Németh Géza
adjunktus

Tengelyek lehajlásának számítása

Oktatási segédlet

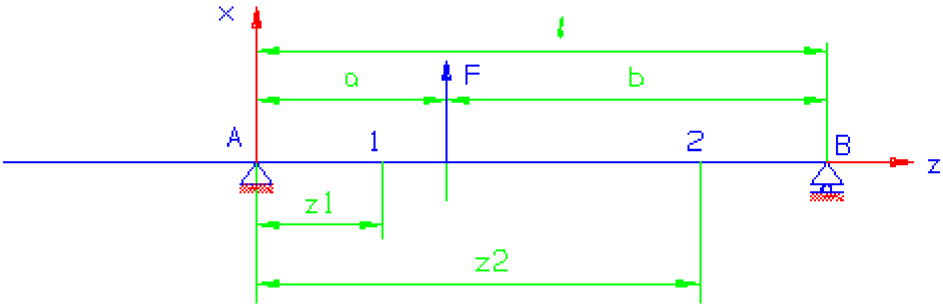
Miskolci Egyetem
Gép és terméktervezési Intézet

Miskolc, 2014. március 20.

Tengelyek lehajlásának számítása

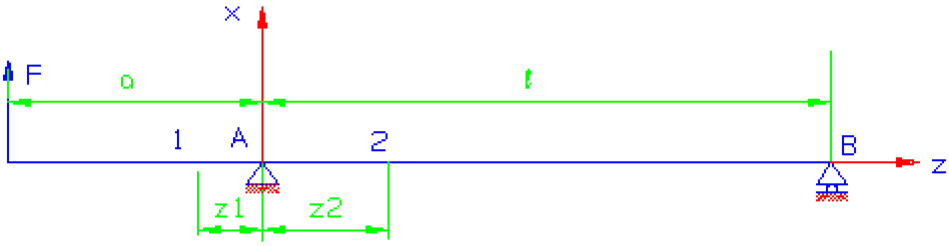
A tengelyeket kéttámaszú tartóként modellezve, és a szuperpozíció elvét alkalmazva a következő eseteket vizsgáljuk

Tengely terhelése a támaszközben koncentrált erővel



1. ábra A támaszközben terhelt tartó a koordináta rendszerrel

Tengely terhelése a konzolon koncentrált erővel



2. ábra A konzol végén terhelt tartó a koordináta rendszerrel

Mindkét terhelési esetben az 1. és 2. pontban meghatározható a tartó x irányú lehajlása és a tartó szögelfordulása, azaz x1, x2, ϑ1 és ϑ2, mint a z koordináta függvénye. Ezekből számítható egy-egy kitüntetett pontban a tengely lehajlása és szögelfordulása, így x_F, ϑ_F, ϑ_A és ϑ_B. Ha a tartóra egyidejűleg a konzolon és a támaszközben is hat erő, akkor az eredő lehajlás függvény a szuperpozíció elve alapján a fenti két terhelési esetből nyert függvények előjeles összege lesz.

A továbbiakban a tengely rugalmas vonalát Castigliano tétele szerint számítjuk. Statikailag határozott szerkezet és prizmatikus rúd esetén ugyan egyszerűbb a rugalmas szál differenciál egyenletének megoldásával eredményre jutni, de a Castigliano tétel sokkal általánosabban használható, ezért itt ennek a módszernek a használatát mutatjuk be.

A hajlítás során a külső erők munkája és a felhalmozódó alakváltozási energia megegyezik. Castigliano tétele szerint a szerkezet alakváltozási energiájának egy adott erő vagy erőpár szerinti parciális differenciálja egyenlő a szerkezet adott pontjának az adott erő vagy nyomaték irányú elmozdulásával illetve elfordulásával.

$$u_i = \frac{\partial U}{\partial F_i}, \quad \text{illetve} \quad \vartheta_i = \frac{\partial U}{\partial M_i}. \qquad (1)$$

A szerkezet tetszőleges pontjában az elmozdulás vagy szögelfordulás tetszőleges irányú vetületét számíthatjuk, ha a keresett helyen a keresett elmozdulás irányban felveszünk egy (tetszőleges nagyságú) Q erőt, vagy a keresett szögelfordulás irányban felveszünk egy (tetszőleges nagyságú) Q nyomatékú erőpárt, és ezzel együtt állítjuk elő a szerkezet belső energiáját, majd Q szerint differenciáljuk azt, a végén pedig a Q=0 helyettesítéssel nyerjük a keresett elmozdulás vagy szögelfordulás összetevőt.

