

FELADATOK MÉRÉSELMÉLET tárgykörben

1. Egy műszer osztálypontossága 2.5, a végkitérése 300 V. Mekkora a mérés abszolút hibája?

$$H = O_p \cdot x_v / 100\% = 2,5 \cdot 300 / 100 = 7,5V$$

2. A fenti műszer 120 V-ot mér. Mekkora a mérés relatív hibája?

$$h_v = \frac{H}{x_h} \cdot 100\% = 6,25\%$$

3. Egy mérési sorozat elemeit tartalmazza az alábbi táblázat. Adja meg a sorozat bizonytalansági intervallumát a tanult módszerekkel (7 pont)

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ
x_i	64,2	64,5	64,4	64,4	64,3	64,0	64,0	63,8	64,1	64,3	642
$ \delta_i $	0	0,3	0,2	0,2	0,1	0,2	0,2	0,4	0,1	0,1	1,8
δ_i	0	0,09	0,04	0,04	0,01	0,04	0,04	0,16	0,01	0,01	0,44

$$\bar{x} = 64,2$$

Terjedelem:

$$64,2^{+0,3}_{-0,4}$$

Átlagos abszolút eltérés: $E = 1,8 / 10 = 0,18$

$$64,2 \pm 0,18$$

Szórás:

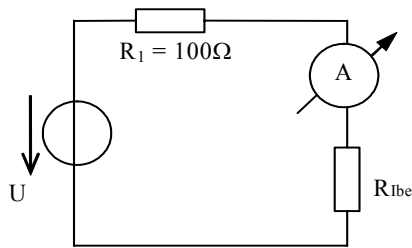
$$s = \sqrt{\frac{1}{10-1} \cdot 0,44} = 0,22$$

$$64,2 \pm 0,22$$

Valószínű hiba:

$$64,2^{+0,2}_{-0,1}$$

4. Az ampermérő, amelynek osztálpontossága 0,5, a végkitérése 30 mA, belső ellenállása $0,3 \Omega$, az alábbi kapcsolásban 18 mA-t mutat.



Mekkora a mérés rendszeres hibája relatív értékben kifejezve?

A rendszeres hibát az árammérő belső ellenállása okozza.

Az árammérés pontos értéke: $I_0 = \frac{U}{R_1}$

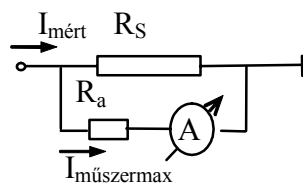
Az árammérés valós mért értéke: $I_m = \frac{U}{R_1 + R_{lbe}}$

A mérés relatív hibája:

$$h = \frac{x_{mért} - x_{pontos}}{x_{pontos}} \cdot 100\% = \frac{I_m - I_0}{I_0} \cdot 100\% = \frac{\frac{U}{R_1 + R_{lbe}} - \frac{U}{R_1}}{\frac{U}{R_1}} \cdot 100\%$$

$$h = \frac{\frac{R_1 - R_1 - R_{lbe}}{(R_1 + R_{lbe}) \cdot R_1}}{\frac{1}{R_1}} \cdot 100\% = \frac{-R_{lbe}}{R_1 + R_{lbe}} \cdot 100\% = -\frac{0,3}{100,3} \cdot 100\% \cong -0,3\%$$

5. Egy Deprez árammérő belső ellenállása $0,1 \Omega$. Milyen sönt ellenállást kell alkalmaznunk, ha 5 A-t akarunk mérni ezzel a műszerrel?



$$R_a = 0,1 \Omega$$

$$I_{mért} = 5 \text{ A}$$

$$I_{müszmax} = 0,05 \text{ A}$$

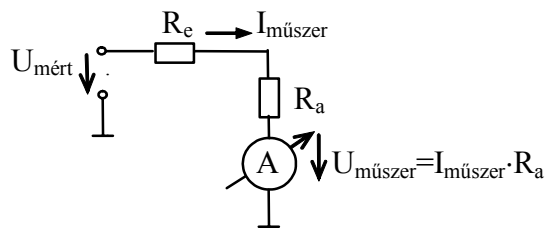
$$R_s = ?$$

$$I_s = I_{mért} - I_{müszmax} = 4,95 \text{ A}$$

$$R_s = \frac{R_a \cdot I_{müszmax}}{I_s} = \frac{0,1 \cdot 0,05}{4,95} = 1 \text{ m}\Omega$$

$$P_{R_s} = I_s^2 \cdot R_s = 4,95^2 \cdot 10^{-3} = 0,025 \text{ W}$$

6. Egy alap Deprez árammérővel 300 V feszültséget akarunk mérni. Milyen előtét ellenállást kell alkalmazni?



A kör ellenállása :

$$\frac{U_{mért}}{I_{műszer}} = R_e + R_a$$

$$R_e \geq \frac{U_{mért}}{I_{műszer}} - R_a = \frac{300}{0,05} - 0,3 \approx 6k\Omega$$

$$P_{R_e} = I_{műszer}^2 \cdot R_e = 0,05^2 \cdot 6000 = 15W$$

az áramhatár csökkentésével ugyan nő az előtétellenállás ohmos értéke,
de a teljesítménye csökkenthető.

