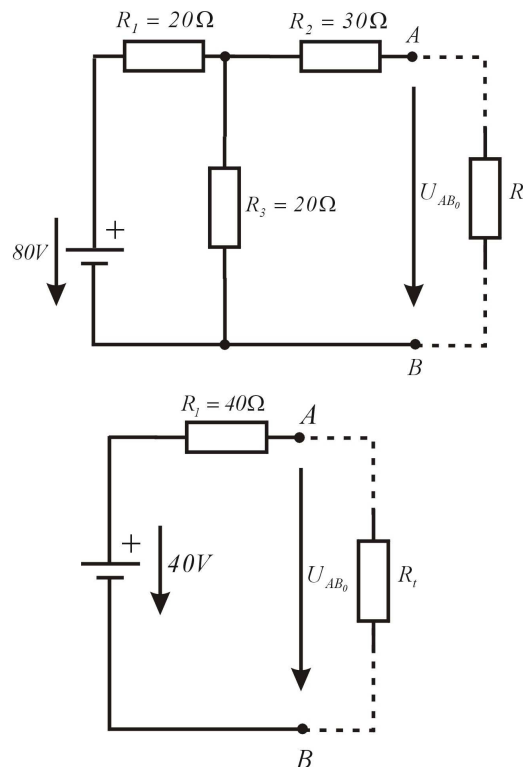
$$U_{AB_0} = I \cdot R_3 = 2A \cdot 20\Omega = 40V$$

A hálózat belső ellenállása az A-B pontok között:

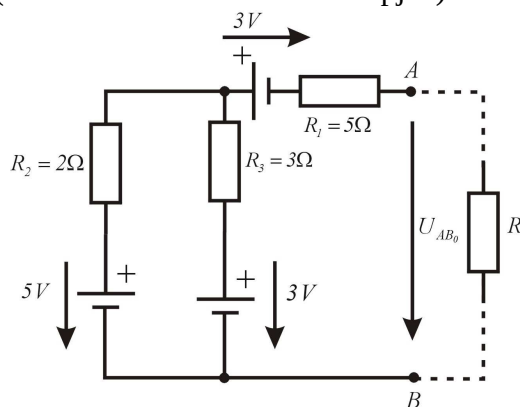
$$R_{AB} = (30\Omega + \frac{20\Omega \cdot 20\Omega}{20\Omega + 20\Omega}) = 40\Omega$$

Az R_t terhelő ellenállás árama Thevenin képletével:

$$I_t = \frac{U_{AB_0}}{R_{AB} + R_t}$$



3.2.8. Helyettesítsük az ábrán adott hálózat A-B pontjai között lévő összetett kétpólust egy olyan legegyszerűbb kétpólussal, amely az R_t külső terhelés szempontjából egyenértékű az összetett kétpólussal (Thevenin és Norton tétele alapján)!



Megoldás:

Az R_t ellenállás áramát a Thevenin tételével számolva:

Az üresjárási feszültség az A-B pontok között (a hálózat legkülső ágaiban összegezve a részfeszültségeket):

A felíráshoz szükség van a 2Ω ellenállás áramára. Ezt hurok törvény segítségével határozhatjuk meg:

$$5V - 3V + 3\Omega \cdot I + 2\Omega \cdot I = 0 \Rightarrow I = \frac{3V - 5V}{3\Omega + 2\Omega}$$

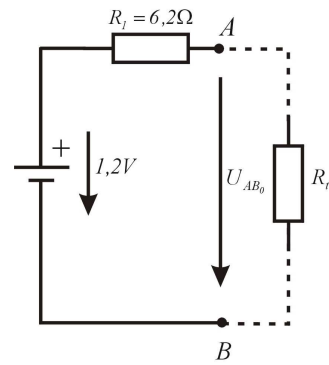
$$U_{AB_0} = -3V + I \cdot 2\Omega + 5V = -3V + \frac{3V - 5V}{(3+2)\Omega} \cdot 2\Omega + 5V = +1,2V$$

A hálózat belső ellenállása az A-B pontok között:

$$R_{AB} = (5\Omega + \frac{3\Omega \cdot 2\Omega}{3\Omega + 2\Omega}) = (5\Omega + 1,2\Omega) = 6,2\Omega$$

Az R_t terhelő ellenállás árama Thevenin képletével:

$$I_t = \frac{U_{AB_0}}{R_{AB} + R_t}$$



Norton - tétel: A tetszőleges bonyolultságú hálózatot helyettesíthetjük egy ideális áramgenerátorral, mely forrásárama egyenlő a kétpólus rövidzárási áramával, és egy párhuzamosan kapcsolódó vezetéssel, mely értéke megegyezik a kétpólus kapcsai közt mérhető vezetéssel, ha a feszültséggenerátorokat rövidzárnak, az áramgenerátorokat szakadásnak vesszük.

Az R_t ellenállás feszültségét Norton tételével számolva:

Megoldás:

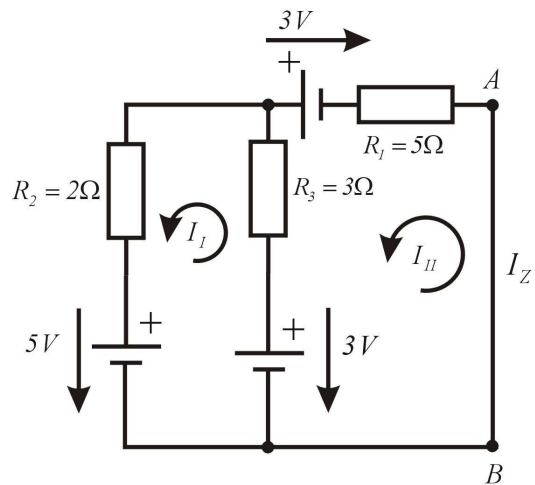
A rövidzárási áram az A-B pontok között hurok áramok módszerével számolva:

$$I_I(2+3)\Omega + I_{II}(-3)\Omega = -(5V - 3V) = -2V$$

$$I_I(-3)\Omega + I_{II}(5+3)\Omega = -3V + 3V = 0$$

$$D = \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 8 \end{vmatrix} = 40 - 9 = 31, \quad D_{II} = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = -6,$$

$$I_{II} = \frac{D_{II}}{D} = \frac{-6}{31} = -0,1936 A = -I_Z = I_{BA} = -I_{AB}$$

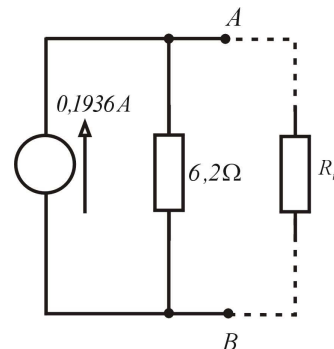


A hálózat belső admittanciája az A-B pontok között:

$$Y_{AB} = \frac{1}{R_{AB}} = \frac{1}{6,2\Omega} = 0,1613S$$

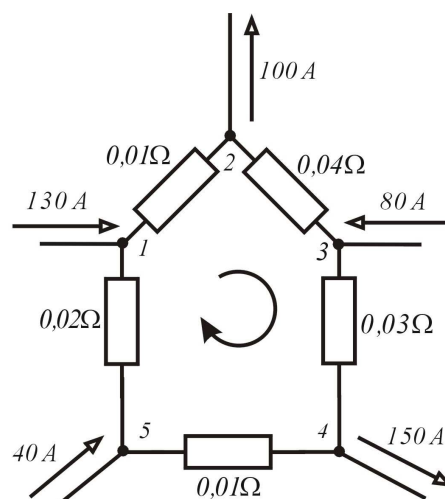
Az Y_t terhelési admittancia feszültsége Norton képletével:

$$U_t = \frac{I_Z}{Y_t + Y_{AB}}$$



$$\text{Másképpen: } I_Z = \frac{U_{AB_0}}{R_{AB}} = \frac{1,2V}{6,2\Omega} = 0,19358 A$$

3.2.13 Mekkora áramok folynak az ábrán adott hurok egyes ágaiban?



Próbaképpen tegyük fel, hogy $I_{12}^* = 150\text{ A}$

Ez alapján a csomóponti egyenleteket felhasználásával:

$$I_{23}^* = 150\text{ A} - 100\text{ A} = 50\text{ A}$$

$$I_{34}^* = 50\text{ A} + 80\text{ A} = 130\text{ A}$$

$$I_{45}^* = 130\text{ A} - 150\text{ A} = -20\text{ A}$$

$$I_{51}^* = -20\text{ A} + 40\text{ A} = 20\text{ A}$$

Az így kiszámolt ágáramok helyességének ellenőrzésére írjuk fel Kirchhoff huroktörvényét:

$$\begin{aligned} \sum U &= I_{12}^* \cdot R_{12} + I_{23}^* \cdot R_{23} + I_{34}^* \cdot R_{34} + I_{45}^* \cdot R_{45} + I_{51}^* \cdot R_{51} = \\ &= (150 \cdot 0,01 + 50 \cdot 0,04 + 130 \cdot 0,03 - 20 \cdot 0,01 + 20 \cdot 0,02)\text{ V} = 7,6\text{ V} \end{aligned}$$

Ez azonban a valóságban lehetetlen, mert kell, hogy $\sum U = 0\text{ V}$ legyen. Az utóbbi feltételt csak úgy teljesíthetjük, ha a fentebb választott körüljárási értelemmel szemben a fenti ágáramokra

$$I_{\text{kör}} = \frac{\sum U}{\sum R} = \frac{7,6\text{ V}}{0,11\Omega} = 69,1\text{ A} \text{ köráramot szuperponálunk.}$$

A valódi ágáramok így:

$$I_{12} = I_{12}^* - I_{\text{kör}} = 150\text{ A} - 69,1\text{ A} = 80,9\text{ A}$$

$$I_{23} = 50\text{ A} - 69,1\text{ A} = -19,1\text{ A} \quad I_{45} = -20\text{ A} - 69,1\text{ A} = -89,1\text{ A}$$

$$I_{34} = 130\text{ A} - 69,1\text{ A} = 60,9\text{ A} \quad I_{51} = 20\text{ A} - 69,1\text{ A} = -49,1\text{ A}$$

6.6 Határozza meg R_t értékét úgy, hogy rajta a hatásos teljesítmény értéke maximális legyen!
Számítsa ki a Norton helyettesítő kapcsolás modelljét!

Megoldás:

$$R_{AB} = (4\Omega + \frac{6\Omega \cdot 2\Omega}{6\Omega + 2\Omega}) = 5,5\Omega$$

$$U_{AC} = -U_{CA} = -(3A \cdot 4\Omega) = -12V$$

$$U_{th} = U_{AB_0} = U_{AC} + U_{CB} =$$

$$= -12V + 24V \cdot \frac{6\Omega}{6\Omega + 2\Omega} = -12V + 18V = 6V$$

Így felrajzolhatjuk a Thevenin helyettesítő képet:
Ebből látható hogy, a 2 sorosan kapcsolt ellenállás egyikén kell a hatásos teljesítménynek a maximális értékűnek lenni. Ez akkor lesz maximális ha:

$$R_t = R_{AB} = 5,5\Omega$$

$$U_{R_t} = \frac{1}{2} U_{th} = \frac{6V}{2} = 3V$$

A maximális teljesítmény meghatározása Norton és Thevenin módszer alapján is meghatározható:

$$P_{tmax} = \frac{U_{R_t}^2}{R_t} = I_t^2 \cdot R_t = \left(\frac{I_N}{2}\right)^2 \cdot R_t = \frac{(3V)^2}{5,5\Omega} = 1,636W$$

Norton helyettesítő kép meghatározása: $R_{AB} = R_{th} = R_N = 5,5\Omega$

Szuperpozíció tételét alkalmazva. Az I_{AB} áram irányát A pontból a B pontba folyónak feltételezzük.

Elsőként a fesz generátor marad és az áramgenerátort megszakítjuk:

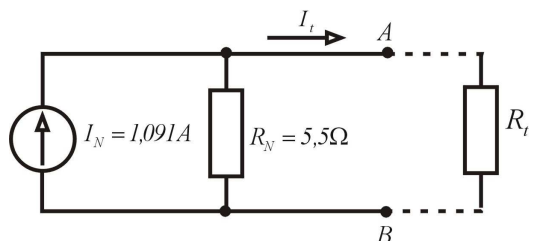
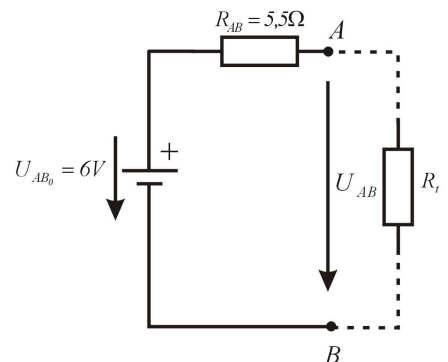
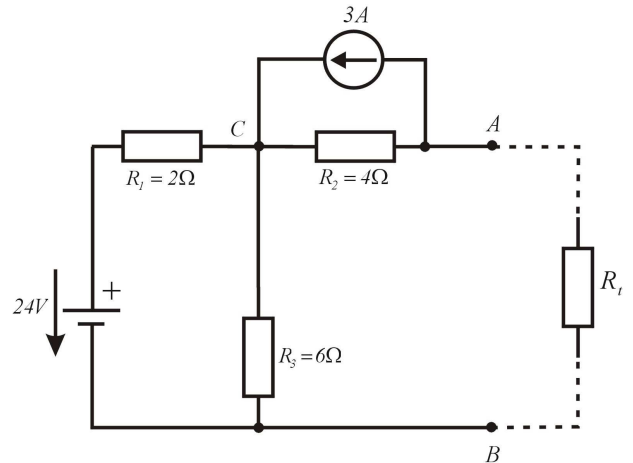
$$I'_{AB(röv)} = \frac{24V}{2\Omega + \frac{6\Omega \cdot 4\Omega}{6\Omega + 4\Omega}} \cdot \frac{6\Omega}{6\Omega + 4\Omega} = 3,273A$$

Másodikként a fesz generátort rövidre zárjuk:

$$I''_{AB(röv)} = -3 \cdot \frac{4\Omega}{4\Omega + \frac{2\Omega \cdot 6\Omega}{2\Omega + 6\Omega}} = -2,182A$$

$$\text{Összegezve: } I_N = I'_{AB(röv)} + I''_{AB(röv)} = 3,273A - 2,182A = 1,091A$$

$$\text{Ellenőrzés képen: } I_N = \frac{6V}{5,5\Omega} = 1,091A$$



6.7 Határozza meg az alábbi hálózat Norton helyettesítő modelljét! $R_t = 15\Omega$ -os terhelés esetén mekkora a rajta eső feszültség nagysága? Mekkora terhelés esetén a maximális a határos teljesítmény értéke?

Megoldás:

$$R_N = (13\Omega + \frac{20\Omega \cdot 30\Omega}{30\Omega + 20\Omega}) =$$

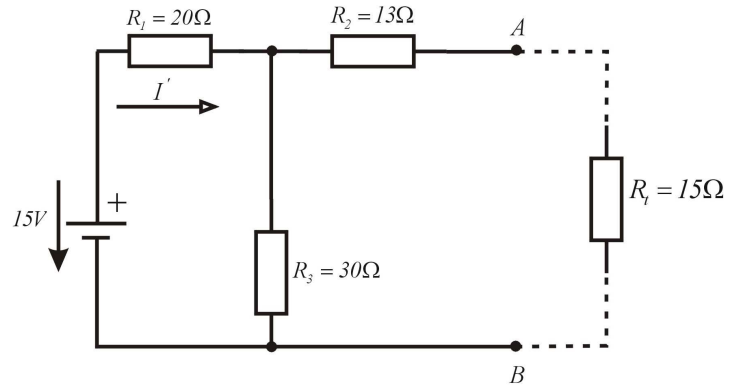
$$R_N = R_{th} = 25\Omega$$

Az AB pontokat rövidre zárva:

$$I_{AB(\text{rövidzár})} = I' \frac{30\Omega}{30\Omega + 13\Omega}$$

Az I' áramot behelyettesítve:

$$I_{AB(\text{röv})} = I_N = \frac{15V}{20\Omega + \frac{30\Omega \cdot 13\Omega}{30\Omega + 13\Omega}} \cdot \frac{30\Omega}{43\Omega} = \frac{450\Omega}{860\Omega + 390\Omega} = 0,36 A$$



Így felrajzolhatjuk a Norton helyettesítő képet a terheléssel:

$$U = I_t \cdot R_t = I_N \cdot \frac{25\Omega}{25\Omega + 15\Omega} \cdot 15\Omega =$$

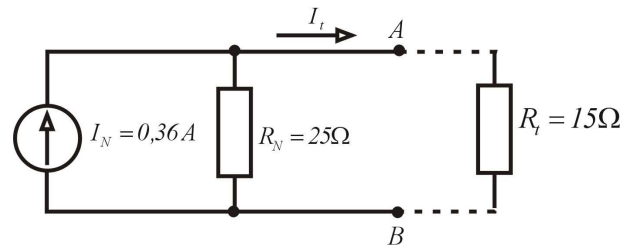
$$= 0,36 A \cdot \frac{25}{40} \cdot 15\Omega = 3,375V$$

Megjegyzendő, hogy a Thévenin feszültség a Norton generátor áramának és belső

ellenállásának szorzataként adódik: $U_{th} = U_{AB_0} = I_N \cdot R_N = 0,36 A \cdot 25\Omega = 9V$

Az utolsó kérdés a maximális teljesítményre kérdez rá. Amit akkor kapunk, ha a belső ellenállással megegyező nagyságú terhelő ellenállás értékével: $R_t = R_N = R_{th} = 25\Omega$

$$P_{tmax} = (I_t)^2 \cdot R_t = \left(\frac{I_N}{2}\right)^2 \cdot R_N = \frac{(0,36 A)^2}{4} \cdot 25\Omega = 0,81W$$