Q-t általánosított erőnek (erő vagy erőpár lehet), q-t pedig általánosított elmozdulásnak (elmozdulásnak vagy szögelfordulásnak) nevezzük. Ha olyan pontban kell kell elmozdulást vagy szögelfordulást számolnunk, ahol eredetileg nem működött erő vagy erőpár, akkor a bevezetett általánosított erő és általánosított elmozdulás segítségével a Castigliano-tétel

$$q = \left.\frac{\partial U}{\partial Q}\right|_{Q=0} \tag{2}$$

alakú lesz [1].
Az igénybevételek a rúdban az eredeti erőrendszerből (nullás index jelzi), és a rúdra pótlólagosan ráhelyezett Q általánosított erőből (és támasztó erőrendszeréből) állnak.

$$M_h = M_{h0} + Q \cdot m, \tag{3}$$

ahol

$$m = \frac{M_{hQ}}{Q} \tag{4}$$

viszonyított igénybevétel (itt viszonyított hajlítónyomaték). Az m mértékegysége mm, ha Q erő, és mértékegység nélküli, ha Q erőpár.
Ha csak a hajlításból származó alakváltozási energiát tekintjük mértékadónak, az alakváltozási energia

$$U = \int_{(L)} \frac{(M_{h0} + Q \cdot m)^2}{2\, I \cdot E} ds \tag{5}$$

alakban írható. Ebből a (2) szerint az általánosított elmozdulás

$$q = \left.\frac{\partial U}{\partial Q}\right|_{Q=0} = \left.\int_{(L)} \frac{(M_{h0} + Q \cdot m) m}{I \cdot E} ds\right|_{Q=0} = \int_{(L)} \frac{M_{h0} \cdot m}{I \cdot E} ds,$$

tehát

$$q = \int_{(L)} \frac{M_{h0} \cdot m}{I \cdot E} ds. \tag{6}$$

Prizmatikus és homogén izotrop rudak esetén A másodrendű nyomaték és a rugalmassági modulusz kiemelhető az integráljel elé, így a következőkben használatos

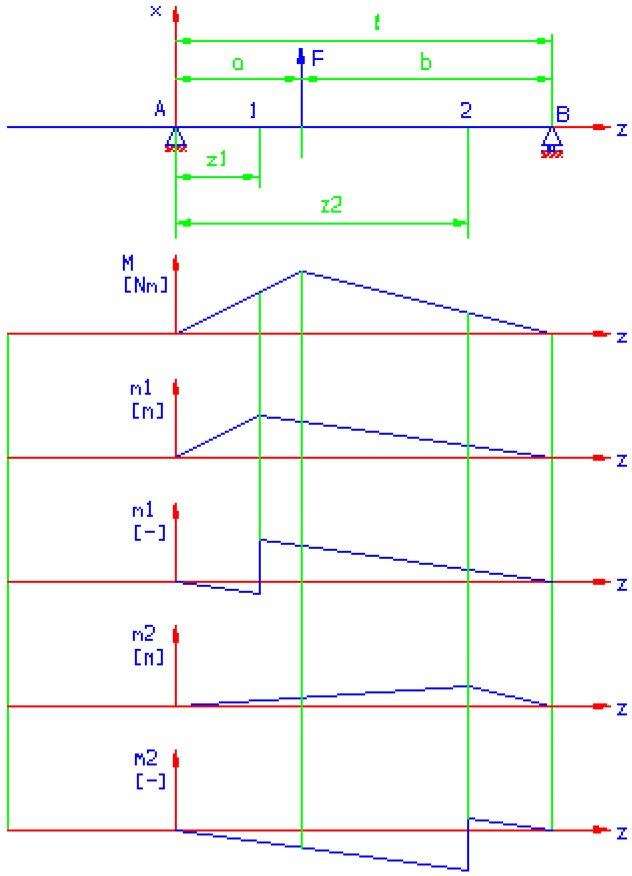
$$q = \frac{1}{I\,E} \int_{(L)} M_{h0}\ m\ ds \tag{7}$$

alakot nyerjük. Az 1. és 2. ábra jelöléseivel az egyenes tartó elmozdulását az eredeti igénybevétel és a viszonyított igénybevétel szorzatának a z szerinti integrálja segítségével nyerjük, azaz