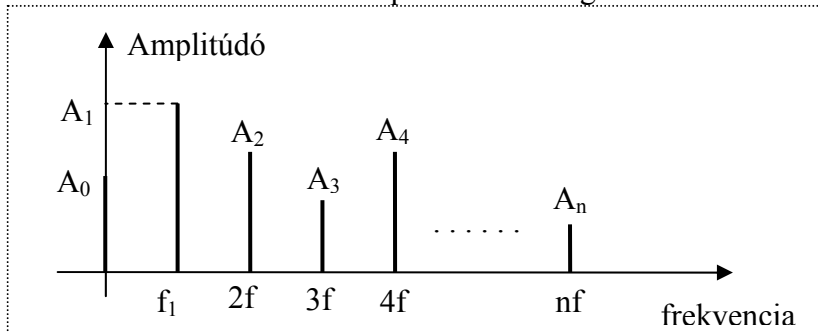
7. Mi a különbség az összetett periodikus és a kváziperiodikus jelek között?

Összetett periodikus jelek:

$$x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cdot \cos n2\pi f_0 \cdot t + B_n \cdot \sin n2\pi f_0 t) = F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} F_n \cdot \cos(n2\pi f_0 t + \Theta_n) =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn2\pi f_0 t}$$

ahol a felharmonikusok az alapharmonikus egész számú többszörösei

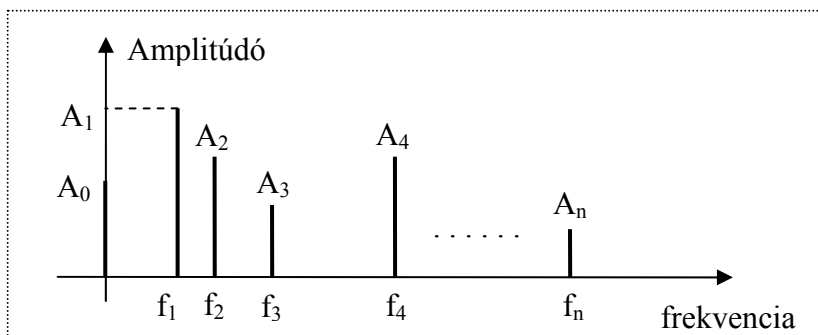


Kváziperiodikus jelek:

$$x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cdot \cos 2\pi f_n \cdot t + B_n \cdot \sin 2\pi f_n t)$$

ahol

$$\frac{f_n}{f_1} \neq \text{egész szám}$$



8. Egy rezgésmérő műszer mutatója 67 Hz-et mutat. A mérés bizonytalansága ± 2 Hz. Mekkora lehet a műszer pontossági osztálya, ha a végkitérése 100Hz?

$$f_{\text{mért}} = 67 \text{ Hz}$$

$$H = \pm 2 \text{ Hz}$$

$$f_{\text{vég}} = 100 \text{ Hz}$$

$$O_p = ?$$

Az osztálypontosság a végkitérésre vonatkoztatott relatív hiba szabványos mennyiségre felkerekített értéke.

$$h_v = \frac{H}{f_{\text{vég}}} \cdot 100\% = \frac{2}{100} \cdot 100\% = 2\%$$

Mivel a 2% nem szabványos érték, az osztálypontosság 2,5.

9. Egy mérési sorozat elemeit csoportosítottuk, a csoportosítás eredményét az alábbi táblázat foglalja össze.

x_{ri}	100	102	104	106	108	Σ
n_{ri}	56	112	240	130	62	600
$x_{ri} \cdot n_{ri}$	5600	11424	24960	13780	6696	62460
δ_{ri}	4,1	2,1	0,1	1,9	3,9	
$\delta_{ri} \cdot n_{ri}$	229,6	235,2	24	247	241,8	977,6
$\delta_{ri}^2 \cdot n_{ri}$	941,36	493,92	2,4	469,3	943,02	2850

- a.) Adja meg a sorozat átlagát és bizonytalansági intervallumát a tanult módszerekkel.