6.8 Thevenin - Norton átalakítással határozza meg az AB pontokon maximálisan átvihető teljesítmény értékét!

A CB pontok felől nézve a bal oldali részt egyszerűsítve:

$$R_{CB} = \frac{24\Omega \cdot 12\Omega}{24\Omega + 12\Omega} = 8\Omega$$

$$U'_{th} = 24V \cdot \frac{24\Omega}{24\Omega + 12\Omega} = 16V$$

$$R_{AB} = 16\Omega + 8\Omega = 24\Omega$$

Hurok törvény alapján:

$$U'_{th} - U_{CB} - 2,5A \cdot R_{CB} = 0$$

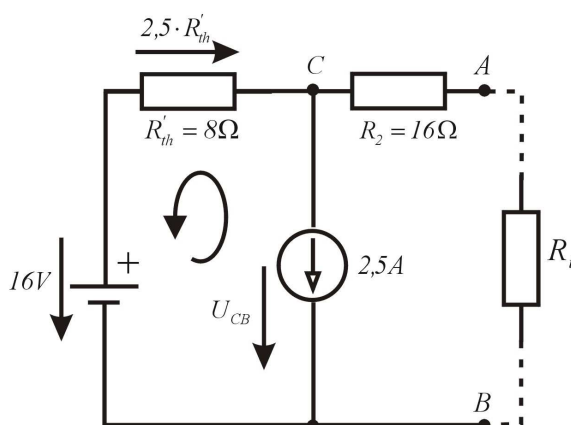
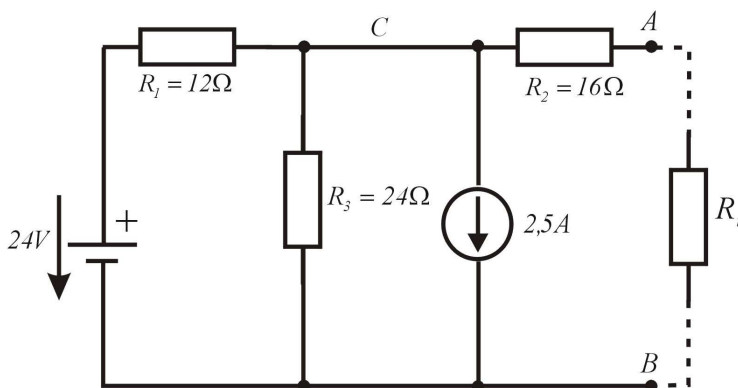
$$16V - U_{CB} - 2,5A \cdot 8\Omega = 0$$

$$U_{CB} = 16V - 8\Omega \cdot 2,5A = -4V = U_{AB_0} = U_{th}$$

$$I_N = \frac{U_{th}}{R_{AB}} = \frac{4V}{24\Omega} = 0,1\dot{6}A$$

$$R_N = R_{th} = R_{AB}$$

$$P_{t(max)} = \frac{\left(\frac{U_{th}}{2}\right)^2}{R_{th}} = \frac{(U_{th})^2}{4 \cdot R_{th}} = \frac{(4V)^2}{4 \cdot 24\Omega} = 0,1\dot{6}W$$



6.9 Határozza meg a hálózat Thevenin helyettesítő képét az AB pontok felől nézve!

A CB pontok felől nézve a bal oldali részt egyszerűsítve:

$$R_{th} = 2,5\Omega + \frac{3\Omega \cdot (5\Omega \cdot 10\Omega)}{3\Omega + 5\Omega + 10\Omega} = 5\Omega$$

Az áramgenerátort átalakítva feszültség generátorrá és ezt behelyettesítve a következők írhatók fel az I' hurokára második ábra alapján:

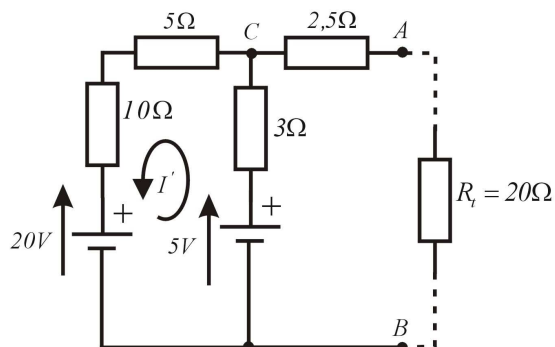
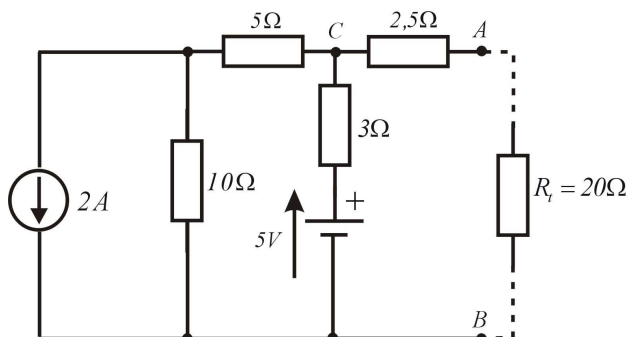
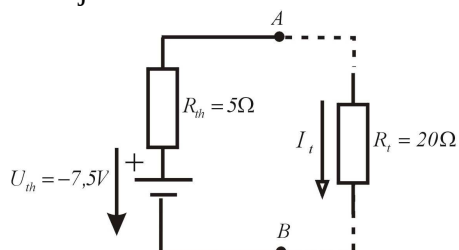
$$I' = \frac{20V - 5V}{10\Omega + 5\Omega + 3\Omega} = 0,83\dot{3}A$$

Mivel az AB pontok szabadon hagyjuk a $2,5\Omega$ -os ellenálláson nem folyik áram.

$$U_{th} = U_{AB_0} = U_{CB} = -5V - U_{3\Omega} =$$

$$= -5V - 3\Omega \cdot 0,83\dot{3}A = -7,5V$$

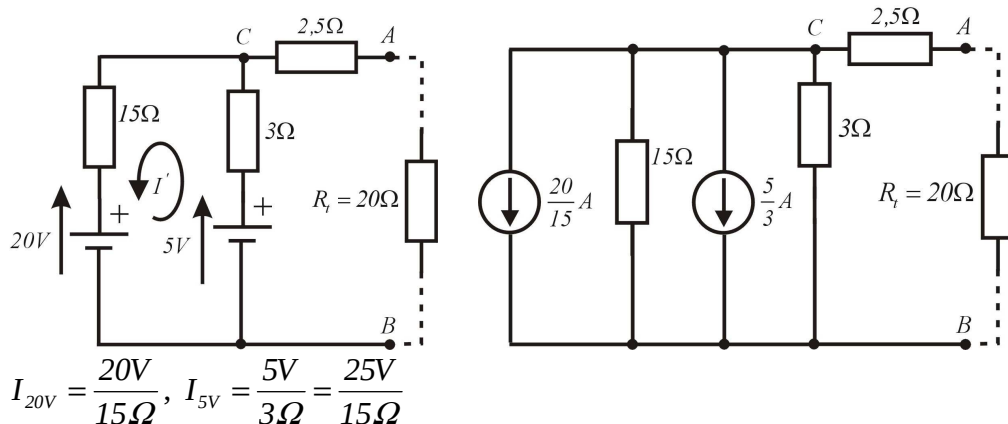
A kapott eredmény alapján fölírhatjuk a Thevenin helyettesítő kép és a terhelés eredőjeként adódó összarámot.



Az alábbi pozitív irányokat feltételezve kapjuk, hogy az ellentétes irányú feszültség ellentétes irányú áramot is hajt keresztül a körön:

$$I = \frac{U_{th}}{R_{th} + R_t} = \frac{-7,5V}{5\Omega + 20\Omega} = -0,3A$$

b.,) Határozza meg az eredeti hálózat Thevenin helyettesítő képét áramgenerátoros átalakításokkal!



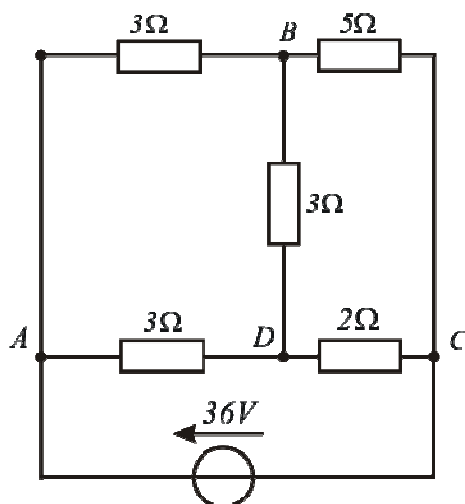
$$I_{20V} = \frac{20V}{15\Omega}, I_{5V} = \frac{5V}{3\Omega} = \frac{25V}{15\Omega}$$

A két áramgenerátor párhuzamos eredője: $I_{párhuzamos} = \frac{20V}{15\Omega} + \frac{25V}{15\Omega} = 3A$

$$R_{th} = 2,5\Omega + \frac{15\Omega \cdot 3\Omega}{15\Omega + 3\Omega} = 5\Omega, I_{AB} = -3 \cdot \frac{2,5\Omega}{5\Omega} = -1,5A$$

$$I = I_{AB} \frac{R_{th}}{R_{th} + R_t} = -1,5 \frac{5\Omega}{5\Omega + 20\Omega} = -0,3A$$

3.50 Mekkora az 5Ω -os és a 2Ω -os ellenállás árama, és a teljesítmény felvétel?



Megoldás:

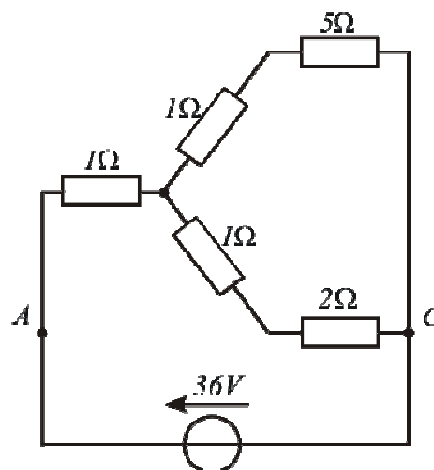
A feladat megoldását delta-csillag átalakítással tudjuk nagymértékben egyszerűsíteni.

$$R_{33} = \frac{R_3 \cdot R_3}{R_3 + R_3 + R_3} = \frac{3\Omega \cdot 3\Omega}{3\Omega + 3\Omega + 3\Omega} = 1\Omega$$

Az egyszerűsítés után kapott áramkör eredő ellenállása:

$$R_e = R_{33} + \frac{(R_{33} + R_5) \cdot (R_{33} + R_2)}{R_{33} + R_5 + R_{33} + R_2} = 1\Omega + \frac{(1\Omega + 5\Omega) \cdot (1\Omega + 2\Omega)}{1\Omega + 5\Omega + 1\Omega + 2\Omega} = 3\Omega$$

$$I_e = \frac{U}{R_e} = \frac{36V}{3\Omega} = 12A$$



A két kérdéses ellenállás árama: $I_5 = I_e \cdot \frac{R_{33} + R_2}{R_{33} + R_5 + R_{33} + R_2} = 12A \cdot \frac{3\Omega}{9\Omega} = 4A$

$$I_2 = 12A - I_5 = 8A$$

Innen tudjuk a keresett ellenállásokon a feszültség esés értékét is.

$$U_2 = I_2 \cdot R_2 = 8A \cdot 2\Omega = 16V \quad \text{és} \quad U_5 = I_5 \cdot R_5 = 4A \cdot 5\Omega = 20V$$

A huroktörvény alapján felírhatjuk a függőleges 3Ω -os ellenállás feszültségét:

$$U_3 = U_5 - U_2 = 20V - 16V = 4V$$

Továbbá mivel az $U_{AC} = 36V$ ezért a felső 3Ω -os ellenállás feszültsége: $U_{3f} = U_{AC} - U_5 = 16V$

Ugyanígy az alsó 3Ω -os ellenállás feszültsége: $U_{3a} = U_{AC} - U_2 = 20V$

A kör teljesítmény felvétele:

$$\sum P = \frac{U_5^2}{R_5} + \frac{U_2^2}{R_2} + \frac{U_3^2}{R_3} + \frac{U_{3f}^2}{R_3} + \frac{U_{3a}^2}{R_3} = \frac{(20V)^2}{5\Omega} + \frac{(16V)^2}{2\Omega} + \frac{(4V)^2}{3\Omega} + \frac{(16V)^2}{3\Omega} + \frac{(20V)^2}{3\Omega} = 432W$$

3.90 Mekkora a vonali áramok, ha $P_1 = 1,2kW$,

$P_2 = 3,6kW$ és $P_3 = 9,6kW$?

Megoldás:

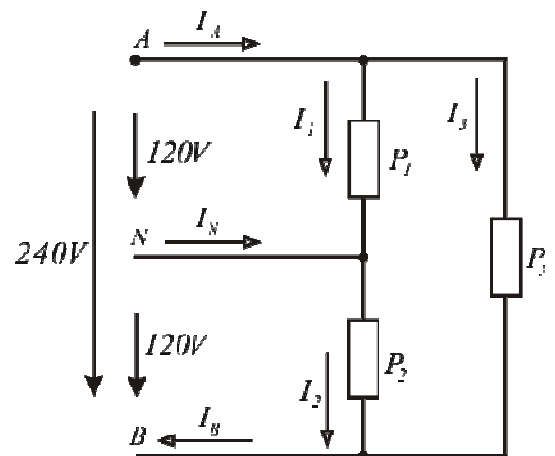
$$I_1 = \frac{P_1}{U_1} = \frac{1200W}{120V} = 10A$$

$$I_2 = \frac{P_2}{U_2} = \frac{3600W}{120V} = 30A$$

$$I_3 = \frac{P_3}{U_3} = \frac{9600W}{240V} = 40A$$

$$I_A = I_1 + I_3 = 50A, \quad I_N = I_2 - I_1 = 20A,$$

$$I_B = I_2 + I_3 = 70A$$



3.91 Mekkora feszültséget kell az AB pontok közé kapcsolni, hogy az $I_B = 0A$ legyen?

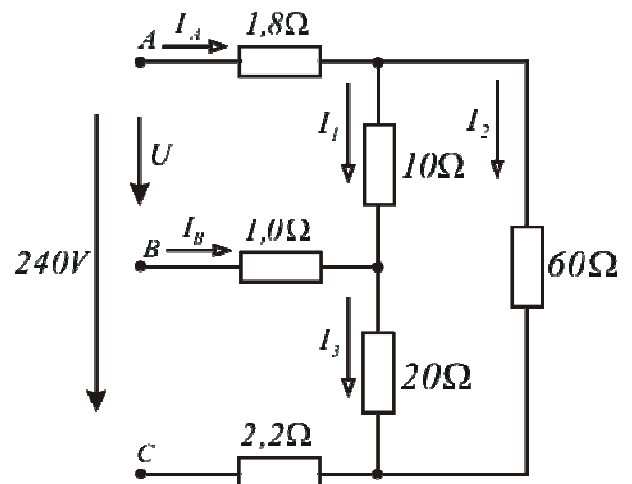
Megoldás:

$$R_{AC} = 1,8\Omega + (10\Omega + 20\Omega) \times 60\Omega + 2,2 = 24\Omega$$

$$I_A = \frac{U_{AC}}{R_{AC}} = \frac{240V}{24\Omega} = 10A$$

$$I_1 = I_A \cdot \frac{R_{60}}{R_{60} + R_{10} + R_{20}} = 10A \cdot \frac{60\Omega}{60\Omega + 30\Omega} = 6,67A$$

$$U_{AB} = 1,8\Omega \cdot 10A + 10\Omega \cdot 6,67A = 84,7V$$



Millman - tétel: Két csomópont közt mérhető feszültséget úgy kapunk meg, hogy az egyes ágak vezetéseinek és a velük sorba kapcsolt generátorok feszültségeinek szorzatát összegezzük, majd osztjuk valamennyi ág vezetéseinek az összegével.
 $U_{ab} = (G_1 U_1 + G_2 U_2 + \dots + G_n U_n) / (G_1 + G_2 + \dots + G_n)$

3.2.15. Határozzuk meg a kapcsolás I áramát és az egyes feszültség forrásokon átfolyó áramokat a Millman tétel segítségével!

$$U_1 = 100V, U_2 = 90V, R_t = 6\Omega$$

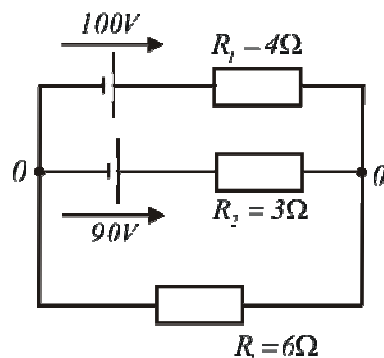
Megoldás:

A két ágáram kiszámításához határozzuk meg a 0' és 0 pont közötti feszültséget. Millman tételével:

$$U_{0'0} = \frac{U_1 \cdot Y_1 + U_2 \cdot Y_2}{Y_1 + Y_2 + Y_3} = \frac{-100V \cdot \frac{1}{4\Omega} + (-90V) \cdot \frac{1}{3\Omega}}{\frac{1}{4\Omega} + \frac{1}{3\Omega} + \frac{1}{6\Omega}} = -73,3V$$

$$I = \frac{U_{0'0}}{R_t} = \frac{73,3V}{6\Omega} = 12,22A \text{ Így a képen látható áramiránnyal megegyező irányút kapunk.}$$

$$I_1 = \frac{U_1 + U_{0'0}}{4\Omega} = \frac{100V - 73,3V}{4\Omega} = 6,65A \text{ és } I_2 = \frac{U_2 + U_{0'0}}{3\Omega} = \frac{90V - 73,3V}{3\Omega} = 5,56A$$



3.2.14. Határozzuk meg Millman tételével az ábrán adott hálózat egyes ágainak áramát, ha a feszültségforrások belső ellenállása elhanyagolhatóan kicsi és a három feszültségforrás értéke:

$$U_{12} = 5V, U_{23} = 12V, U_{43} = 4V$$

Megoldás:

Az 1-4 ág árama Ohm törvényével közvetlenül számítható:

$$I_{14} = \frac{U_{12} + U_{23} + U_{34}}{1000\Omega} = \frac{13V}{1000\Omega} = 13mA$$

A többi ágáram kiszámításához határozzuk meg a 2 és 0 pont közötti feszültséget.