$$q = \frac{1}{I\,E} \int_{(L)} M_{h0}(z)\ m(z)\, dz. \tag{8}$$

A támaszközben koncentrált erővel terhelt egyenes rúd alakváltozása

Tekintsük az 1. ábra szerinti tartót, és képezzük a (8) egyenlet nyomaték függvényeit. A 3. ábra mutatja az eredeti terheléshez tartozó $M_{h0}(z)$ nyomaték változását z mentén, továbbá az 1. és 2. jelű pontokban ható Q általánosított erőkhöz tartozó viszonyított igénybevételeket. A mértékegység nélküliek az erőpárhoz, a hosszúság [m] egységűek az erőhöz tartoznak. Az általánosított erő irányítottságát mindenhol az x koordináta pozitív irányban, illetve a jobbsodrású koordináta rendszer pozitív forgásirányában vettük fel, és ennek megfelelően rajzoltuk meg az eredeti terhelésű tartó igénybevételi ábráit, illetve a viszonyított igénybevételek ábráit.



3. ábra A tényleges erőrendszer nyomatéka és a viszonyított igénybevételek, a támaszközben terhelt tartó esetén

A támasztó erőrendszer a statikai egyenletekkel számítható, a nyomaték és viszonyított nyomaték függvények pedig egyenesek egyenletei. Egyenesek, hiszen a terhelések koncentrált erők vagy koncentrált erőpárok. Az egyenes egyenlete, két pontjának ismeretében az

$$x - x_0 = \frac{x_1 - x_0}{z_1 - z_0}\left(z - z_0\right) \qquad (9)$$

egyenlettel írható le, ahol x helyére a nyomaték vagy a viszonyított nyomaték (független változó) kerül, két ismert pontja pedig P_0 és P_1 .

Az A és B ponti támaszerőket, továbbá a nyomaték függvények 1. és 2. szakaszainak egyenleteit az 1. táblázatban foglaltuk össze.

A lehajlás függvényei a támaszközben terhelt tartón, a (8) egyenlet és az 1. táblázat szerint számíthatók. A nyomaték függvények csak szakaszonként folytonosak, ezért szakaszonként kell elvégezni az integrálást. A szakaszok a 3. ábra segítségével jelölhetőek ki. Más függvény fogja leírni a tengely lehajlást és tengely szögelfordulást az erőtől balra, és az erőtől jobbra.

1. táblázat A támaszközben terhelt tartó nyomaték függvényei

Terhelés és igénybevétele		Támaszerők		A nyomaték, illetve viszonyított nyomatékok függvényei		
		A	B	legnagyobb érték	1. szakaszon	2. szakaszon
+F	$M(z)$ [Nm]	$-F\frac{b}{\ell}$	$-F\frac{a}{\ell}$	$F\frac{ab}{\ell}$	$F\frac{b}{\ell}z$	$-F\frac{a}{\ell}(z-\ell)$
+Q	$m_1(z)$ $[m]$	$-\frac{\ell-z_1}{\ell}$	$-\frac{z_1}{\ell}$	$\frac{\ell-z_1}{\ell}z_1$	$\frac{\ell-z_1}{\ell}z$	$-\frac{z_1}{\ell}(z-\ell)$
+Q	$m_1(z)$ $[-]$	$-\frac{1}{\ell}$	$\frac{1}{\ell}$	1	$\frac{1}{\ell}z$	$\frac{1}{\ell}(z-\ell)$
+Q	$m_2(z)$ $[m]$	$-\frac{\ell-z_2}{\ell}$	$-\frac{z_2}{\ell}$	$\frac{\ell-z_2}{\ell}z_2$	$\frac{\ell-z_2}{\ell}z$	$-\frac{z_2}{\ell}(z-\ell)$
+Q	$m_2(z)$ $[-]$	$\frac{1}{\ell}$	$-\frac{1}{\ell}$	1	$-\frac{1}{\ell}z$	$-\frac{1}{\ell}(z-\ell)$

Az erőtől balra

$$q=\frac{1}{I\,E}\int\limits_{(L)}M_{h0}(z)\,m_1(z)\,dz$$

$$I\,E\,q=\int_0^{z1}M_1(z)\,m_1(z)\,dz+\int_{z1}^{a}M_1(z)\,m_2(z)\,dz+\int_a^{\ell}M_2(z)\,m_2(z)\,dz \qquad (10)$$