$$\bar{x} = 104,1$$

$$E = 1,63$$

$$s = 2,18$$

- b.) Ellenőrizze a sorozat eloszlásának típusát, s az eredménytől függően dolgozza ki a feladat c.) és d.) részét.

$$\frac{s^2}{E^2} = \frac{\pi}{2} \pm 15\% = 1,3352 \dots 1,806$$

$$\frac{2,18^2}{1,63^2} = 1,7887$$

tehát a sorozat Gauss eloszlású

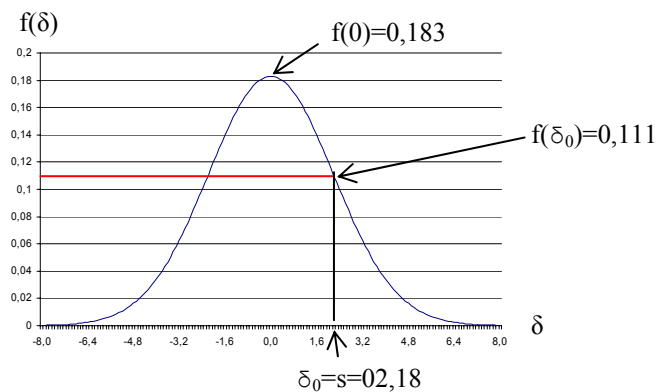
- c.) Írja fel a sűrűségfüggvényt képlettel, és közel léptékhelyesen rajzolja fel.

$$s = \frac{1}{k \cdot \sqrt{2}} \rightarrow k = \frac{1}{2,18 \cdot \sqrt{2}} = 0,3244$$

$$f(\delta) = \frac{k}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-k^2 \cdot \delta^2} = 0,183 \cdot e^{-0,105 \delta^2}$$

$$f(0) = \frac{k}{\sqrt{\pi}} = 0,183$$

$$f(\delta_0) = \frac{k}{\sqrt{\pi} \cdot \sqrt{e}} = 0,111$$



- d.) Mekkora a valószínűsége annak, hogy egy mért érték a 100,83 és 109,55 intervallum közé esik?

$$\delta_1 = x_1 - \bar{x} = 100,83 - 104,1 = -3,27 = -1,5s \rightarrow t_1 = -1,5$$

$$\delta_2 = x_2 - \bar{x} = 109,55 - 104,1 = 5,45 = 2,5s \rightarrow t_2 = +2,5$$

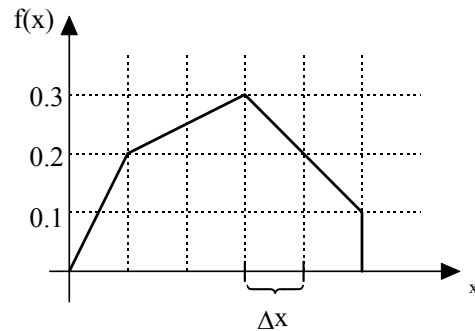
$$P(\delta_1; \delta_2) = P(0; 1,5s) + P(0; 2,5s) = 0,4332 + 0,4938 = 0,927 = 92,7\%$$

A Gauss eloszlás sűrűségfüggvényének az integráltjai:

[illegible]

10.

A grafikon egy mérési sorozat empirikus sűrűségfüggvényét ábrázolja. Határozza meg annak a valószínűségét, hogy egy mérési elem a jelölt Δx intervallumba esik.



Megoldás:

A sűrűségfüggvényekre jellemző, hogy egy intervallum előfordulási valószínűsége megegyezik az adott intervallum görbe alatti területével. A görbe alatti terület $-\infty$ és $+\infty$ között 1.

Tehát a fenti görbe teljes területe 10 négyzetegység, a jelölt Δx intervallum görbe alatti területe pedig 2,5 négyzet.

Ennek megfelelően $P(\Delta x) = (2,5/10) \cdot 100\% = 25\%$

11. Egy mérési sorozat eredménye Gauss (normál) eloszlást mutat. A kapott sűrűségfüggvény képlete:

$$f(x-x_0) = c \cdot e^{-2,25(x-x_0)^2}$$

$$x_0 = 1000 \text{ mm}$$

a.) Határozza meg a c paraméter értékét

$$f(\delta) = \frac{p}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \delta^2}, \text{ ebből következően } c = \frac{p}{\sqrt{\pi}}$$

$$p = \sqrt{2,25} = 1,5$$

$$c = \frac{p}{\sqrt{\pi}} = \frac{1,5}{\sqrt{\pi}} = 0,846$$

b.) Mekkora a sorozat szórása?