Millman tételével:

$$U_{02} = \frac{U_{12} \cdot Y_1 + U_{23} \cdot Y_2 + U_{42} \cdot Y_4}{Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4}$$

$$U_{12} = +5V, \text{ és } U_{32} = -U_{23} = -12V \text{ és } U_{42} = -U_{23} - U_{34} = -12V + 4V = -8V$$

$$Y_1 = \frac{1}{500\Omega} = 2 \cdot 10^{-3} S, Y_2 = \frac{1}{250\Omega} = 4 \cdot 10^{-3} S, Y_3 = \frac{1}{200\Omega} = 5 \cdot 10^{-3} S, Y_4 = \frac{1}{400\Omega} = 2,5 \cdot 10^{-3} S$$

$$\text{Behelyettesítve: } U_{02} = \frac{5V \cdot 2 \cdot 10^{-3} S - 12V \cdot 5 \cdot 10^{-3} S - 8V \cdot 2,5 \cdot 10^{-3} S}{(2 + 4 + 5 + 2,5) \cdot 10^{-3} S} = -5,18V$$

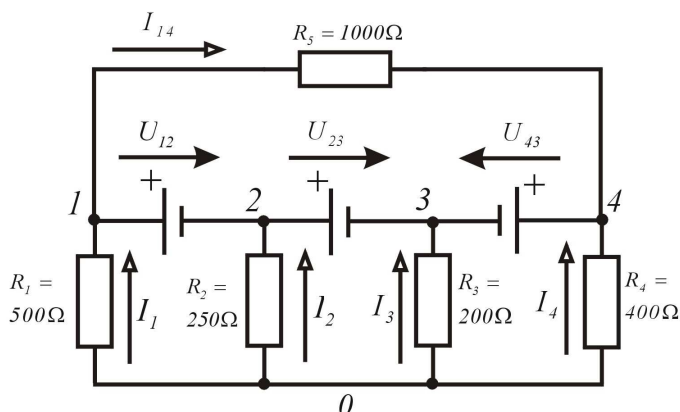
Az egyes ágak áramai Ohm törvényével:

$$I_2 = \frac{U_{02}}{R_2} = \frac{-5,18V}{250\Omega} = -20,7mA, I_1 = \frac{U_{01}}{R_1} = \frac{U_{02} - U_{12}}{R_1} = \frac{-5,18V - 5V}{500\Omega} = \frac{-10,18V}{500\Omega} = -20,4mA,$$

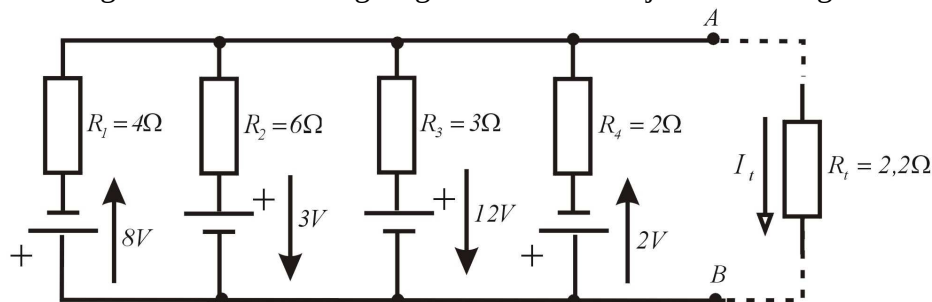
$$I_3 = \frac{U_{03}}{R_3} = \frac{U_{02} + U_{23}}{R_3} = \frac{-5,18V + 12V}{200\Omega} = \frac{6,82V}{200\Omega} = 34,1mA,$$

$$I_4 = \frac{U_{04}}{R_4} = \frac{U_{02} + U_{23} + U_{34}}{R_4} = \frac{-5,18V + 12V - 4V}{400\Omega} = \frac{2,82V}{400\Omega} = 7,06mA$$

$$\sum_0 I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = (-20,4 - 20,7 + 34,1 + 7,06) mA = -0,06 mA \approx 0mA$$



6.10 Határozza meg a Millman tétel segítségével a terhelésre jutó feszültség és áram nagyságát.



$$U_{AB} = \frac{U_1 \cdot Y_1 + U_2 \cdot Y_2 + U_3 \cdot Y_3 + U_4 \cdot Y_4}{Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4} = \frac{\frac{-8V}{4\Omega} + \frac{3V}{6\Omega} + \frac{12V}{3\Omega} + \frac{-2V}{2\Omega}}{\frac{1}{4\Omega} + \frac{1}{6\Omega} + \frac{1}{3\Omega} + \frac{1}{2\Omega}} = \frac{1,5 \frac{V}{\Omega}}{1,25 \frac{1}{\Omega}} = 1,2V$$

Vagy akár az alábbiak alapján is megkaphatjuk ugyan azt az eredményt:

$$R_{AB} = \frac{1}{Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4} = \frac{1}{\frac{1}{4\Omega} + \frac{1}{6\Omega} + \frac{1}{3\Omega} + \frac{1}{2\Omega}} = 0,8\Omega$$

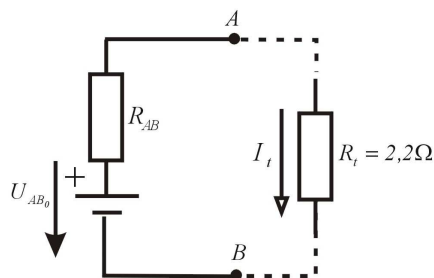
$$I_{AB} = -\frac{U_1}{R_1} + \frac{U_2}{R_2} + \frac{U_3}{R_3} - \frac{U_4}{R_4} = -\frac{8V}{4\Omega} + \frac{3V}{6\Omega} + \frac{12V}{3\Omega} - \frac{2V}{2\Omega} = 1,5A$$

Az AB pontokra jutó feszültség üresjáráskor:

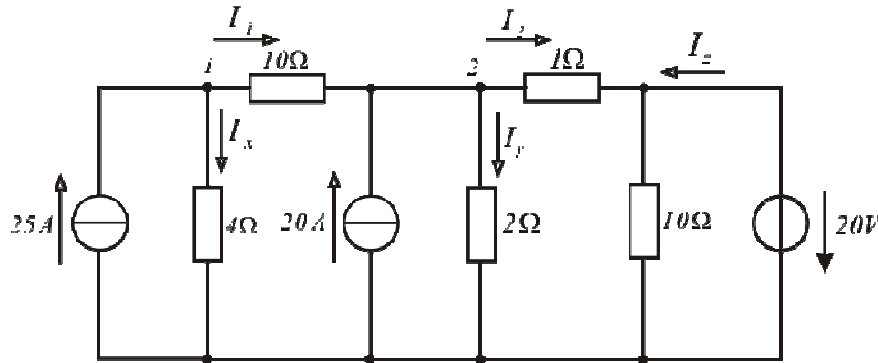
$$U_{AB_0} = I_{AB} \cdot R_{AB} = 1,5A \cdot 0,8\Omega = 1,2V$$

$$I_t = \frac{U_{AB}}{R_t + R_{AB}} = \frac{1,2V}{0,8\Omega + 2,2\Omega} = 0,4A$$

$$U_t = I_t \cdot R_t = 0,4A \cdot 2,2\Omega = 0,88V$$



4.27 Határozza meg U_X és I_X , I_Y , I_Z értékét, csomóponti potenciálok módszerével!



Megoldás:

Érdemes az áram generátorokat átváltani feszültség generátorokká:

1-es csomópontra felírva a csomóponti potenciálok módszerét: $I_{14} + I_2 + I_1 = 0$

$$\frac{U_X - 100V}{14} + \frac{U_X - 40V}{2} + \frac{U_X - 20V}{1} = 0$$

$$22 \cdot U_X = 660$$

$$U_X = 30V$$

Hurokegyenlettel megkaphatjuk az

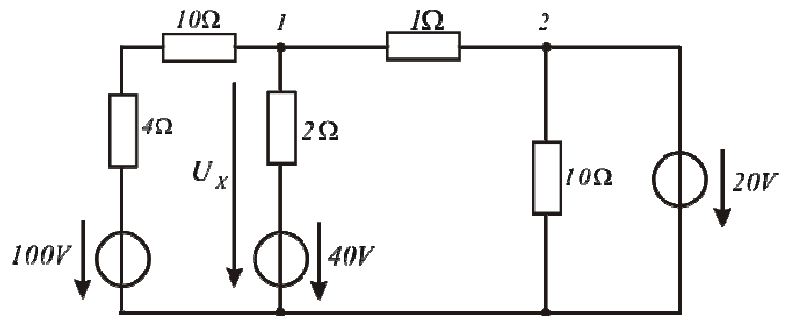
I_1 áramot:

$$I_1 \cdot 14\Omega + U_X - 100V = 0$$

$$I_1 = \frac{100V - U_X}{14\Omega} = 5A$$

$$I_2 \cdot 1\Omega - U_X + 20V = 0$$

$$I_2 = \frac{U_X - 20V}{1\Omega} = 10A$$



Csomóponti egyenleteket felírva az eredeti áramkörbe kapjuk meg a kívánt áramok értékeit.

$$25 = I_1 + I_X = 5A + I_X \quad I_X = 20A$$

$$20 = I_Y - I_1 + I_2 \quad I_Y = 15A$$

$$I_Z + I_2 - \frac{20V}{10\Omega} = 0 \quad I_Z = -8A$$

$$U_4 = 20A \cdot 4\Omega = 80V$$

$$U_4 = 15A \cdot 2\Omega = 30V$$

$$\sum P = U_{I_{25}} \cdot I_{25} + U_{I_{20}} \cdot I_{20} + U_{30} \cdot I_Z = 80V \cdot 25A + 30V \cdot 20A + 20V \cdot (-8A) = 2440W$$

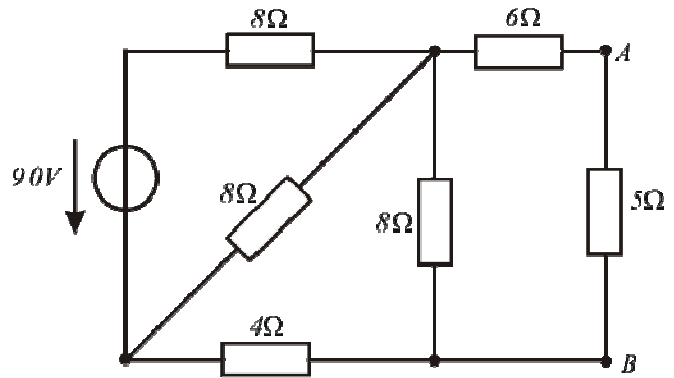
4.32 Határozza meg az AB pont áramát (I_3)!

Megoldás:

AB pontok felől helyettesítve az áramkört egy Thevenin generátorral, könnyen megkaphatjuk a keresett áramot.

$$R_{th} = R_{AB} = (8\Omega \times 8\Omega + 4\Omega) \times 8\Omega + 6\Omega =$$

$$= \left[\frac{8\Omega \cdot 8\Omega}{8\Omega + 8\Omega} + 4\Omega \right] \cdot 8\Omega + 6\Omega = 10\Omega$$



Az R_5 -ös ellenállást leválasztjuk. Mivel üresjárásban kell vizsgálnunk a feszültség nagyságát, belátható, hogy a R_6 -os ellenálláson sem folyik áram. Így felírható a generátort terhelő eredő ellenállás:

$$R_e = (8\Omega + 4\Omega) \times 8\Omega + 8\Omega = \frac{12\Omega \cdot 8\Omega}{12\Omega + 8\Omega} + 8\Omega = 12,8\Omega$$

$$\text{Innen a generátort terelő áram: } I_e = \frac{U}{R_e} = \frac{90V}{12,8\Omega} = 7,03A$$

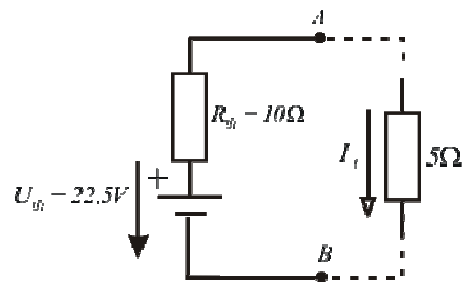
Az U_{AB} pontok közti feszültség üresjárásban megegyezik a 8Ω -os ellenálláson eső feszültség nagyságával. Ehhez szükség van a 8Ω -os ellenállás áramára, amely áramosztóval felírható:

$$I_8 = I_e \frac{R_8}{R_8 + R_4 + R_8} = 7,03A \cdot \frac{8\Omega}{8\Omega + 4\Omega + 8\Omega} = 2,812A$$

$$\text{Ezek alapján: } U_8 = I_8 \cdot R_8 = 2,812A \cdot 8\Omega = 22,5V \equiv U_{AB_0}$$

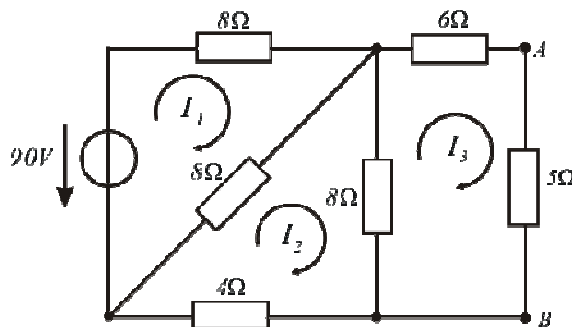
A kérdéses terhelő áram tehát:

$$I_t = \frac{U_{th}}{R_{th} + R_5} = \frac{22,5V}{10\Omega + 5\Omega} = 1,5A$$



II. megoldás, hurokáramok módszerével megoldva.

$$\begin{aligned} -90 + 8I_1 + 8I_1 - 8I_2 &= 0 \\ -8I_1 + (4 + 8 + 8)I_2 - 8I_3 &= 0 \\ -8I_2 + (6 + 5 + 8)I_3 &= 0 \\ \hline 8I_1 - 4I_2 &= 45 \\ -2I_1 + 5I_2 - 2I_3 &= 0 \\ -8I_2 + 19I_3 &= 0 \end{aligned}$$



$$D = \begin{vmatrix} 8 & -4 & 0 \\ -2 & 5 & -2 \\ 0 & -8 & 19 \end{vmatrix} = 8(5 \cdot 19 - 16) + 4(-38) = 632 - 38 \cdot 4 = 480$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 8 & -4 & 45 \\ -2 & 5 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \end{vmatrix} = 45 \cdot 16 = 720$$

$$\text{A kérdéses terhelő áram, egyenlő a harmadik kör hurokáramával: } I_t = I_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{720}{480} = 1,5A$$

4.39 Határozza meg R értékét úgy, hogy a két generátor teljesítménye egyforma legyen!

Megoldás:

A feladatot csomóponti potenciálok módszerével érdemes megoldani.

Elsőként írjuk fel az 1-es csomópont áramait:

$$1.) I_1 + I_2 = 5A$$

$$\frac{U_1}{R} + \frac{U_1 - 100V}{10\Omega} = 5A$$

A 2-es csomópontra felírva:

$$2.) I_2 + I_4 = I_3$$

$$\frac{U_1 - 100V}{10\Omega} + I_4 = \frac{100V}{20\Omega} = 5A$$

Két független egyenletet írtunk fél de 3 ismeretlen tartalmaz. Ezért még egy egyenletet fel kell írunk amit a peremfeltétel alapján tudunk megtenni, a generátorok teljesítmény egyenlőségét kihasználva.

$$3.) 100V \cdot I_4 = 5 \cdot U_1 \quad \Rightarrow I_4 = \frac{5 \cdot U_1}{100V}$$

$$1.) \text{ egyenletből: } \frac{U_1}{R} + \frac{U_1}{10} = 10 + 5$$

$$2.) \text{ egyenletből: } \frac{U_1}{10} - 10 + I_4 = 5 \quad \Rightarrow \frac{U_1}{10} + I_4 = 15$$

$$\text{Behelyettesítve az } I_4 \text{ értékét: } \frac{U_1}{10} + \frac{5 \cdot U_1}{100} = 15$$

$$10 \cdot U_1 + 5 \cdot U_1 = 1500$$

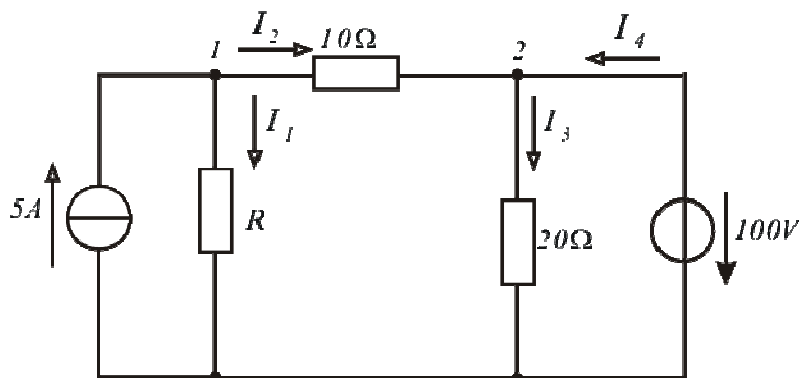
$$U_1 = 100V$$

R értékét az 1. egyenletbe vissza helyettesítve kaphatjuk meg.

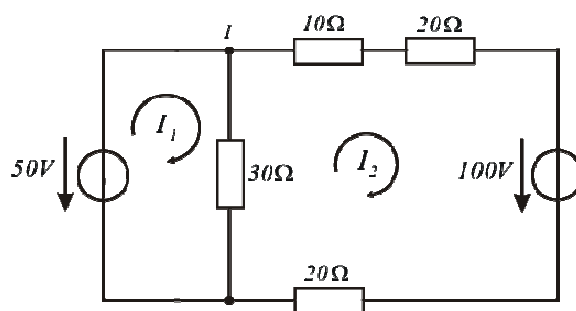
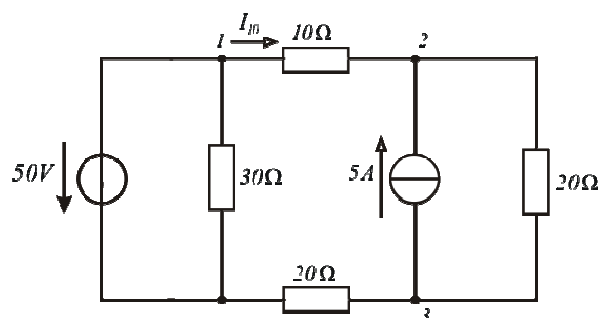
$$\frac{100}{R} + \frac{100}{10} = 10 + 5$$

$$100 + 10 \cdot R = 15 \cdot R$$

$$R = \frac{100}{5} = 20\Omega$$



4.40 Határozza meg 10Ω -os ellenállás áramát!



Megoldás:

Észre lehet venni, hogy az áramgenerátor feszültség generátorrá történő átalakítása után leegyszerűsödik az eredeti áramkör.

$$1.) -50V + 30 \cdot I_1 - 30 \cdot I_2 = 0$$

$$2.) 100V - 30 \cdot I_1 + 80 \cdot I_2 = 0$$

A két egyenletet összeadva: $50 \cdot I_2 = -50 \Rightarrow I_2 = -1A$. Az I_2 -es hurokáram pontosan megegyezik a 10Ω -os ellenálláson átfolyó I_{10} áram nagyságával.

$$\sum P = \frac{U_1^2}{R_{30}} + I_{10}^2 \cdot R_{10} + (5 + I_{10})^2 \cdot R_{20} + I_{10}^2 \cdot R_{20} = \frac{(50V)^2}{30\Omega} + 10W + (4A)^2 \cdot 20\Omega + 20W = 433,3W$$

II. megoldás csomóponti potenciálok segítségével: $I_U = I_{30} + I_{10}$; $I_{10} + 5A = I_{20}$; $I_{20} = 5 + I_2$

$$1. \text{ csomópont: } I_U = \frac{50V}{30\Omega} + \frac{50V - U_2}{10\Omega} \quad / \cdot 30$$

$$30 \cdot I_U + U_2 = 200$$

$$2. \text{ csomópont: } \frac{50V - U_2}{10\Omega} + 5 = \frac{U_2 - U_3}{20\Omega} \quad / \cdot 20$$