A (10) összefüggés q általánosított elmozdulása egyaránt megadja az x irányú tengelylehajlást illetve az y tengely körüli ϑ_y szögelfordulást, ha az 1. táblázatból az 1. sor nyomatékait és a 2. illetve 3. sor viszonyított nyomatékait helyettesítjük be a képletbe. Az így nyert összefüggések

$$I\,E\,f_{x1}=\int_0^{z1}F\frac{b}{\ell}z\cdot\frac{\ell-z_1}{\ell}z\,dz+\int_{z1}^{a}F\frac{b}{\ell}z\cdot\left(-\frac{z_1}{\ell}(z-\ell)\right)dz+\int_a^{\ell}\left(-F\frac{a}{\ell}(z-\ell)\right)\cdot\left(-\frac{z_1}{\ell}(z-\ell)\right)dz$$

$$\frac{6\,I\,E\,\ell}{F}f_{x1}=6b\left(1-\frac{z_1}{\ell}\right)\int_0^{z1}z^2\,dz+6b\frac{z_1}{\ell}\int_{z1}^{a}\ell z-z^2\,dz+6a\frac{z_1}{\ell}\int_a^{\ell}(z-\ell)^2\,dz$$

$$\frac{6\,I\,E\,\ell}{F}f_{x1}=2b\left(1-\frac{z_1}{\ell}\right)\left[z^3\right]_0^{z1}+3bz_1\left[z^2\right]_{z1}^{a}-2\frac{bz_1}{\ell}\left[z^3\right]_{z1}^{a}+2a\frac{z_1}{\ell}\left[(z-\ell)^3\right]_a^{\ell}$$

$$\frac{6\,I\,E\,\ell}{F}f_{x1}=2b\left(1-\frac{z_1}{\ell}\right)z_1^3+3bz_1\left(a^2-z_1^2\right)-2\frac{bz_1}{\ell}\left(a^3-z_1^3\right)+2a\frac{z_1}{\ell}\left[(\ell-\ell)^3-(a-\ell)^3\right]$$

$$\frac{6\,I\,E\,\ell}{F}f_{x1}=+3bz_1a^2-bz_1^3-2\frac{ba^3z_1}{\ell}-2a\frac{z_1}{\ell}(a-\ell)^3$$

$$\frac{6\,I\,E\,\ell}{F}f_{x1}=-bz_1^3+3bz_1a^2-2\frac{ba^3z_1}{\ell}-2a\frac{z_1}{\ell}(-b)^3$$

$$\frac{6\,I\,E\,\ell}{F}f_{x1}=-bz_1^3+\left(3ba^2-2ab\frac{a^2-b^2}{\ell}\right)z_1$$

$$\frac{6\,I\,E\,\ell}{F} f_{x1} = -bz_1^3 + \left(3ba^2 - 2ba^2 + 2ab^2\right) z_1$$

$$\boxed{\frac{6\,I\,E\,\ell}{F} f_{x1} = -bz_1^3 + ab(a + 2b) z_1} \tag{11}$$

Innen f_{x1} már számítható. A többi elmozdulást (lehajlást) hasonlóan számíthatjuk. Például ugyancsak az erőtől balra eső szakaszon az y tengely körüli szögelfordulás a (10) összefüggésből kiindulva az 1. táblázat 1. és 3. sorának felhasználásával

$$I\,E\,\vartheta_{y1} = \int_0^{z1} F\frac{b}{\ell} z \cdot \left(-\frac{1}{\ell} z\right) dz + \int_{z1}^{a} F\frac{b}{\ell} z \cdot \left(-\frac{1}{\ell}(z-\ell)\right) dz + \int_a^{\ell} \left(-F\frac{a}{\ell}(z-\ell)\right) \cdot \left(-\frac{1}{\ell}(z-\ell)\right) dz$$

$$\frac{I\,E\,\ell}{F} \vartheta_{y1} = -\frac{b}{\ell}\int_0^{z1} z^2 dz - \frac{b}{\ell}\int_{z1}^{a} z^2 - z \cdot \ell dz + \frac{a}{\ell}\int_a^{\ell} (z-\ell)^2\, dz$$

$$\frac{I\,E\,\ell}{F} \vartheta_{y1} = -\frac{b}{\ell}\int_0^{a} z^2 dz + b\int_{z1}^{a} z\, dz + \frac{a}{\ell}\int_a^{\ell} (z-\ell)^2\, dz$$