$$s = \delta_0 = \pm \frac{1}{p \cdot \sqrt{2}} = 0,4714$$

c.) Mekkora ebben a pontban a sűrűségfüggvény értéke? wewqwe

$$f(\delta_0) = \frac{f(0)}{\sqrt{e}} = \frac{p}{\sqrt{e} \sqrt{\pi}} = \frac{0,846}{\sqrt{e}} = 0,513$$

d.) Mekkora a sorozat átlagos abszolút eltérése?

$$E = \pm \frac{1}{p \cdot \sqrt{\pi}} = 0,3761$$

e.) Ellenőrizzük a Gauss eloszlást

$$\frac{s^2}{E^2} = \frac{0,4714^2}{0,3761^2} = 1,571 \quad \frac{\pi}{2} = 1,5708, \text{ mivel a két érték kevesebb, mint 15\%-ban tér el}$$

egymástól, a sorozat Gauss eloszlású valóban ☺ Ugye itt nem is lehet más, mivel ezekkel a képletekkel számoltunk. Az eltérés csupán kerekítési hiba!

f.) Rajzoljuk fel a sűrűségfüggvényt

12.

Egy mérési sorozat eredménye az x-y koordináta-rendszerben az alábbi:

x_i	y_i
1	4
2	6
3	7
4	10
5	12
15	39

Keressük meg regresszió analízissel azt az egyenest, amely legjobban illeszkedik az adott pontthalmazra.

Számítsuk ki a négyzetes hibák átlagértékét.

$$f(x) = a + bx$$

$$H_i = y_i - f(x_i)$$

$$R = \sum_{i=1}^5 H_i = \sum_{i=1}^5 [y_i - f(x_i)]^2 = \sum_{i=1}^5 [y_i - a - bx_i]^2$$

$$\frac{\partial R}{\partial a} = 0$$

$$\frac{\partial R}{\partial b} = 0$$

$$\frac{\partial R}{\partial a} = -2 \left[\sum_{i=1}^5 y_i - 5a - b \sum_{i=1}^5 x_i \right] = 0$$

$$\frac{\partial R}{\partial b} = -2 \left[\sum_{i=1}^5 x_i y_i - a \sum_{i=1}^5 x_i - b \sum_{i=1}^5 x_i^2 \right] = 0$$

	x_i	y_i	$x_i \cdot y_i$	x_i^2
	1	4	4	1
	2	6	12	4
	3	7	21	9
	4	10	40	16
	5	12	60	25
Σ	15	39	137	55

$$39 - 5a - 15b = 0$$

$$137 - 15a - 55b = 0$$

$$a = 1,8$$

$$b = 2$$

$$f(x) = 2x + 1,8$$

Négyzetes hibák átlagának kiszámítása:

	x_i	Y_i	$f(x_i)$	H_i^2
	1	4	3,8	0,04
	2	6	5,8	0,04
	3	7	7,8	0,64
	4	10	9,8	0,04
	5	12	11,8	0,04
Σ	15	39		0,8

$$\bar{r} = \frac{1}{n} R = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n H_i^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [(y_i - f(x_i))^2] = \frac{1}{5} 0,8 = 0,16$$

13. Egy feszültségmérő végkitérése 30 V, osztálpontossága 1,0. Egy 100 ohmos 5%-os ellenállásra kapcsolva a műszer 24 V-ot mutat. Mekkora az ellenállás teljesítményének a relatív hibája?

$$P_0 = \frac{U^2}{R} = \frac{24^2}{100} = 5,76W$$

$$(3s_P)^2 = \left[\frac{\partial P}{\partial U}(3s_U) \right]^2 + \left[\frac{\partial P}{\partial R}(3s_R) \right]^2$$

$$\frac{\partial P}{\partial U} = 2 \cdot \frac{U}{R} = 0,48 \frac{V}{\Omega}$$

$$\frac{\partial P}{\partial R} = -\frac{U^2}{R^2} = 0,0576 \frac{V^2}{\Omega^2}$$

$$(3s_P)^2 = \left(0,48 \frac{V}{\Omega} \cdot 0,3V\right)^2 + \left(0,0576 \frac{V^2}{\Omega^2} \cdot 5\Omega\right)^2 = 0,10368W^2$$

$$3s_P = 0,322W$$

$$h = \frac{3s_P}{P_0} \cdot 100\% = \frac{0,322}{5,76} \cdot 100\% = 5,59\%$$

14.

Mekkora frekvenciával rezeg az a rezgőkör, amelynek elemei:

$$L = 100 \pm 10 \mu H$$

$$C = 330 \text{ nF} \pm 1\%$$

$$\text{Kérdés: } f_0 \pm 3s_f = ?$$