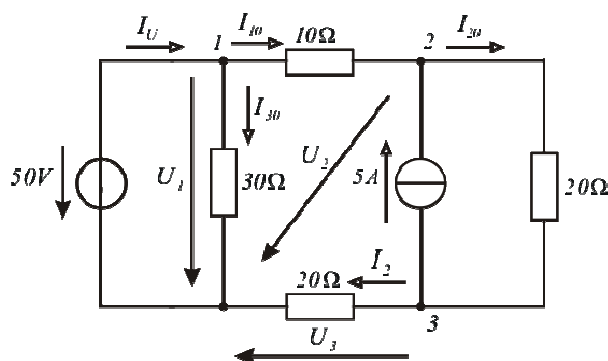
$$100 - 2 \cdot U_2 + 100 = U_2 - U_3$$

$$3 \cdot U_2 - U_3 = 200$$

$$3. \text{ csomópont: } \frac{U_2 - U_3}{20\Omega} - 5 = \frac{U_3}{20\Omega} \quad / \cdot 20$$

$$U_2 - U_3 = 100 + U_3$$

$$U_2 - 2 \cdot U_3 = 100$$



A 2-es és 3-as csomóponti egyenlet segítségével kapjuk:

$$U_2 + 2(200 - 3 \cdot U_2) = 100$$

$$U_2 + 400 - 6 \cdot U_2 = 100$$

$$U_2 = 60V$$

$$I_{10} = \frac{50 - U_2}{10\Omega} = \frac{50V - 60V}{10\Omega} = -1A$$

$$U_3 = -\left(\frac{100 - U_2}{2}\right) = -20V$$

$$U_{23} = 60 - (-20) = 80V$$

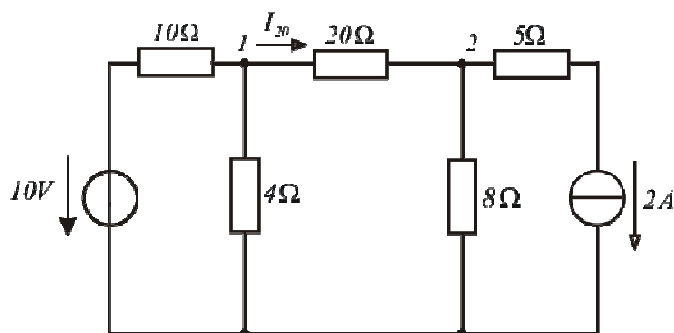
Határozza meg a két generátor által szolgáltatott teljesítményt (negatív):

$$\sum P = -(P_U + P_I) = -50V \cdot I_U - 80V \cdot 5A = -50V \cdot \left(\frac{50V}{30\Omega} - \frac{30}{30}A\right) - 80V \cdot 5A = -433,3W$$

Ennek meg kell egyeznie a fogyasztókon el disszipálódott teljesítmények összegével.

$$\sum P = \frac{U_1^2}{R_{30}} + I_{10}^2 \cdot R_{10} + \frac{U_3^2}{R_{20}} + \frac{U_{23}^2}{R_{20}} = \frac{(50V)^2}{30\Omega} + (-1A)^2 \cdot 10\Omega + \frac{(-20V)^2}{20\Omega} + \frac{(80V)^2}{20\Omega} = 433,3W$$

4.44 Mekkora a 20Ω -os ellenállás árama és teljesítménye?



Megoldás:

A csomóponti potenciálok segítségével oldva meg a példát, érdemes átalakítani a feszültség generátort áramgenerátorrá:

1. csomópont: $1A = I_{10} + I_4 + I_{20}$

$$1A = \frac{U_1}{10\Omega} + \frac{U_1}{4\Omega} + \frac{U_1 - U_2}{20\Omega} \quad / \cdot 20$$

$$20 = 2 \cdot U_1 + 5 \cdot U_1 + U_1 - U_2$$

$$20 = 8 \cdot U_1 - U_2$$

2. csomópont: $\frac{U_1 - U_2}{20\Omega} = 2A + \frac{U_2}{8\Omega} \quad / \cdot 160$

$$8 \cdot U_1 - 28 \cdot U_2 = 320$$

A kapott két csomóponti egyenletet kivonva egymásból:

$$27 \cdot U_2 = 300$$

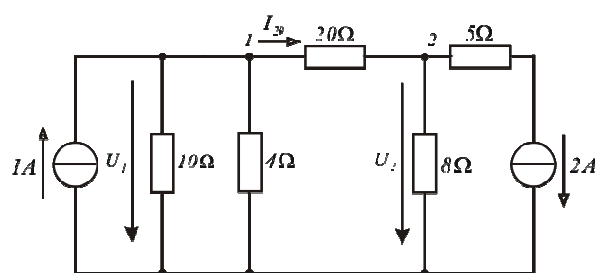
$$U_2 = -11,11V$$

Behelyettesítve az 1-es egyenletbe megkaphatjuk U_1 -et is:

$$U_1 = \frac{20 + U_2}{8} = 1,11V$$

$$I_{20} = \frac{U_1 - U_2}{20\Omega} = \frac{1,11 - (-11,11V)}{20\Omega} = 0,611A$$

$$P_{20} = I_{20}^2 \cdot R_{20} = (0,611A)^2 \cdot 20\Omega = 7,46W$$



4.20 Határozza meg az 1-es és 2-es csomópontban a potenciál nagyságát.

Megoldás:

A csomóponti potenciálok segítségével oldva meg a példát:

1. csomópont saját konduktanciája: $5s + 8s = 13s$

1 és 2-es csomópont közös konduktanciája: $8s$

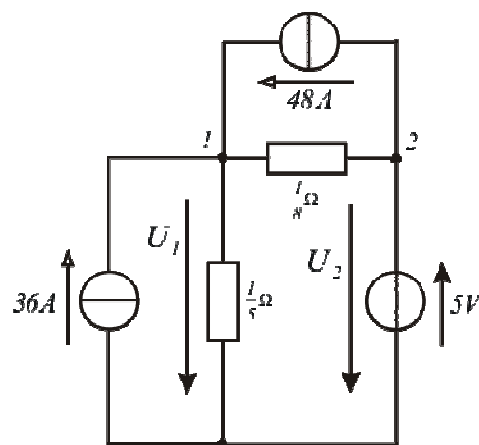
1-es csomópontba dolgozó generátorok összessége:

$48A(befolyó) + 36A(befolyó) = 84A$

1 csomóponti egyenlet: $13 \cdot U_1 - 8 \cdot U_2 = 84$

A 2. csomópont feszültsége: $U_2 = -5V$

$$13 \cdot U_1 - 8 \cdot (-5V) = 84 \quad U_1 = \frac{44V}{13\Omega} = 3,38V$$



4.21 Mekkora a 20Ω -os ellenállás árama és teljesítménye?

Megoldás:

A csomóponti potenciálok segítségével oldva meg a példát:

1. csomópont saját konduktanciája: $6s + 4s = 10s$

1 és 2-es csomópont közös konduktanciája: $6s$

1-es csomópontba dolgozó generátorok összessége:

$57A(\text{befolyó}) - 15A(\text{elfolyó}) = 42A$

1 csomóponti egyenlet: $10 \cdot U_1 - 6 \cdot U_2 = 42$

2. csomópont saját konduktanciája: $8s + 6s = 14s$

2 és 1-es csomópont közös konduktanciája: $6s$

2-es csomópontba dolgozó generátorok összessége:

$15A(\text{befolyó}) + 39A(\text{befolyó}) = 54A$

A 2 csomóponti egyenlet: $-6 \cdot U_1 + 14 \cdot U_2 = 54$

Az első egyenletet 3-al szorozva a másodikat 5-el szorozva és a két egyenletet összeadva kapjuk a végeredményt:

$$30 \cdot U_1 - 18 \cdot U_2 = 126$$

$$-30 \cdot U_1 + 70 \cdot U_2 = 270$$

$$52 \cdot U_2 = 126 + 270$$

$$U_2 = 7,62V$$

Visszahelyettesítve kaphatjuk meg a másik pont feszültségét: $10 \cdot U_1 - 6 \cdot 7,62 = 42$

$$U_1 = 8,77V$$

II. megoldási módszer:

$N_{cs} - 1 = 2$ tehát 2 független egyenlet írható fel az áramkörre. Ennek a mátrixa:

$$10 \cdot U_1 - 6 \cdot U_2 = 42$$

$$-6 \cdot U_1 + 14 \cdot U_2 = 54$$

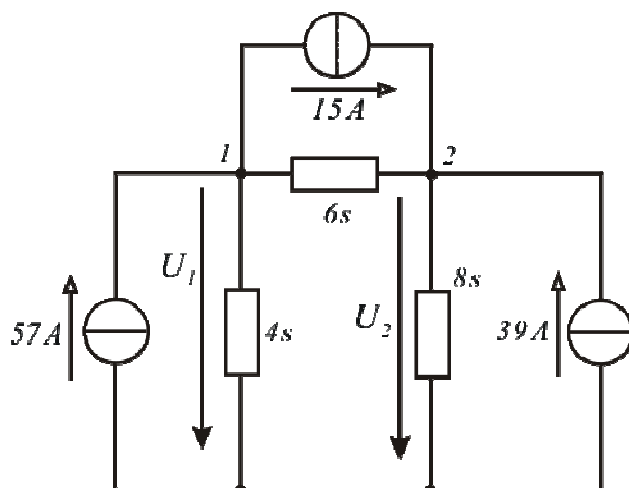
$$D = \begin{vmatrix} 10s & -6s \\ -6s & 14s \end{vmatrix} = 140 - 36 = 104$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 42 & -6s \\ 54 & 14s \end{vmatrix} = 588 + 324 = 912$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 10s & 42 \\ -6s & 54 \end{vmatrix} = 540 + 252 = 792$$

$$U_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{912}{104} = 8,77V$$

$$U_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{792}{104} = 7,62V$$



4.23 Mekkora a 3-as pont feszültsége?

Megoldás:

Érdemes a feszültség generátort áramgenerátorrá alakítani, és a csomóponti potenciálok segítségével megoldani a példát:

1. csomópont saját: $6s + 4s = 10s$

1 és 2-es csomópont közös: $5s$

2. csomópont saját: $6s + 5s = 11s$

1-es csomópontba dolgozó generátorok:

$75A(\text{befolyó}) - 65A(\text{elfolyó}) = 10A$

2-es csomópontba dolgozó generátorok

összessége: $65A(\text{befolyó}) - 13A(\text{elfolyó}) = 52A$

A kapott egyenletrendszer:

$$\begin{bmatrix} 9s & -5s \\ -5s & 11s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 52 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} 9 & -5 \\ -5 & 11 \end{vmatrix} = 9 \cdot 11 - 5 \cdot 5 = 74$$

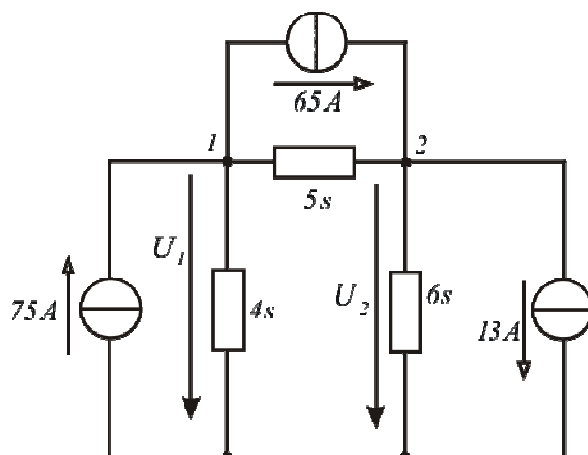
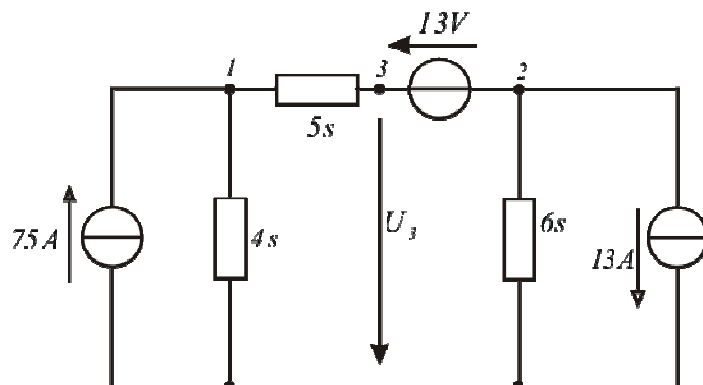
$$D_1 = \begin{vmatrix} 10 & -5 \\ 52 & 11 \end{vmatrix} = 110 + 260 = 370$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 9 & 10 \\ -5 & 52 \end{vmatrix} = 468 + 50 = 518$$

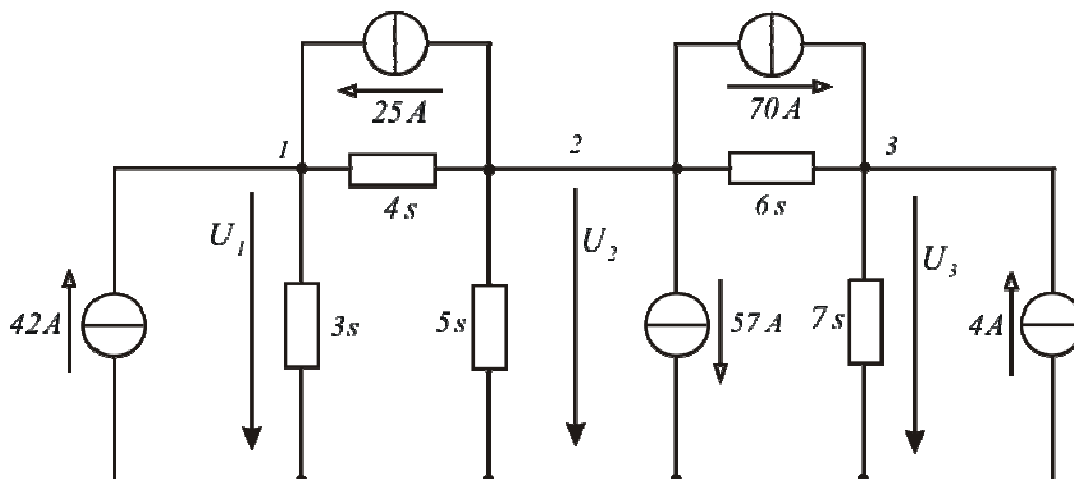
$$U_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{370}{74} = 5V$$

$$U_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{518}{74} = 7V$$

Végül a keresett U_3 pont feszültsége: $U_3 = U_2 - 13V = -6V$



4.25 Mekkora a 1-es, 2-es és 3-as csomópont feszültsége?



Megoldás:

A három csomóponti egyenlet:

$$7 \cdot U_1 - 4 \cdot U_2 - 0 \cdot U_3 = 42 + 25$$

$$-4 \cdot U_1 + 15 \cdot U_2 - 6 \cdot U_3 = -57 - 70 - 25$$

$$0 \cdot U_1 - 6 \cdot U_2 + 13 \cdot U_3 = 70 + 4$$

$$D = \begin{vmatrix} 7 & -4 & 0 \\ -4 & 15 & -6 \\ 0 & -6 & 13 \end{vmatrix} = 7(15 \cdot 13 - 36) + 4(-52 - 0) + 0 = 1113 - 208 = 905$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 67 & -4 & 0 \\ -152 & 15 & -6 \\ 74 & -6 & 13 \end{vmatrix} = 67(15 \cdot 13 - 36) + 4(-152 \cdot 13 + 6 \cdot 74) = 4525$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 7 & 67 & 0 \\ -4 & -152 & -6 \\ 0 & 74 & 13 \end{vmatrix} = 7(-152 \cdot 13 - 6 \cdot 74) - 67(-52 - 0) = -7240$$

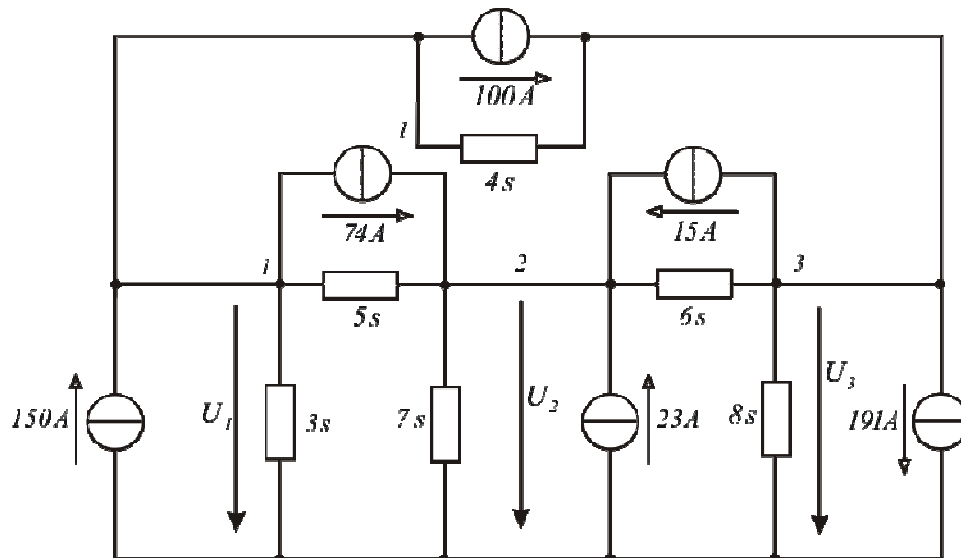
$$D_3 = \begin{vmatrix} 7 & -4 & 67 \\ -4 & 15 & -152 \\ 0 & -6 & 74 \end{vmatrix} = 7(15 \cdot 74 - 6 \cdot 152) + 4(-4 \cdot 74 - 0) + 67 \cdot 24 = 1810$$

$$U_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{4525}{905} = 5V$$

$$U_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-7240}{905} = -8V$$

$$U_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{1810}{905} = 2V$$

4.26 Határozza meg ekkora U_2 , I_7 , I_3 értékét!



Megoldás:

A három csomóponti egyenlet:

$$12 \cdot U_1 - 5 \cdot U_2 - 4 \cdot U_3 = 150 - 100 - 74$$

$$-5 \cdot U_1 + 18 \cdot U_2 - 6 \cdot U_3 = 74 + 23 + 15$$

$$-4 \cdot U_1 - 6 \cdot U_2 + 18 \cdot U_3 = 100 - 15 - 191$$

$$D = \begin{vmatrix} 12 & -5 & -4 \\ -5 & 18 & -6 \\ -4 & -6 & 18 \end{vmatrix} = 12(18 \cdot 18 - 36) + 5(-5 \cdot 18 - 24) - 4(30 + 4 \cdot 18) = 2478$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 12 & -24 & -4 \\ -5 & 112 & -6 \\ -4 & -106 & 18 \end{vmatrix} = 12(112 \cdot 18 - 6 \cdot 106) + 24(-5 \cdot 18 - 24) - 4(5 \cdot 106 + 4 \cdot 112) = 9912$$

$$U_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{9912}{2478} = 4V \text{ és a keresett áram: } I_7 = \frac{U_2}{R_7} = U_2 \cdot G_7 = 4V \cdot 7s = 28A$$

A harmadik kérdés megoldásához ki kell számolni az U_1 feszültség értékét is:

$$D_1 = \begin{vmatrix} -24 & -5 & -4 \\ 112 & 18 & -6 \\ -106 & -6 & 18 \end{vmatrix} = -24(18 \cdot 18 - 36) + 5(112 \cdot 18 - 106 \cdot 6) - 4(-6 \cdot 112 + 106 \cdot 18) = -4956$$

$$U_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-4956}{2478} = -2V \text{ és a keresett áram: } I_3 = \frac{U_1}{R_3} = U_1 \cdot G_3 = -2V \cdot 3s = -6A$$

Plusz kérdés lehet az 1-es csomópont minden áramának meghatározása:

$$D_3 = \begin{vmatrix} 12 & -5 & -24 \\ -5 & 18 & 112 \\ -4 & -6 & -106 \end{vmatrix} = 12(-106 \cdot 18 - 6 \cdot 112) + 5(106 \cdot 5 - 112 \cdot 4) - 24(30 + 4 \cdot 18) = -12390$$

$$U_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{-12390}{2478} = -5V$$

$$U_{12} = U_1 - U_2 = -2V - 4V = -6V \text{ és az ág árama: } I_5 = U_{12} \cdot G_5 = -6V \cdot 5s = -30A$$

$$U_{23} = U_2 - U_3 = 4V - (-5V) = 9V \text{ és a felső ág árama: } I_4 = (U_{12} + U_{23}) \cdot G_4 = 3V \cdot 4s = 12A$$

Tehát az 1-es csomópont árama: $150A + 6A + 30A - 12A - 100A - 74A = 0$.