$$\frac{6\,I\,E\,\ell}{F} \vartheta_{y1} = -2\frac{ba^3}{\ell} + 3b\left(a^2 - z_1^2\right) - 2\frac{a}{\ell}(a-\ell)^3$$

$$\frac{6\,I\,E\,\ell}{F} \vartheta_{y1} = -2\frac{ba^3}{\ell} + 3ba^2 - 3bz_1^2 + 2\frac{a}{\ell} b^3$$

$$\frac{6\,I\,E\,\ell}{F} \vartheta_{y1} = -2ab\frac{a^2 - b^2}{\ell} + 3ba^2 - 3bz_1^2$$

$$\frac{6\,I\,E\,\ell}{F} \vartheta_{y1} = -2ab(a-b) + 3aba - 3bz_1^2$$

$$\frac{6\,I\,E\,\ell}{F} \vartheta_{y1} = +a^2 b - 2ab^2 - 3bz_1^2$$

$$\boxed{\frac{6\,I\,E\,\ell}{F} \vartheta_{y1} = -3bz_1^2 + ab(\ell + b)} \tag{12}$$

Innen ϑ_{y1} már számítható. A többi szögelfordulást hasonlóan számíthatjuk.

Az erőtől jobbra

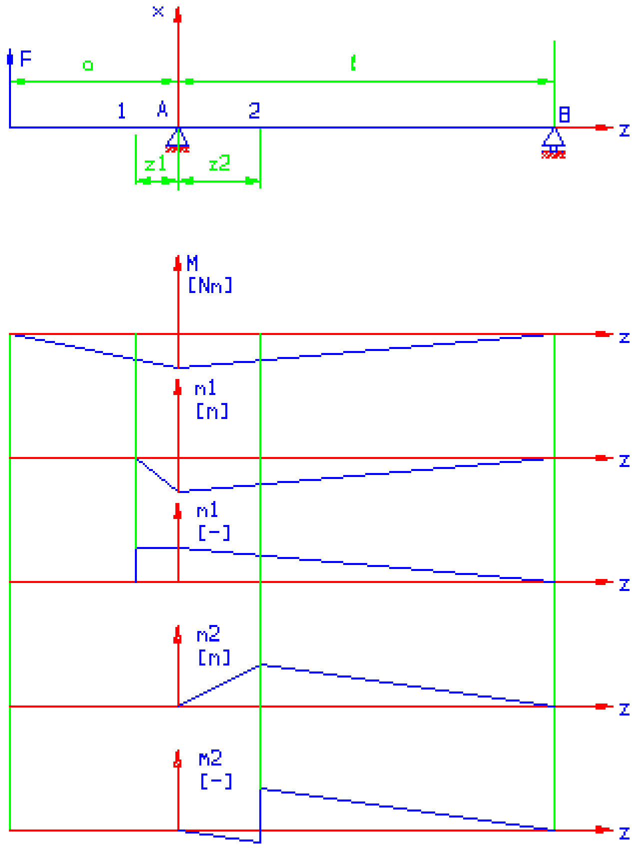
$$I\,E\,q = \int_0^{a} M_1(z)\, m_1(z)\, dz + \int_a^{z2} M_2(z)\, m_1(z)\, dz + \int_{z2}^{\ell} M_2(z)\, m_2(z)\, dz \tag{13}$$

egyenlet írja le a tengelylehajlást illetve a szögelfordulást, ha az 1. táblázatból a 4. illetve 5. sorokból helyettesítjük be a viszonyított nyomatékokat. Az így nyert összefüggések

$$\boxed{\frac{6\,I\,E\,\ell}{F} f_{x2} = -a(\ell - z_2)^3 + ab(2a + b)(\ell - z_2)} \tag{14}$$

$$\boxed{\frac{6\,I\,E\,\ell}{F} \vartheta_{y2} = 3a(\ell - z_2)^2 - ab(a + 2b)} \tag{15}$$

A konzolon koncentrált erővel terhelt egyenes rúd alakváltozása



4. ábra A tényleges erőrendszer nyomatéka és a viszonyított igénybevételek, a konzol végén terhelt tartó esetén

A lehajlás függvényei a konzolon terhelt tartón, a (8) egyenlet és az 2. táblázat szerint számíthatók. A nyomaték függvények csak szakaszonként folytonosak, ezért szakaszonként kell elvégezni az integrálást. A szakaszok a 4. ábra segítségével jelölhetőek ki. Más függvény fogja leírni a tengely lehajlást és tengely szögelfordulást az erőtől balra, és az erőtől jobbra.