Így a számításunk helyesnek bizonyult.

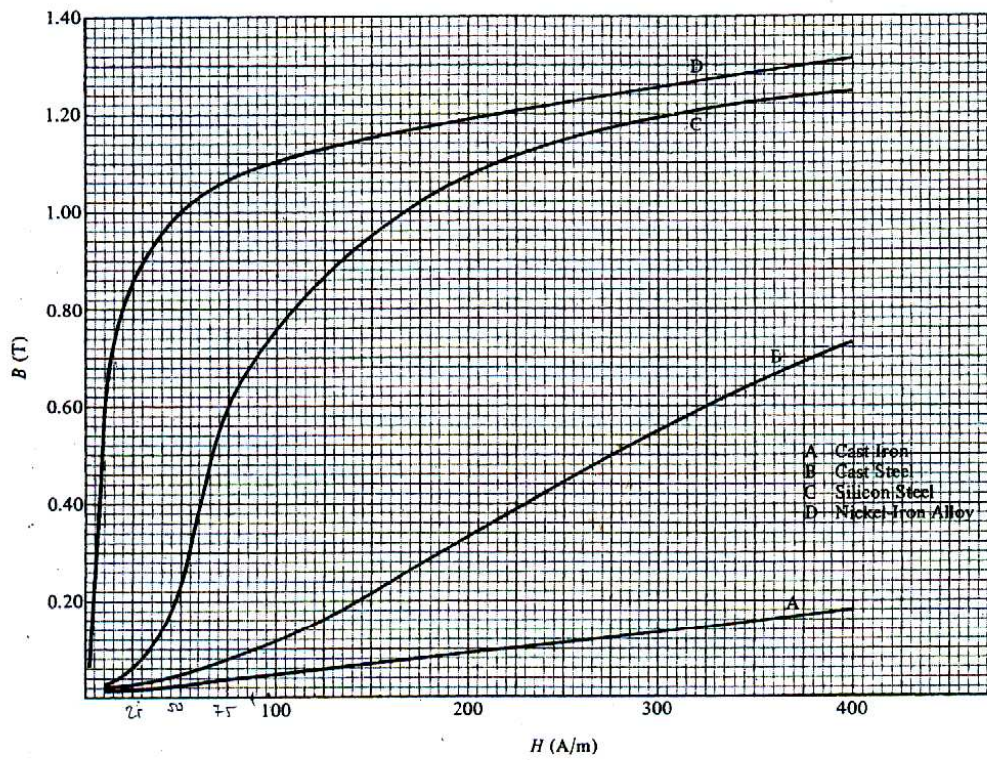


Fig. 11-12. B - H curves, $H < 400$ A/m

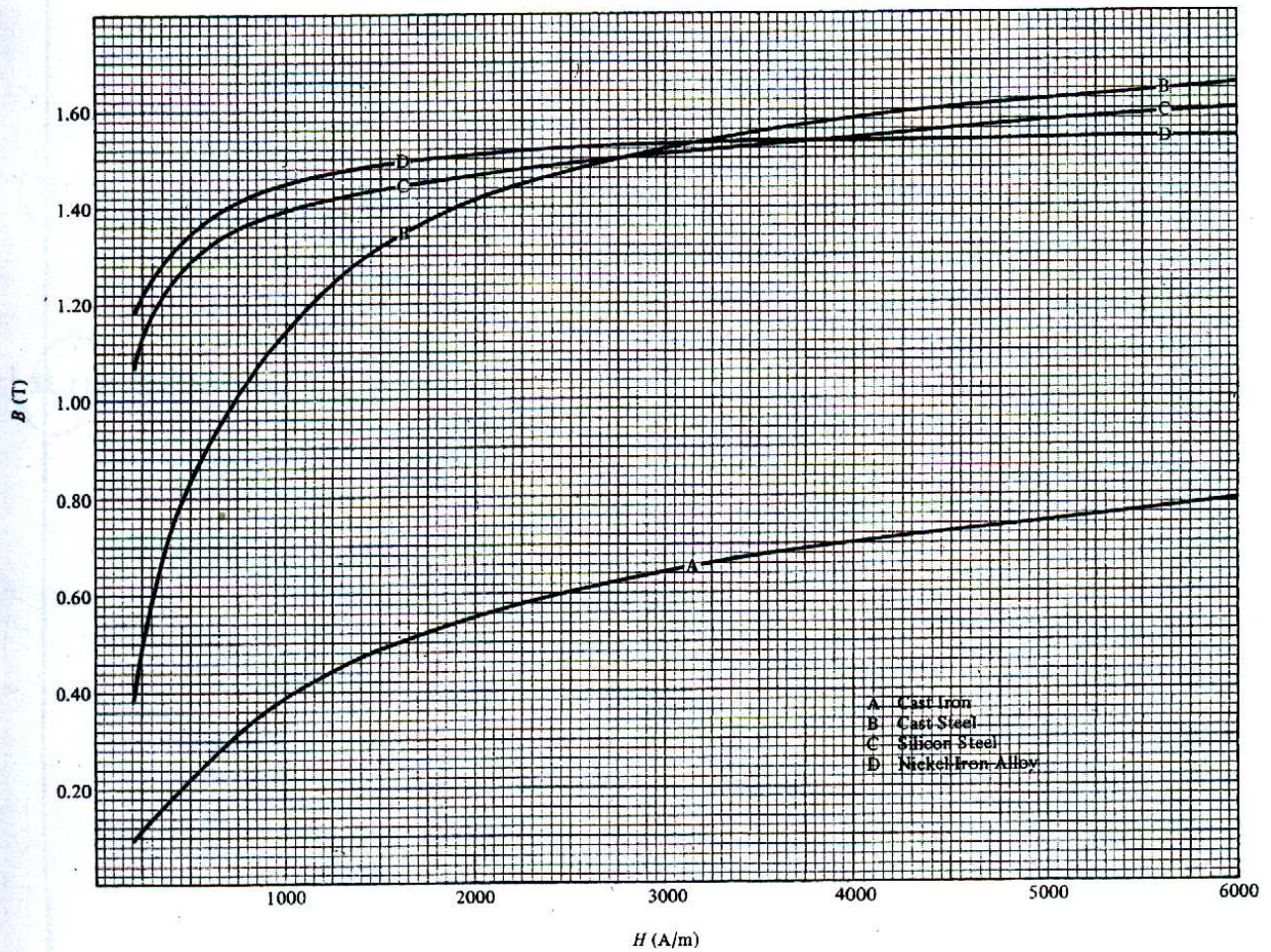


Fig. 11-13. B - H curves, $H > 400$ A/m

11.7 Az ábrán látható lemezelt vastest belső sugara 7cm a külső sugara 9cm. Határozza meg a Φ fluxus értékét, ha a vezetőben ismerjük gerjesztés (mágneses feszültség) értékét $\Theta = 500 \text{ A}$!

Mivel tudjuk, hogy:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu \cdot \sum I_k = \mu \cdot \Theta$$

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = H \cdot l = \Theta = U_m$$

$$\text{Mágneses indukció: } \vec{B} = \mu \cdot \vec{H} = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \vec{H},$$

$$\text{Mágneses térerősség: } H = \frac{N \cdot I}{l} = \frac{\Theta}{l} = \frac{U_m}{l} = \frac{R_m \cdot \Phi}{l},$$

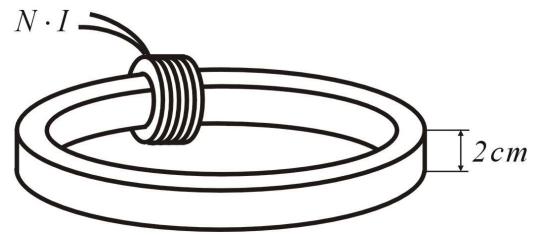
$$H = \frac{\Phi}{\mu \cdot A}$$

$$\text{Fluxus: } \Phi = B \cdot A = \frac{\Theta}{R_m},$$

$$\text{Gerjesztés: } \Theta = H \cdot l = N \cdot I = U_m$$

$$\text{Mágneses ellenállás: } R_m = \frac{l}{\mu \cdot A} = \frac{l}{\mu_0 \cdot \mu_r \cdot A},$$

$$\text{Mágneses ohm törvény: } N \cdot I = \Phi \cdot R_m = \Phi \cdot \frac{l}{\mu \cdot A},$$



$$\text{A közepes erővonal hossz értéke: } l = 2 \cdot \pi \cdot 0,08 \text{ m} = 0,503 \text{ m}$$

$$\text{Így már számítható a mágneses térerősség: } H = \frac{\Theta}{l} = \frac{500 \text{ A}}{0,503 \text{ m}} = 995 \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

$$\text{A } H \text{ ismeretében a megadott } B-H \text{ diagram alapján leolvasható a } B \text{ értéke: } B = 0,4 \text{ T}$$

$$\Phi = B \cdot A = 0,4 \text{ T} \cdot (0,02 \text{ m}) \cdot (0,09 \text{ m} - 0,07 \text{ m}) = 0,16 \text{ mWb}$$

11.8 Az alábbi ábrán látható a következő mágneses kör, aminek 2 alkotóeleme van. Az 1. egy C alakú lemezelt acél test, a 2. rész egy I alakú lemezelt vas test. Határozza meg a 150 menetű tekercsben folyó áram nagyságát ha a $B_2 = 0,45 \text{ T}$

Elsőként az A keresztmetszeteket kell kiszámítanunk:

$$A_1 = 0,02 \text{ m} \cdot 0,02 \text{ m} = 4 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$$

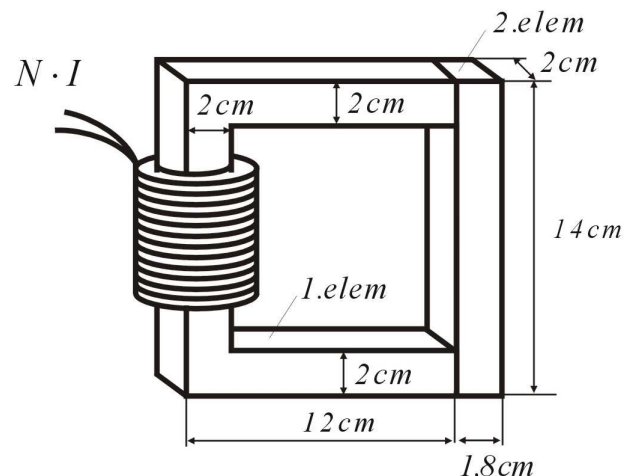
$$A_2 = 0,018 \text{ m} \cdot 0,02 \text{ m} = 3,6 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$$

A közepes erővonal hossz értéke a C elem esetén:

$$l_1 = 0,11 + 0,11 + 0,12 = 0,34 \text{ m}$$

A közepes erővonal hossz értéke a I elem esetén:

$$l_2 = 0,12 + 0,009 + 0,009 = 0,138 \text{ m}$$



$$\text{A } B_2 \text{ ismeretében a } B-H \text{ diagram alapján leolvasható a } H_2 \text{ értéke: } H_2 = 1270 \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

$$\text{Fluxus: } \Phi = B_2 \cdot A_2 = 0,45 \text{ T} \cdot 3,6 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 = 1,62 \cdot 10^{-4} \text{ Wb},$$

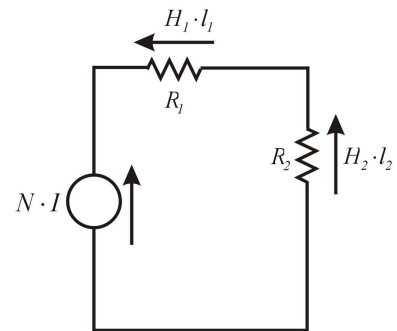
Így a mágneses indukció már számítható, mivel a két vas részben a fluxus értéke állandó:

$$B_1 = \frac{\Phi}{A_1} = \frac{1,62 \cdot 10^{-4} \text{ Wb}}{4 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2} = 0,41 \text{ T},$$

A B_1 ismeretében a $B-H$ diagram alapján leolvasható a H_1 értéke: $H_1 = 233 \frac{\text{A}}{\text{m}}$

Így már fel írhatjuk a mágneses kör helyettesítő kapcsolását:

$$\begin{aligned}\Theta &= U_m = \sum_{i=1}^n H_i \cdot l_i \\ \Theta &= U_m = N \cdot I = H_1 \cdot l_1 + H_2 \cdot l_2 \\ 150 \cdot I &= 233 \frac{\text{A}}{\text{m}} \cdot 0,34 \text{ m} + 1270 \frac{\text{A}}{\text{m}} \cdot 0,138 \text{ m} \\ I &= 1,7 \text{ A}\end{aligned}$$



11.9 Az alábbi ábrán látható a következő mágneses kör, amelynek lemezelt vastestének közepes erővonalhossza $l_1 = 0,44 \text{ m}$ és az átmérője négyzet keresztmetszet: $0,02 \text{ m} \times 0,02 \text{ m}$. A légrés hossza $l_{\text{lég}} = 2 \text{ mm}$ és a vastesten lévő tekercs 400-menetet tartalmaz. Határozza meg az I áram értékét, ha a légrés fluxusa $\Phi_{\text{lég}} = 0,141 \text{ mWb}$.

A légrés fluxusa megegyezik a vastest fluxusával.

$$B_{\text{vas}} = \frac{\Phi}{A_{\text{vas}}} = \frac{0,141 \cdot 10^{-3} \text{ Wb}}{4 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2} = 0,35 \text{ T}$$

A B_{vas} ismeretében a $B-H$ diagram alapján

leolvasható a H_{vas} értéke: $H_{\text{vas}} = 850 \frac{\text{A}}{\text{m}}$

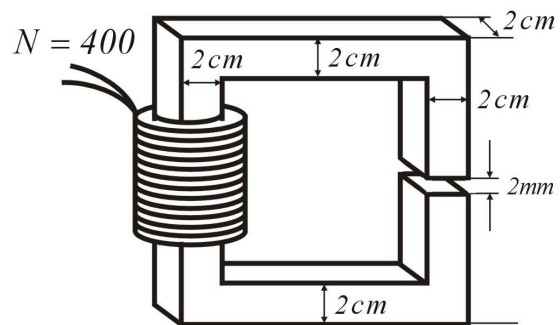
Majd: $U_{m(v)} = H_{\text{vas}} \cdot l_{\text{vas}} = 850 \frac{\text{A}}{\text{m}} \cdot 0,44 \text{ m} = 374 \text{ A}$

A légrés esetén egy bizonyos erővonal szóródással is kell számolnunk, ezt egy plusz tényezővel vehetjük figyelembe. $A_{\text{lég}} = (0,02 + 0,002)^2 = 4,84 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$

$$\text{Ezekből: } H_{\text{lég}} \cdot l_{\text{lég}} = \frac{\Phi}{\mu_0 \cdot A_{\text{lég}}} \cdot l_{\text{lég}} = \frac{0,141 \cdot 10^{-3} \text{ Wb}}{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot 4,84 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2} \cdot 2 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 464 \text{ A}$$

Összegezve a két mágneses feszültséget: $\Theta = U_m = H_{\text{vas}} \cdot l_{\text{vas}} + H_{\text{lég}} \cdot l_{\text{lég}} = 374 \text{ A} + 464 \text{ A} = 838 \text{ A}$

Tehát a keresett áram: $I = \frac{U_m}{N} = \frac{838 \text{ A}}{400} = 2,09 \text{ A}$ amelynél a fluxus a megadott értékű.



11.10 Határozza meg a légrés mágneses ellenállását, egy egyenáramú gép esetén. Ha a légrés felülete $A_{\text{lég}} = 4,26 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2$, és a rés hossza $l_{\text{lég}} = 5,6 \text{ mm}$!

$$R_m = \frac{l_{\text{lég}}}{\mu_0 \cdot A_{\text{lég}}} = \frac{5,6 \cdot 10^{-3} \text{ m}}{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot 4,26 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2} = 1,05 \cdot 10^5 \frac{1}{\text{H}}$$

11.11 A lemezelte vasból felépített mágneses kör a képen látható $A_{\text{vas}} = 4\text{cm}^2$, és a közepes erővonalhossza $l_{\text{vas}} = 0,438\text{m}$. A légrés hossza $l_{\text{lég}} = 2\text{mm}$, és a légrés felülete a szóródást is beleértve $A_{\text{lég}} = 4,84\text{cm}^2$

A „k” konstans innen visszaszámolható ebben esetben. $A_{\text{lég}} = A_{\text{vas}} \cdot k$

A gerjesztésnek ebben az esetben 2 összetevője van ami tudjuk hogy 1000A .

$$\Theta = U_m = H_{\text{vas}} \cdot l_{\text{vas}} + H_{\text{lég}} \cdot l_{\text{lég}} = 1000\text{A}$$

Mivel tudjuk, hogy a lemezelte vas nem a legjobb mágneses tulajdonságokkal bíró anyag

ezért feltételezhetjük, hogy a légrésben lesz nagyobb a $H \cdot l$ szorzat értéke.

Mivel semmilyen más adatunk nincs az arányuk kiszámítására, ezért feltételezünk egy értéket!

$$H_{\text{lég}} \cdot l_{\text{lég}} = 600\text{A}$$

$$H_{\text{lég}} \cdot l_{\text{lég}} = \frac{\Phi}{\mu_0 \cdot A_{\text{lég}}} \cdot l_{\text{lég}} \Rightarrow \Phi \text{ számítható:}$$

$$\Phi = \frac{H_{\text{lég}} \cdot l_{\text{lég}} \cdot \mu_0 \cdot A_{\text{lég}}}{l_{\text{lég}}} = \frac{600\text{A} \cdot 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot 4,84 \cdot 10^{-4} \text{m}^2}{2 \cdot 10^{-3} \text{m}} = 1,82 \cdot 10^{-4} \text{Wb}$$

$$B_{\text{vas}} = \frac{\Phi}{A_{\text{vas}}} = \frac{1,82 \cdot 10^{-4} \text{Wb}}{4 \cdot 10^{-4} \text{m}^2} = 0,46\text{T}$$

A B_{vas} ismeretében a $B-H$ diagram alapján leolvasható a H_{vas} értéke: $H_{\text{vas}} = 1340 \frac{\text{A}}{\text{m}}$

$$H_{\text{vas}} \cdot l_{\text{vas}} = 1340 \frac{\text{A}}{\text{m}} \cdot 0,438\text{m} = 587\text{A}$$

$$H_{\text{vas}} \cdot l_{\text{vas}} + H_{\text{lég}} \cdot l_{\text{lég}} = 587\text{A} + 600\text{A} = 1187\text{A}, \text{ de ez maximum } 1000 \text{ lehet!}$$

A feltételezésünk soknak bizonyult, így a vasban az indukció kevesebb, mint $B_{\text{vas}} = 0,46\text{T}$.

A mágneses körök esetén a Φ állandó, analógia fedezhető fel az árammal soros körök esetén.

$$\vec{B} = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \vec{H} \text{ -ből kifejezve a } \mu_0 \cdot \mu_r \text{ értékét.}$$

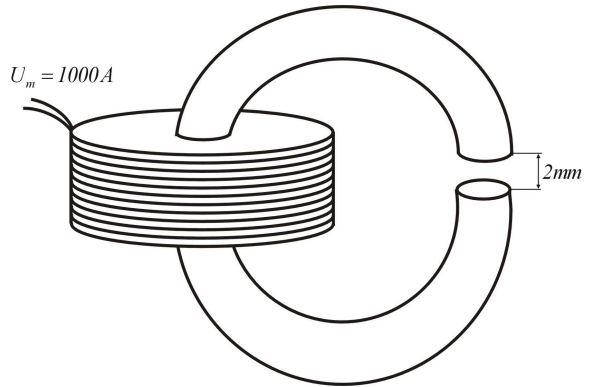
$$\frac{B_{\text{vas}}}{H_{\text{vas}}} = \mu_0 \cdot \mu_r = \frac{0,41\text{T}}{1070 \frac{\text{A}}{\text{m}}} = 3,83 \cdot 10^{-4} \frac{\text{H}}{\text{m}}$$

$$R_{\text{vas}} = \frac{l_{\text{vas}}}{\mu_0 \cdot \mu_r \cdot A_{\text{vas}}} = \frac{0,438\text{m}}{3,83 \cdot 10^{-4} \cdot 4 \cdot 10^{-4} \text{m}^2} = 2,86 \cdot 10^6 \frac{1}{\text{H}}$$

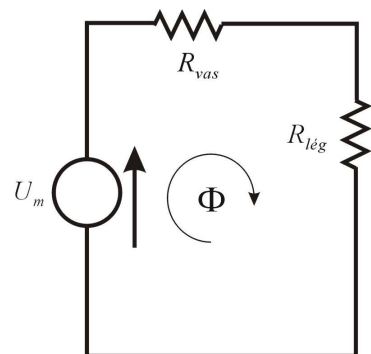
$$R_{\text{lég}} = \frac{l_{\text{lég}}}{\mu_0 \cdot A_{\text{lég}}} = \frac{2 \cdot 10^{-3} \text{m}}{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot 4,84 \cdot 10^{-4} \text{m}^2} = 3,29 \cdot 10^6 \frac{1}{\text{H}}$$

$$\Theta = U_m = \Phi (R_{\text{vas}} + R_{\text{lég}})$$

$$\Phi = \frac{1000\text{A}}{2,86 \cdot 10^6 \frac{1}{\text{H}} + 3,29 \cdot 10^6 \frac{1}{\text{H}}} = 1,63 \cdot 10^{-4} \text{Wb}$$



az



$$H_{\text{lég}} \cdot l_{\text{lég}} = 450 \text{ A}$$

$$\Phi = \frac{H_{\text{lég}} \cdot l_{\text{lég}} \cdot \mu_0 \cdot A_{\text{lég}}}{l_{\text{lég}}} = \frac{450 \text{ A} \cdot 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot 4,84 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2}{2 \cdot 10^{-3} \text{ m}} = 1,64 \cdot 10^{-4} \text{ Wb}$$

$$B_{\text{vas}} = \frac{\Phi}{A_{\text{vas}}} = \frac{1,64 \cdot 10^{-4} \text{ Wb}}{4 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2} = 0,41 \text{ T}$$

A B_{vas} ismeretében a $B-H$ diagram alapján leolvasható a H_{vas} értéke: $H_{\text{vas}} = 1270 \frac{\text{A}}{\text{m}}$

$$H_{\text{vas}} \cdot l_{\text{vas}} = 1270 \frac{\text{A}}{\text{m}} \cdot 0,438 \text{ m} = 546,1 \text{ A}$$

$$H_{\text{vas}} \cdot l_{\text{vas}} + H_{\text{lég}} \cdot l_{\text{lég}} = 546,1 \text{ A} + 450 \text{ A} = 996,1 \text{ A}.$$

11.20 Egy légmagos szolenoid tekercs méretei: a hossza $l=20\text{cm}$, az átmérője $D=5\text{cm}$, a menetszám $N=500$. Mekkora a tekercs belsejében a mágneses térerősség, az indukció és a fluxus, ha a tekercsben folyó áram 1A ?

$$H = \frac{N \cdot I}{l} = \frac{500 \cdot 1 \text{ A}}{0,2} = 2500 \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

$$B_{\text{vas}} = \mu_0 \cdot H = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{H}}{\text{m}} \cdot 2500 \frac{\text{A}}{\text{m}} = 3,14 \text{ mT}$$

$$\Phi = B \cdot A = 3,14 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{2,5 \cdot 10^{-4} \cdot \pi}{4} = 6,17 \mu\text{Wb}$$

11.40 Réz huzalból 1000 menetet csévélünk egy nem mágnesezhető anyagból készült toroid alakú gyűrűre. A Gyűrű közepes átmérője 25cm , keresztmetszete 25cm^2 ($\mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{H}}{\text{m}}$)

Mekkora a fluxus a gyűrűben, ha a tekercsbe 4A -es áramot vezetünk?

Mekkora a tekercs induktivitása?

$$R_m = \frac{1}{\mu_0} \cdot \frac{l}{A} = \frac{1}{\mu_0} \cdot \frac{2 \cdot r \cdot \pi}{A} \cdot \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{H}}{\text{m}}} \cdot \frac{25 \cdot 10^{-2} \cdot 3,14 \text{ m}}{25 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2} = 25 \cdot 10^9 \frac{1}{\text{H}}$$

$$\Phi = \frac{\Theta}{R_m} = \frac{N \cdot I}{R_m} = \frac{1000 \cdot 4 \text{ A}}{25 \cdot 10^9 \frac{1}{\text{H}}} = 16 \mu\text{Wb}$$

$$L = \frac{N^2}{R_m} = \frac{1000^2}{25 \cdot 10^9 \frac{1}{\text{H}}} = 4 \text{ mH}$$

Váltakozó feszültségű példák

10.10 Határozza meg a $u = 70 \cdot \sin(400 \cdot \pi \cdot t) [V]$ függvény pillanatértékét $t = 3ms$ -nál.

Megoldás:

(rad)

(fokban)

$$u_{3ms} = 70 \cdot \sin(400 \cdot \pi \cdot 3 \cdot 10^{-3}) = 70 \cdot \sin(1,2 \cdot \pi) = 70 \cdot \sin(1,2 \cdot \pi \cdot \frac{180}{\pi}) = -41,1V$$

$$u_{3ms} = 70 \cdot \sin(216^\circ) = -41,1V$$

10.11 Egy szinuszos áram csúcsértéke $\hat{i} = 58mA$. A körfrekvencia radiánban: $\omega = 90 \frac{rad}{s}$.

Határozza meg az áram függvény pillanatértékét $t = 23ms$ -nál.

Megoldás:

A megadott áram időfüggvénye: $i = 58 \cdot \sin(90 \cdot t) [mA]$

$$i_{23ms} = 58 \cdot \sin(90 \cdot 23 \cdot 10^{-3}) = 58 \cdot \sin(2,07) = 58 \cdot \sin(2,07 \cdot \frac{180}{\pi}) = 50,7mA$$

$$i_{23ms} = 58 \cdot \sin(118,6^\circ) = 50,7mA$$

Emlékeztető trigonometriából:

$$\begin{aligned} \cos 2x &= \sin^2 x - \cos^2 x \\ \sin^2 x &= \frac{1 - \cos 2x}{2} \\ \sin(x + y) &= \sin x \cdot \cos y + \sin y \cdot \cos x \\ \sin 2x &= 2 \sin x \cdot \cos x \end{aligned}$$

10.18 Határozza meg az alábbi függvények periódus idejét:

a.,) $f_1 = 7 - 4 \cos(400t + 30^\circ)$,

b.,) $f_2 = 3 \sin^2 4t$,

c.,) $f_3 = 4 \cdot \cos 3t \cdot \sin 3t$.

Megoldás:

a.,) A periódusidőbe az egyen összetevő nem szól bele. Így csak a függvény második részét kell vizsgálnunk $-4 \cos(400t + 30^\circ)$.

Mivel tudjuk, hogy: $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$ és a periódus idő $T = \frac{1}{f}$, tehát: $T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega} = \frac{2 \cdot \pi}{400 \frac{1}{s}} = 15,7 \text{ ms}$

b.,) felhasználva az ismert trigonometrikus összefüggést: $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$

$$3 \cdot \sin^2 4t = 3 \cdot \frac{1 - \cos(2 \cdot 4t)}{2} = 1,5(1 - \cos(2 \cdot 4t)) = 1,5 - 1,5 \cos 8t$$

Így már olyan alakot kaptunk, amiből jól látható körfrekvencia értéke: $T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega} = \frac{2 \cdot \pi}{8 \frac{1}{s}} = 0,785 \text{ s}$

c.,) Az alábbi trigonometrikus összefüggésből: $\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x$ továbbá $\sin x \cdot \cos x = \frac{\sin 2x}{2}$

$$4 \cdot \cos 3t \cdot \sin 3t = 4 \left[\frac{\sin 2 \cdot 3t}{2} \right] = 2 \cdot \sin 6t$$

Innen már jól látható körfrekvencia értéke: $T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega} = \frac{2 \cdot \pi}{6 \frac{1}{s}} = 1,05 \text{ s}$

10.20 Határozza meg a két áram közötti szögeltérés értékét, ha $i_1 = 3,1 \cdot \sin(754 \cdot t - 20^\circ) [\text{mA}]$ és hozzá képest siet $i_2 = -2,4 \cdot \cos(754 \cdot t + 30^\circ) [\text{mA}]$.

Megoldás:

A második függvényt is $\sin$ alapúra kell hoznunk, hogy lássuk tisztán a szögeltérést a kettő között: Tudjuk, hogy: $-\cos x = \cos(x \pm 180^\circ)$ továbbá $\cos x = \sin(x + 90^\circ)$

$$i_2 = -2,4 \cdot \cos(754 \cdot t + 30^\circ) = 2,4 \cdot \cos(754 \cdot t \overset{+210^\circ}{-150^\circ}) = 2,4 \cdot \sin(754 \cdot t \overset{+300^\circ}{-60^\circ}) [\text{mA}]$$

Így már jól látható az áramok közötti szög eltérés: $-20^\circ - (300^\circ) = -320^\circ$
 $-20^\circ - (-60^\circ) = 40^\circ$

10.21 Egy egyszerű áramköri elemen a következő értékeket mértük $i = 34,1 \cdot \sin(400 \cdot t + 10^\circ) [mA]$ és $u = 40 \cdot \sin(400 \cdot t + 10^\circ) [V]$. Mi ez az elem?

Megoldás:

A két függvény jól látható módon azonos fázisban van. Az áram és a feszültség között a fázis eltérés nulla fok, tehát a mért elem egy ellenállás.

Az értéke pedig: $R = \frac{U_m}{I_m} = \frac{40V}{34,0 \cdot 10^{-3} A} = 1,17 k\Omega$

10.26 Egy 30Ω -os ellenálláson a feszültség függvény a következő $u = 170 \cdot \sin(377 \cdot t + 30^\circ) [V]$. Mekkora átlagos teljesítmény disszipálódik ezen az elemen?

Megoldás:

Mivel ezen az elemen az áram és a feszültség azonos fázisban van. A teljesítményt az alábbi

képlettel számíthatjuk. $P_{\text{átlag}} = \frac{U^2}{R} = \frac{\left(\frac{U_m}{\sqrt{2}}\right)^2}{R} = \frac{U_m^2}{2 \cdot R} = \frac{170V^2}{2 \cdot 30\Omega} = 482W$

10.27 Mekkora egy 27Ω -os ellenállás átlag teljesítménye, ha árama $i = 1,2 \cdot \sin(377 \cdot t + 30^\circ) A$?

Megoldás:

Mivel ezen az elemen az áram és a feszültség azonos fázisban van. A teljesítményt az alábbi

képlettel számíthatjuk. $P_{\text{átlag}} = I^2 \cdot R = \left(\frac{I_m}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot R = \frac{1}{2} I_m^2 \cdot R = \frac{1}{2} \cdot 1,2^2 A^2 \cdot 27\Omega = 1,94W$

10.38 Egy induktivitásra kapcsolt feszültsége $u = 30 \cdot \sin(200\pi \cdot t + 30^\circ) [V]$ amelynek reaktanciája 62Ω -os. Határozza meg az induktivitás áramának időfüggvényét!

Megoldás:

Az induktivitás árama késik 90° -ot a feszültségéhez képest.

$$X_L = 62\Omega$$

$$i_m = \frac{30V}{62\Omega} = 0,484A$$

$$i = 0,484 \cdot \sin(200 \cdot \pi \cdot t + 30^\circ - 90^\circ) = 0,484 \cdot \sin(200 \cdot \pi \cdot t - 60^\circ) [A]$$

$$T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega} = \frac{2 \cdot \pi}{200 \cdot \pi} = 10ms$$

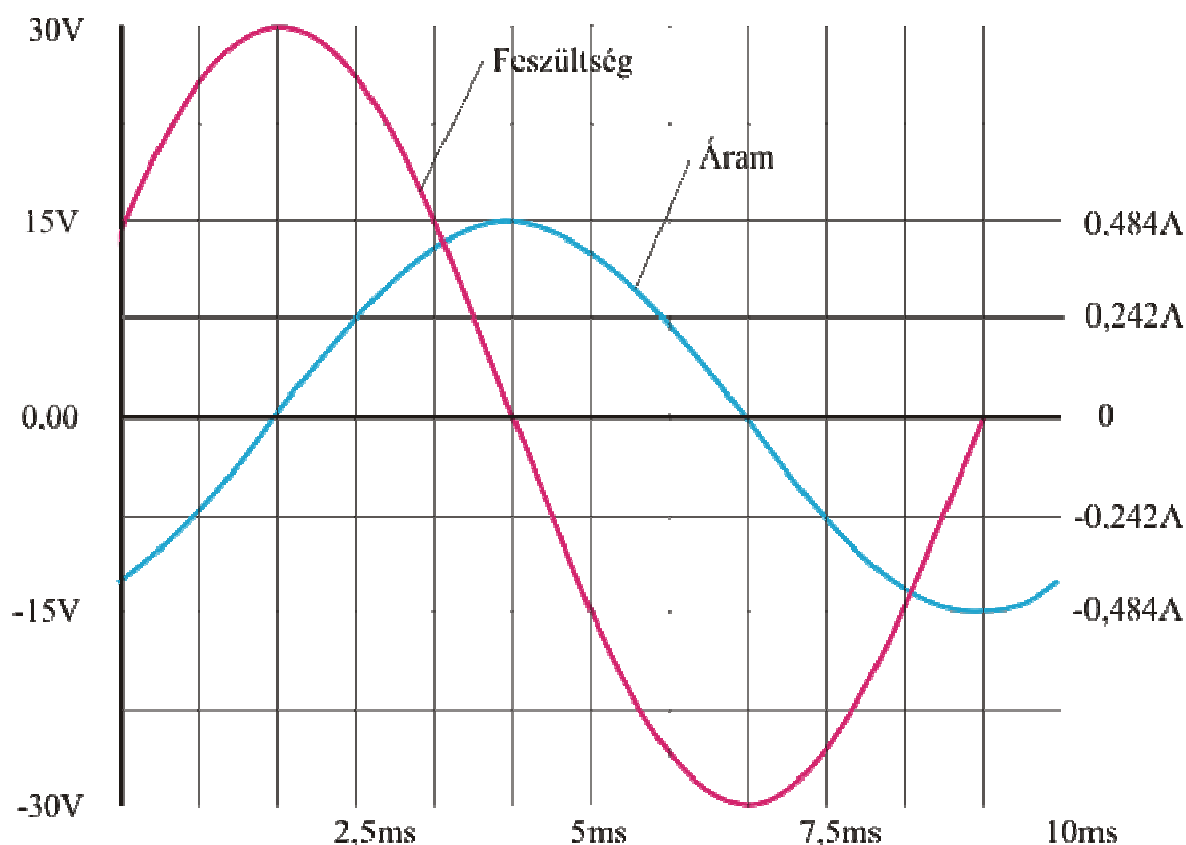
$$t = 0: \quad u_0 = 30 \cdot \sin(30^\circ) = 15V, \quad i_0 = 0,484 \cdot \sin(-60^\circ) = -0,419A$$

$$t = 2,5ms: \quad u_{2,5} = 30 \cdot \sin\left(200 \cdot \pi \cdot \frac{180}{\pi} \cdot 2,5 \cdot 10^{-3} + 30^\circ\right) = 25,98V,$$

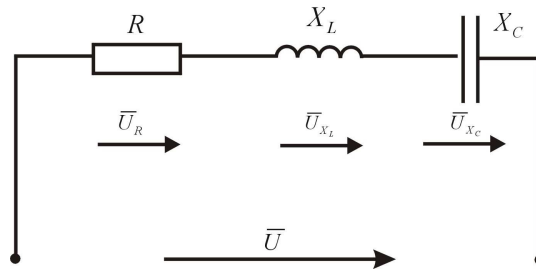
$$i_{2,5} = 0,484 \cdot \sin\left(200 \cdot \pi \cdot \frac{180}{\pi} \cdot 2,5 \cdot 10^{-3} - 60^\circ\right) = 0,242A$$

$$t = 5ms: \quad u_5 = 30 \cdot \sin\left(200 \cdot \pi \cdot \frac{180}{\pi} \cdot 5 \cdot 10^{-3} + 30^\circ\right) = -15V,$$

$$i_5 = 0,484 \cdot \sin\left(200 \cdot \pi \cdot \frac{180}{\pi} \cdot 5 \cdot 10^{-3} - 60^\circ\right) = 0,419A$$



2.1 Soros R-L-C kört táplálunk $\bar{U} = 600V$ feszültséggel $f = 50Hz$ -es szinuszos feszültségforrásról. $R = 1,5k\Omega$, $L = 2H$, $C = 2,5\mu F$. Határozza meg a forrásból felvett áramot és a teljesítménytényezőt! Rajzoljon minőségileg helyes fázorábrát. Számítsa ki az áramkör rezonancia frekvenciáját és a rezonanciában folyó áramot.