Az erőtől balra

$$I\,E\,q = \int_{-z1}^{0} M_1(z)\,m_1(z)\,dz + \int_{0}^{\ell} M_2(z)\,m_2(z)\,dz \tag{16}$$

A (16) összefüggés q általánosított elmozdulása egyaránt megadja az x irányú tengelylehajlást illetve az y tengely körüli ϑ_y szögelfordulást, ha a 2. táblázatból az 1. sor nyomatékait és a 2. illetve 3. sor viszonyított nyomatékait helyettesítjük be a képletbe. Az így nyert összefüggések

$$\boxed{\frac{6\,I\,E\,\ell}{F} f_{x1} = \ell\left(-z_1^3 + 3az_1^2 + 2a\ell z_1\right)} \tag{17}$$

$$\boxed{\frac{6\,I\,E\,\ell}{F} \vartheta_{y1} = -\ell\left(-3z_1^2 + 6az_1 + 2a\ell\right)} \tag{18}$$

2. táblázat A konzolon terhelt tartó nyomaték függvényei

Terhelés és igénybevétele		Támaszerők		A nyomaték, illetve viszonyított nyomatékok függvényei		
		A	B	legnagyobb érték	1. szakaszon	2. szakaszon
+F	$M(z)$ [Nm]	$-F\left(1+\frac{a}{\ell}\right)$	$F\frac{a}{\ell}$	$-Fa$	$-F(z+a)$	$F\frac{a}{\ell}(z-\ell)$
+Q	$m_1(z)$ $[m]$	$-\left(1+\frac{z_1}{\ell}\right)$	$\frac{z_1}{\ell}$	$-z_1$	$-(z+z_1)$	$\frac{z_1}{\ell}(z-\ell)$
+Q	$m_1(z)$ $[-]$	$\frac{1}{\ell}$	$-\frac{1}{\ell}$	1	1	$-\frac{1}{\ell}(z-\ell)$
+Q	$m_2(z)$ $[m]$	$-\frac{\ell-z_2}{\ell}$	$-\frac{z_2}{\ell}$	$\frac{\ell-z_2}{\ell}z_2$	$\frac{\ell-z_2}{\ell}z$	$-\frac{z_2}{\ell}(z-\ell)$
+Q	$m_2(z)$ $[-]$	$\frac{1}{\ell}$	$-\frac{1}{\ell}$	1	$-\frac{1}{\ell}z$	$-\frac{1}{\ell}(z-\ell)$

Az erőtől jobbra

$$I\,E\,q=\int_0^{z2}M_2(z)\,m_1(z)\,dz+\int_{z2}^{\ell}M_2(z)\,m_2(z)\,dz \tag{19}$$

egyenlet írja le a tengely lehajlást illetve a szögelfordulást, ha a 2. táblázatból a 4. illetve 5. sorokból helyettesítjük be a viszonyított nyomatékokat. Az így nyert összefüggések

$$\boxed{\frac{6\,I\,E\,\ell}{F}f_{x2}=-a\left(z_2^3-3\ell z_2^2+2\ell^2z_2\right)} \tag{20}$$

$$\boxed{\frac{6\,I\,E\,\ell}{F}\vartheta_{y2}=a\left(-3z_2^2+6\ell z_2-2\ell^2\right)} \tag{21}$$

A tengely x irányú lehajlása a szuperpozíció elve szerint a két $f_x(z)$ lehajlás függvény előjel helyes összege lesz. Ha az yz síkban is hatnak erők, akkor ott két $f_y(z)$ lehajlásfüggvényt összegezünk előjelhelyesen, majd a teljes lehajlást egy adott helyen (pl. egy fogaskerék z_F koordinátájú helyén

$$f=\sqrt{f_x^2(z_F)+f_y^2(z_F)} \tag{22}$$

szerint számíthatjuk. Adott tengelypont szögelfordulását hasonlóan, a

$$\vartheta=\sqrt{\vartheta_x^2(z_F)+\vartheta_y^2(z_F)} \tag{23}$$

képlettel számítjuk.

Irodalom

[1] Páczelt István, Rudak és rúdszerkezetek alakváltozása, in Szilárdságtan II.(kézirat) (J14-1302, Tankönyvkiadó, Budapest, 1981., 207p.
[2] Drobni József, Gépelemek III. (kézirat) (J14-1458), Tankönyvkiadó, Budapest, 1988., 231p.