A körfrekvencia értéke: $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f = 314,15 \frac{rad}{s}$

Az induktív reaktancia: $X_L = \omega \cdot L = 314,15 \frac{rad}{s} \cdot 2H = 628,3\Omega$

A kapacitív reaktancia: $X_C = \frac{1}{\omega \cdot C} = \frac{1}{314,15 \frac{rad}{s} \cdot 2,5 \cdot 10^{-6} F} = 1273,277\Omega$

Mivel soros körről van szó az egyes tagokat csak össze kell adni.

$$\bar{Z}_e = R + jX_L - jX_C = 1500\Omega + j628,3\Omega - j1273,277\Omega = (1500 - j644,977)\Omega = 1632,78\angle -23,26^\circ\Omega$$

$$\bar{I}_e = \frac{\bar{U}}{\bar{Z}_e} = \frac{600V}{(1500 - j644,977)\Omega} = \frac{600V}{1632,78\angle -23,26^\circ\Omega} = (0,33758 + j0,1451)A = 0,367\angle 23,26^\circ A$$

Mivel a feszültséghez viszonyítunk (tehát az 0° -os), és a teljesítménytényező a kapocsfeszültség és a terhelő áram közti szög értékeként fogjuk megkapni.

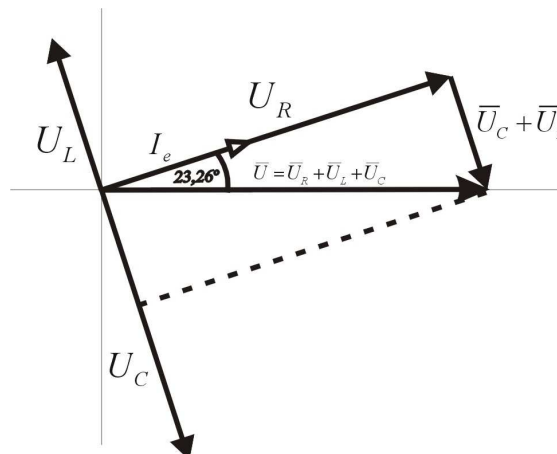
$$\cos(23,26^\circ) = 0,919$$

A fázorábra pontos megrajzolásához szükség van az egyes feszültségesések értékeire.

$$\bar{U}_R = \bar{I}_e \cdot R = (0,3376 + j0,1451)A \cdot 1500\Omega = (506,377 + j217,73)V = 551,2\angle 23,26^\circ V$$

$$\bar{U}_L = \bar{I}_e \cdot jX_L = (0,3376 + j0,1451)A \cdot j628,3\Omega = (-91,2 + j212,1)V = 230,6\angle 113,26^\circ V$$

$$\bar{U}_C = \bar{I}_e \cdot (-jX_C) = (0,3376 + j0,1451)A \cdot (-j1273,277)\Omega = (72,39 - j498,73)\Omega = 467,292\angle -66,74^\circ V$$



A kör akkor rezonál, ha a kapacitás és az induktivitás feszültsége egyforma abszolút értékű (csak ellentétes értelmű). Ebben az esetben a kör csak tisztán ohmos jellegű lesz. Ez alapján számítható a keresett frekvencia:

$$X_L = X_C$$

$$2 \cdot \pi \cdot f \cdot L = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot C}$$

$$f = \sqrt{\frac{1}{4 \cdot \pi^2 \cdot L \cdot C}} = \sqrt{\frac{1}{4 \cdot \pi^2 \cdot 2H \cdot 2,5 \cdot 10^{-6} F}} = 71,176 \text{ Hz}$$

A kör árama csak ohmos rezonancia esetén:

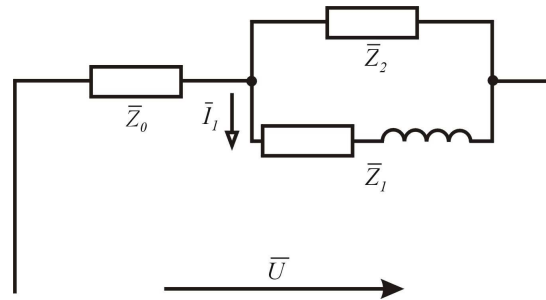
$$\bar{I}_e = \frac{\bar{U}}{\bar{Z}_e} = \frac{600V}{1500\Omega} = 0,4A$$

2.2 Mekkora $\bar{U}$ feszültséget kell az alábbi hálózatra kapcsolni, hogy az $\bar{I}_1 = 0,2A$ legyen.

$$\bar{Z}_0 = 50\Omega$$

$$\bar{Z}_1 = (100 + j150)\Omega$$

$$\bar{Z}_2 = 125\Omega$$



Az egyes ág árama áramosztóval

számítható:

$$\bar{I}_1 = \bar{I}_0 \frac{\bar{Z}_2}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2} = 0,2A$$

$$\bar{I}_0 = \frac{0,2(\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2)}{\bar{Z}_1} = \frac{0,2 \cdot (100 + 125 + j150)}{125} = (0,36 + j0,24)A = 0,43 \angle 33,7^\circ A$$

Ha kiszámítjuk a kör eredő impedanciáját megszorozva a kiszámított árammal megkapjuk a keresett feszültséget.

$$\begin{aligned} \bar{Z}_{12} &= \frac{\bar{Z}_1 \cdot \bar{Z}_2}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2} = \frac{(100 + j150) \cdot 125}{100 + j150 + 125} = \frac{12500 + j18750}{225 + j150} \cdot \frac{225 - j150}{225 - j150} = \\ &= \frac{2812500 - j1875000 + j4218750 + 2812500}{50625 + 22500} = (76,923 + j32,051)\Omega \end{aligned}$$

$$\bar{Z}_e = 50\Omega + (76,923 + j32,051)\Omega = (126,923 + j32,051)\Omega$$

$$\begin{aligned} \bar{U} &= \bar{I}_0 \cdot \bar{Z}_e = (0,36 + j0,24)A \cdot (126,923 + j32,051)\Omega = \\ &= 45,6922 + j11,5383 + j30,4615 - 7,2922 = (38,4 + j41,999)V = 56,9 \angle 47,55^\circ V \end{aligned}$$

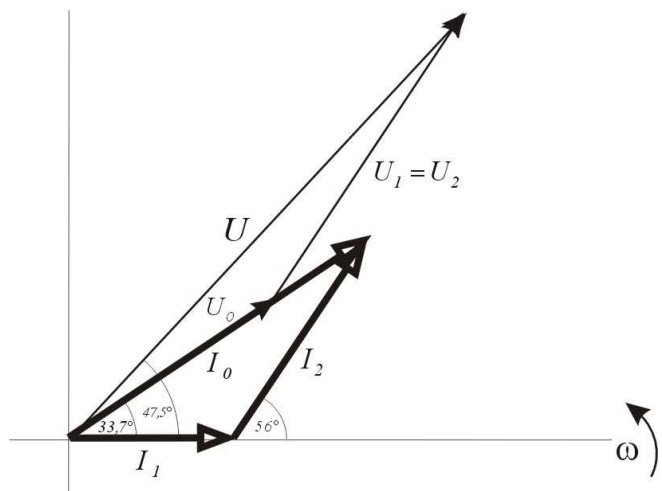
A vektorábra megrajzolásához az alábbi vektorokra van még szükség:

$$\bar{U}_0 + \bar{U}_1 = \bar{U}$$

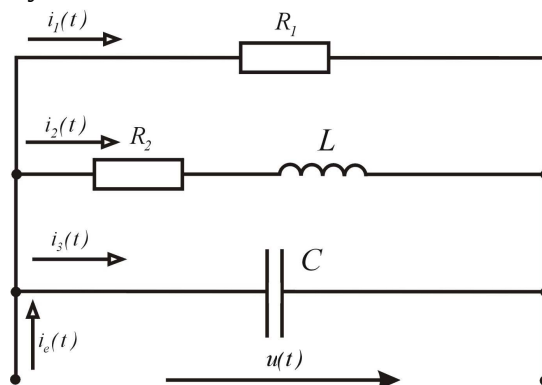
$$\bar{U}_0 = \bar{I}_0 \cdot \bar{Z}_0 = 21,5 \angle 33,7^\circ V$$

$$\bar{U}_1 = \bar{U}_2 = \bar{I}_1 \cdot \bar{Z}_1 = 36 \angle 56,3^\circ V$$

$$\bar{I}_2 = \bar{I}_0 - \bar{I}_1 = 0,288 \angle 56,3^\circ A$$



- 2.3 Az alábbi három párhuzamos ágat tartalmazó áramkörre a következő feszültséget kapcsoljuk: $u(t) = 325 \cdot \sin(314 \cdot t) \text{ V}$. A kapcsolásban szereplő elemek a következők: $R_1 = 23 \Omega$, $R_2 = 13 \Omega$, $L = 0,1 \text{ H}$, $C = 90 \mu\text{F}$. Határozza meg, az áramkör $i_1(t)$, $i_2(t)$, $i_3(t)$, $i(t)$ ágáramainak időfüggvényeit!



A feszültség időfüggvényéből látható a körfrekvencia és a feszültség effektív értéke.

$$\omega = 2\pi \cdot f = 314 \frac{\text{rad}}{\text{s}}, \text{ tehát a frekvencia: } f = \frac{\omega}{2\pi} = 50 \text{ Hz}$$

$$U = U_{\text{eff}} = \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}} = \frac{325}{1,41} = 230 \text{ V}$$

$$X_L = \omega \cdot L = 314 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot 0,1 \text{ H} = 31,4 \Omega$$

$$X_C = \frac{1}{\omega \cdot C} = \frac{1}{314 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot 90 \cdot 10^{-6} \text{ F}} = 35,38 \Omega$$

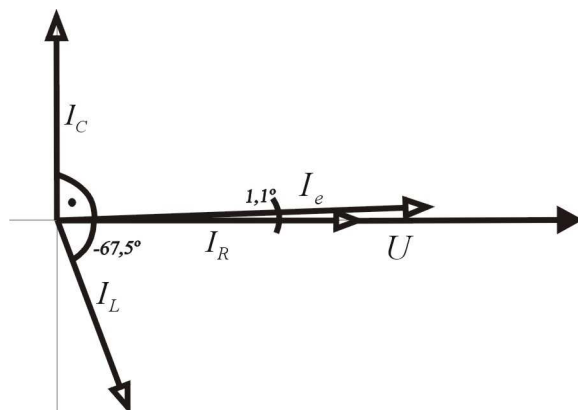
Az áramok meghatározásához az ohm törvényt használhatjuk.

$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{U}}{R_1} = \frac{230 \angle 0^\circ \text{ V}}{23 \Omega} = 10 \angle 0^\circ \text{ A}$$

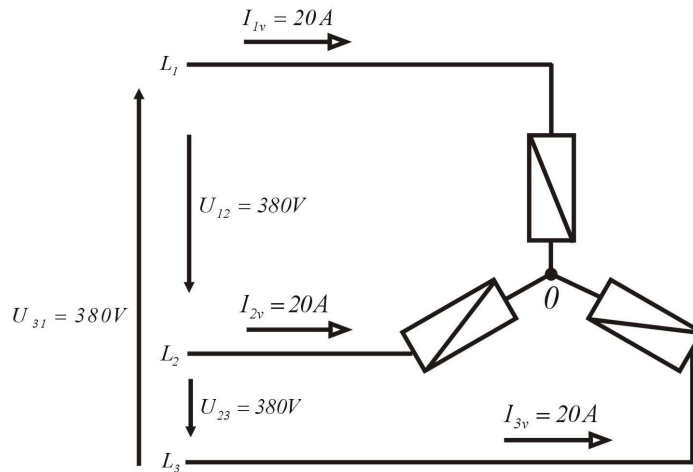
$$\bar{I}_2 = \frac{\bar{U}}{R_2 + jX_L} = \frac{230 \angle 0^\circ \text{ V}}{(13 + j31,4) \Omega} \cdot \frac{(13 - j31,4)}{(13 - j31,4)} = (2,58 - j6,25) \text{ A} = 6,76 \angle -75^\circ \text{ A}$$

$$\bar{I}_3 = \frac{\bar{U}}{-jX_C} = \frac{230 \angle 0^\circ \text{ V}}{-j35,38 \Omega} \cdot \frac{j35,38}{j35,38} = j6,5 \text{ A} = 6,5 \angle 90^\circ \text{ A}$$

$$\bar{I}_e = \bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3 = 10 \angle 0^\circ \text{ A} + 6,76 \angle -75^\circ \text{ A} + 6,5 \angle 90^\circ \text{ A} = 13,6 \angle 0,81^\circ \text{ A}$$



- 4.1 Egy háromfázisú csillag kapcsolású motor teljesítménytábláján a következő adatok találhatóak: $U = 380V$, $I = 20A$, $\cos \varphi = 0,715$, $\eta = 85\%$. Mekkora a motor hasznos teljesítménye, fázis feszültsége és fázis árama?



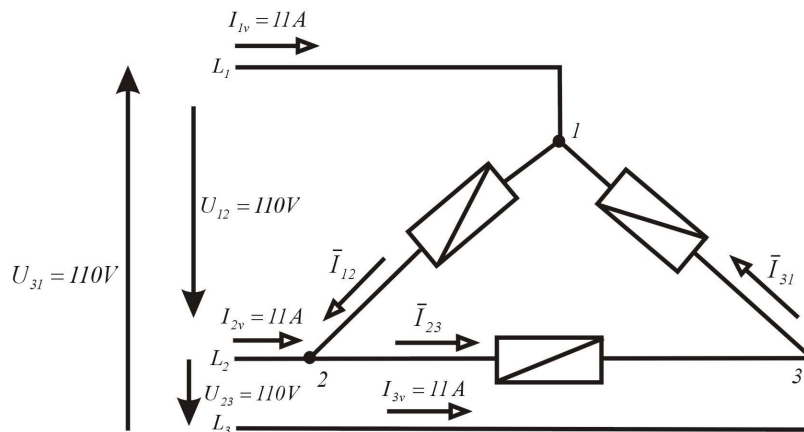
A motor hasznos teljesítménye számítható a vonali vagy a fázis értékek alapján egyaránt:

$$P_{3f} = 3 \cdot U_f \cdot I_f \cdot \cos \varphi \cdot \eta = \sqrt{3} \cdot U_v \cdot I_v \cdot \cos \varphi \cdot \eta = \sqrt{3} \cdot 380V \cdot 20A \cdot 0,715 \cdot 0,85 = 8022W$$

Tudjuk, hogy csillag kapcsolás esetén a fázis és vonali áramok megegyeznek: $I_v = I_f = 20A$

A fázis feszültség pedig $\sqrt{3}$ -a a vonali értéknek: $U_f = \frac{U_v}{\sqrt{3}} = \frac{380V}{\sqrt{3}} \cong 220V$

- 4.2 Egy háromfázisú delta kapcsolású motor teljesítménytábláján a következő adatok találhatóak: $U = 110V$, $I = 11A$, $\cos \varphi = 0,8$, $P = 1,5kW$. Mekkora a motor fázis feszültsége és fázis árama, és a hatásfoka?



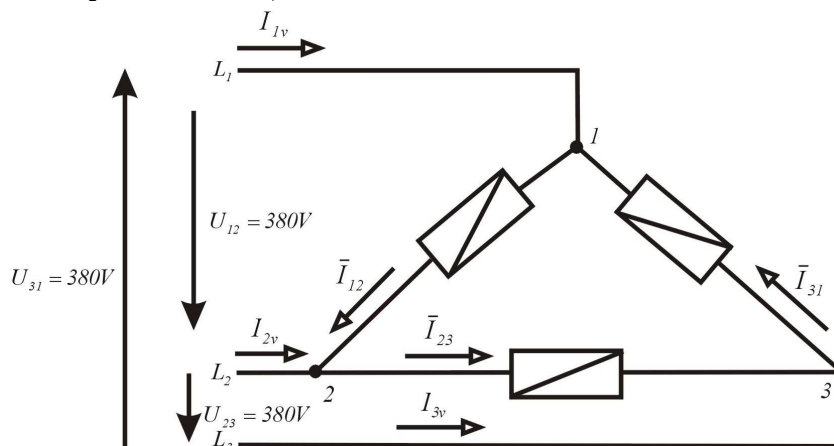
Tudjuk, hogy delta kapcsolás esetén a fázis és vonali feszültségek azonosak: $U_v = U_f = 110V$

A fázis áram pedig $\sqrt{3}$ -a a vonali értéknek: $I_f = \frac{I_v}{\sqrt{3}} = \frac{11A}{\sqrt{3}} = 6,351A$

A motor hasznos teljesítményének képletéből tudjuk a hatásfokot kifejezni:

$$\eta = \frac{P_{3f}}{3 \cdot U_f \cdot I_f \cdot \cos \varphi} = \frac{P_{3f}}{\sqrt{3} \cdot U_v \cdot I_v \cdot \cos \varphi} = \frac{1500W}{\sqrt{3} \cdot 110V \cdot 11A \cdot 0,8} = 0,894 \quad \eta_{\%} = 89,4\%$$

- 4.3 Egy háromfázisú delta kapcsolású szimmetrikus fogyasztó felvett teljesítménye 9kW . A vonali feszültség $U = 380\text{V}$, a fogyasztó teljesítmény tényezője $\cos \varphi = 0,8$. Mekkora a vonaliáram, fázisáram, fázisfeszültség, fázisteljesítmény és az egy fázisban lévő impedancia (annak ellenállása és reaktanciája soros kapcsolás esetén)?



Tudjuk, hogy delta kapcsolás esetén a fázis és vonali feszültségek azonosak: $U_v = U_f = 380\text{V}$

A motor hasznos teljesítményéből tudjuk a vonali áramot kifejezni: $P_{3f} = \sqrt{3} \cdot U_v \cdot I_v \cdot \cos \varphi$

$$I_v = \frac{P_{3f}}{\sqrt{3} \cdot U_v \cdot \cos \varphi} = \frac{9000\text{W}}{\sqrt{3} \cdot 380\text{V} \cdot 0,8} = 17,1\text{A}$$

A fázis áram pedig $\sqrt{3}$ -a a vonali értéknek: $I_f = \frac{I_v}{\sqrt{3}} = \frac{17,1\text{A}}{\sqrt{3}} = 9,868\text{A}$

A motor hasznos teljesítménye számítható a vonali vagy a fázis értékek alapján egyaránt:

$$P_{1f} = \frac{P_{3f}}{3} = \frac{9000\text{W}}{3} = 3000\text{W} = 3\text{kW}$$

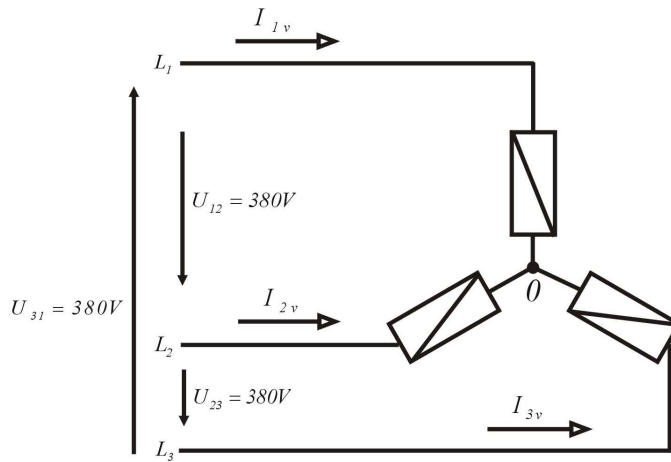
Az impedancia háromszög hasonló a teljesítmény háromszöghöz:

$$\cos \varphi = 0,8 = \frac{P}{S} \Rightarrow \varphi = 36,86^\circ$$

$$|Z| = \frac{U_f}{I_f} = \frac{380\text{V}}{9,868\text{A}} = 38,51\Omega$$

$$R = Z \cdot \cos \varphi = 38,51\Omega \cdot 0,8 = 30,808\Omega \text{ és } X_L = Z \cdot \sin \varphi = 38,51\Omega \cdot 0,6 = 23,1\Omega$$

- 4.4 Egy háromfázisú szimmetrikus csillag kapcsolású fogyasztó felvett látszólagos teljesítménye 9kVA . A vonali feszültség $U = 380\text{V}$, a fogyasztó teljesítmény tényezője $\cos \varphi = 0,8$. Mekkora a fázisfeszültség, fázisáram, fázisteljesítmény (hatásos) és a vonaliáram. Meghatározandó, azaz ellenállás és reaktancia értéke, amelyeket párhuzamosan kapcsolva, eredőként a kérdéses impedanciát kapjuk!



Tudjuk, hogy csillag kapcsolás esetén a fázis és vonali áramok azonosak: $I_v = I_f$

A fázis feszültség pedig $\sqrt{3}$ -a a vonali értéknek: $U_f = \frac{U_v}{\sqrt{3}} = \frac{380\text{V}}{\sqrt{3}} \approx 220\text{V}$

A motor hasznos teljesítménye számítható a vonali vagy a fázis értékek alapján egyaránt:

$$S_{3f} = 3 \cdot U_f \cdot I_f = \sqrt{3} \cdot U_v \cdot I_v$$

$$I_f = \frac{S_{3f}}{3 \cdot U_f} = \frac{9000\text{VA}}{3 \cdot 220\text{V}} = 13,636\text{A}$$

$$P_{1f} = \frac{P_{3f}}{3} = \frac{S_{3f} \cdot \cos \varphi}{3} = \frac{9000\text{VA} \cdot 0,8}{3} = 2,4\text{kW}$$

$$I_v = I_f = 13,636\text{A}$$

A fázis impedancia abszolút értéke a fázis feszültség és áram hányadosaként számítható.

$$Z_f = \frac{U_f}{I_f} = \frac{220\text{V}}{13,64\text{A}} = 16,13\Omega$$

Ez a impedancia vektor abszolút értéke amelynek a két komponensét a teljesítmény háromszöghöz való hasonlóság alapján számíthatjuk.

$$R_{\text{soros}} = Z_f \cdot \cos \varphi = 16,13\Omega \cdot 0,8 = 12,904\Omega$$

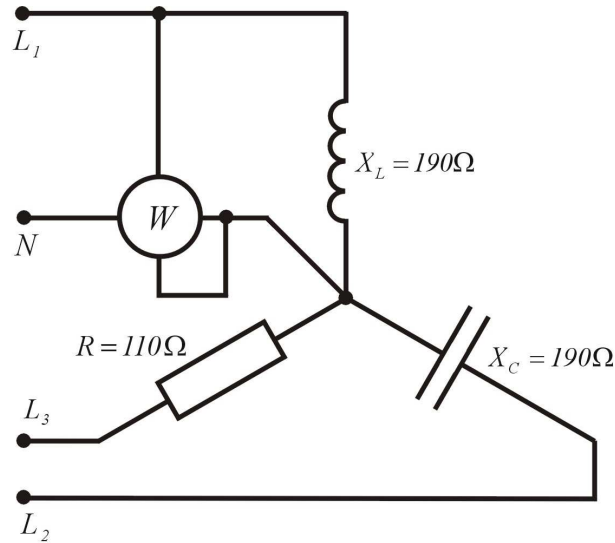
$$X_{L,\text{soros}} = Z_f \cdot \sin \varphi = 16,13\Omega \cdot 0,6 = 9,678\Omega$$

Mivel a feladat párhuzamosan kapcsolt elemeket kér ezért a reciprok értékekkel kell számolnunk:

$$\bar{Y} = \frac{1}{Z} = \frac{1}{\frac{1}{R_p} + \frac{1}{X_{L,p}}} = \frac{1}{(12,9 + j9,678)\Omega} = (0,04 - j0,0372)\text{s}$$

Ezek alapján a párhuzamos eredők értéke: $R_p = \frac{1}{0,04} = 25\Omega$, és $|X_{L,p}| = \frac{1}{0,0372} = 26,88\Omega$

- 4.5 Egy háromfázisú, $U = 380V$ vonali feszültségű, négyvezetős hálózatra a az ábra szerinti fogyasztókat kapcsolunk. Állapítsuk meg a vektorábra segítségével, hogy mekkora teljesítményt mutat a wattmérő!



Tudjuk, hogy csillag kapcsolás esetén a fázis és vonali áramok azonosak: $I_v = I_f$

$$U_f = \frac{380V}{\sqrt{3}} = 220V$$

$$U_{1f} = 220 \angle 0^\circ V$$

$$U_{2f} = 220 \angle -120^\circ V$$

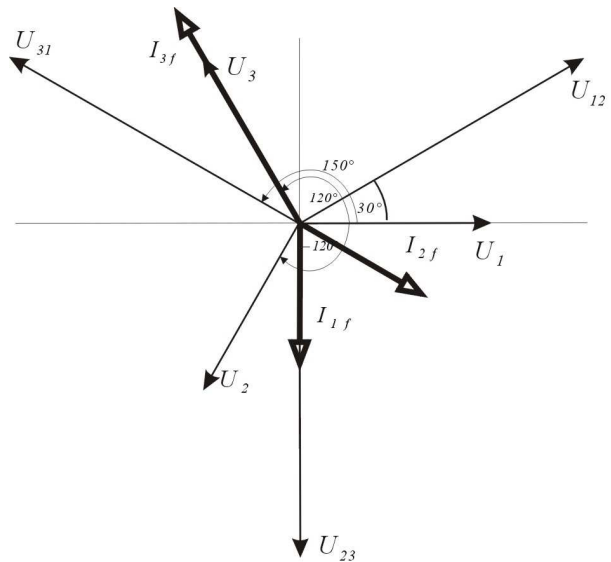
$$U_{3f} = 220 \angle 120^\circ V$$

$$I_{1f} = \frac{U_{1f}}{Z_{1f}} = \frac{220 \angle 0^\circ V}{j190 \Omega} = \frac{220 \angle 0^\circ V}{190 \angle 90^\circ \Omega} = 1,1578 \angle -90^\circ A$$

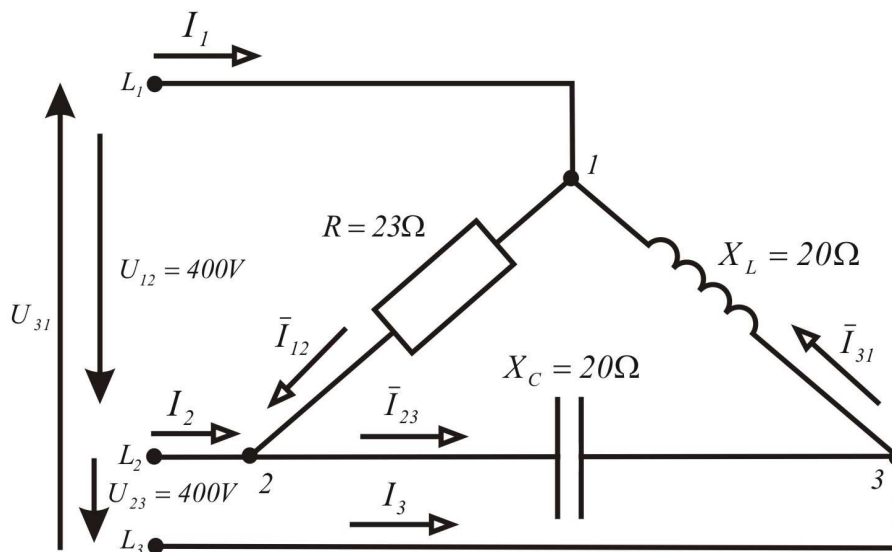
$$I_{2f} = \frac{U_{2f}}{Z_{2f}} = \frac{220 \angle -120^\circ V}{-j190 \Omega} = \frac{220 \angle -120^\circ V}{190 \angle -90^\circ \Omega} = 1,1578 \angle -30^\circ A$$

$$I_{3f} = \frac{U_{3f}}{Z_{3f}} = \frac{220 \angle 120^\circ V}{110 \Omega} = 2 \angle 120^\circ A$$

$$I_N = I_{1f} + I_{2f} + I_{3f} = 1,1578 \angle -90^\circ A + 1,1578 \angle -30^\circ A + 2 \angle 120^\circ = 0,0 A$$



- 4.6 A ábrán látható háromfázisú fogyasztó rendszer adatai: $U = 400V$, $R = 23\Omega$, $X_L = 20\Omega$, $X_C = 20\Omega$. Mekkora a fázisáramok? Rajzoljon léptékhelyes vektorábrát, és ez alapján határozza meg a vonali áramok nagyságát!

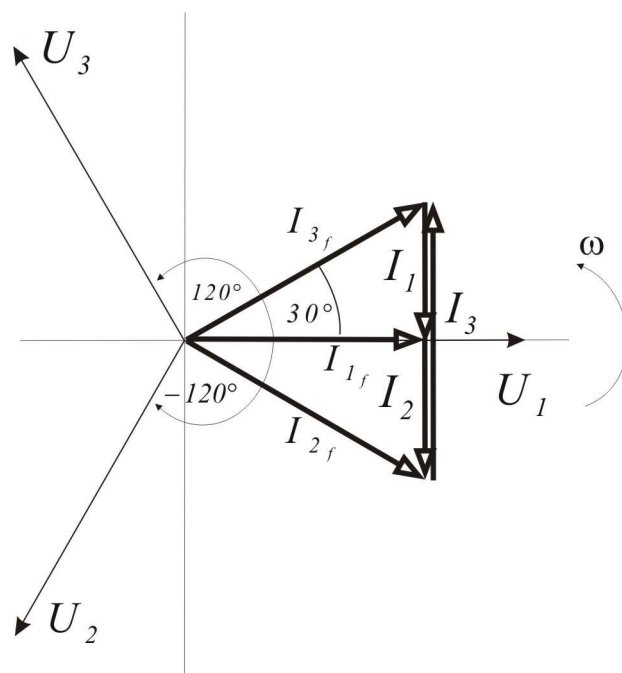


Tudjuk, hogy delta kapcsolás esetén a fázis és vonali feszültségek azonosak: $U_v = U_f$

$$I_{1f} = \frac{U_{1f}}{Z_{1f}} = \frac{400 \angle 0^\circ V}{23\Omega} = 17,39 \angle 0^\circ A$$

$$I_{2f} = \frac{U_{2f}}{Z_{2f}} = \frac{400 \angle -120^\circ V}{20 \angle -90^\circ \Omega} = 20 \angle -30^\circ A$$

$$I_{3f} = \frac{U_{3f}}{Z_{3f}} = \frac{400 \angle 120^\circ V}{20 \angle 90^\circ \Omega} = 20 \angle 30^\circ A$$

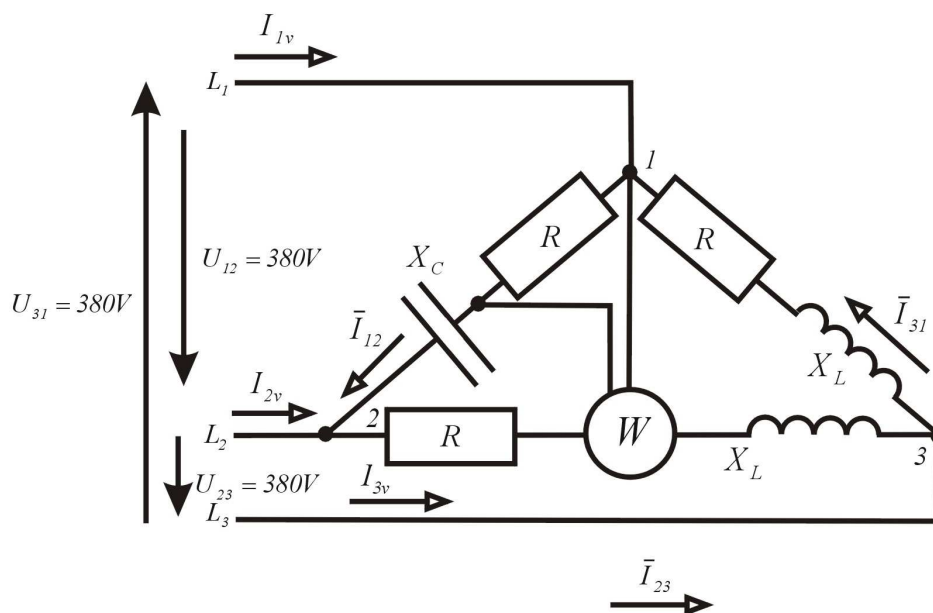


$$I_1 = I_{1f} - I_{3f} = 17,39 \angle 0^\circ A - 20 \angle 30^\circ A = 10 \angle -90^\circ A$$

$$I_2 = I_{2f} - I_{1f} = 20 \angle -30^\circ A - 17,39 \angle 0^\circ A = 10 \angle -90^\circ A$$

$$I_3 = I_{3f} - I_{2f} = 20 \angle 30^\circ A - 20 \angle -30^\circ A = 20 \angle 90^\circ A$$

- 4.7 A ábrán látható áramkör adatai: $U = 380V$, $R = 40\Omega$, $X_L = 40\Omega$, $X_C = 40\Omega$. Mekkora a vonaliáramok? Mekkora a háromfázisú meddő teljesítmény? Mennyit mutat az ábra szerint berajzolt wattmérő?



Tudjuk, hogy delta kapcsolás esetén a fázis és vonali feszültségek azonosak: $U_v = U_f$

$$I_{12} = \frac{U_{12}}{Z_{12}} = \frac{380 \angle 0^\circ V}{(40 - j40)\Omega} = \frac{380 \angle 0^\circ V}{56,568 \angle -45^\circ \Omega} = 6,71 \angle 45^\circ A = (4,75 + j4,75) A$$

$$I_{23} = \frac{U_{23}}{Z_{23}} = \frac{380 \angle 120^\circ V}{(40 + j40)\Omega} = \frac{380 \angle 120^\circ V}{56,568 \angle 45^\circ \Omega} = 6,71 \angle 75^\circ A = (1,736 + j6,48) A$$

$$I_{31} = \frac{U_{31}}{Z_{31}} = \frac{380 \angle -120^\circ V}{(40 + j40)\Omega} = \frac{380 \angle -120^\circ V}{56,568 \angle 45^\circ \Omega} = 6,71 \angle -165^\circ A = (-6,48 - j1,736) A$$

$$I_1 = I_{12} - I_{31} = (4,75 + j4,75) A - (-6,48 - j1,736) A = (11,23 + j6,486) A = 12,96 \angle 30^\circ A$$

$$I_2 = I_{23} - I_{12} = (1,736 + j6,48) A - (4,75 + j4,75) A = (-3,014 + j1,73) A = 3,47 \angle 150^\circ A$$

$$I_3 = I_{31} - I_{23} = (-6,48 - j1,736) A - (1,736 + j6,48) A = (-8,216 - j8,216) A = 11,62 \angle -135^\circ A$$

$$\bar{S}_1 = \bar{U}_{12} \cdot \bar{I}_{12}^* = 380 \angle 0^\circ A \cdot 6,71 \angle -45^\circ A = (1803 - j1803) VA$$

$$\bar{S}_2 = \bar{U}_{23} \cdot \bar{I}_{23}^* = 380 \angle 120^\circ A \cdot 6,71 \angle -75^\circ A = (1803 + j1803) VA$$

$$\bar{S}_3 = \bar{U}_{31} \cdot \bar{I}_{31}^* = 380 \angle -120^\circ A \cdot 6,71 \angle 165^\circ A = (1803 + j1803) VA$$

A wattmérő feszültség tekercsére az ellenálláson eső feszültség jut.

$$U_W = R \cdot I_{12} = 40\Omega \cdot 6,71 \angle 45^\circ A = 268,4 \angle 45^\circ V$$

$$P_W = |U_W| \cdot |I_{23}| \cdot \cos \varphi_{U_W I_{23}} = 268,4V \cdot 6,71A \cdot \cos(75^\circ - 45^\circ) = 1560,74W$$

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = -1803 + 1803 + 1803 = 1803VAR$$