

Tenzor kontrakciója

Tenzor rendje kettővel csökken, ha egy kontravariáns és kovariáns indexét összeadjuk:

Pl.

$$T_{\mu}^{\mu} = T_0^0 + T_1^1 + T_2^2 + T_3^3 \quad \text{másodrendű tenzorból skalár lesz.}$$

Ez a mátrixok spúr műveletének általánosítása.

Egységtenzor:

Tetszőleges négyesvektorral szorozva azt önmagába viszi át: $\delta_{\rho}^{\mu} A^{\rho} = A^{\mu}$

$$(\delta_{\nu}^{\mu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Egységtenzor kontrakciója (spúrja): $\delta_{\mu}^{\mu} = 4$

Egységtenzor inverze önmaga: $\delta_{\rho}^{\mu} \delta_{\nu}^{\rho} = \delta_{\nu}^{\mu}$

Lorentz transzformáció során az egységtenzor önmagába megy át.

A metrikus tenzor

A metrikus tenzor egy tetszőleges kovariáns vektorból előállítja a megfelelő kontravariáns vektort:

$$A^\mu = g^{\mu\nu} A_\nu$$

A kovariáns metrikus tenzor esetében pedig: $A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu$

A metrikus tenzor segítségével tehát az indexek le és fel húzhatók.

Komponensei mátrixalakban:

$$(g^{\mu\nu}) = (g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

A kovariáns metrikus tenzor a kontravariáns metrikus tenzor inverze: $g^{\mu\rho} g_{\rho\nu} = \delta_\nu^\mu$

A metrikus tenzor determinánása $g = -1$, spúrja pedig $g_\mu^\mu = -2$.

Az ívelem négyzete: $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = g^{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu$

A metrikus tenzor megadja, hogyan kell kiszámítani az ívhosszelem négyzetét a koordináta-differenciálokból.

Gradiens és divergencia

Skalár négyesgradiense:

$\varphi(x^\mu)$: skalárértékű függvény a Minkowski-téren értelmezve

$\frac{d\varphi}{dx^\mu}$ kovariáns vektorként transzformálódik $\frac{d\varphi}{dx_\mu}$ kontravariáns vektorként

Mivel a $d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu} dx_\mu = \frac{\partial\varphi}{\partial x^\mu} dx^\mu$ mennyiség skalár.

$\partial_\mu = \frac{\partial\varphi}{\partial x^\mu}$ kovariáns vektoroperátor $\partial^\mu = \frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}$ kontravariáns vektoroperátor

Vektormező négyesdivergenciája:

$A^\mu(x^\mu)$: a Minkowski-téren értelmezett vektormező

A négyesdivergencia Lorentz-skalár: $\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\mu} = \partial_\mu A^\mu$

A négyestérfogat elem Lorentz-invariáns: $d\Omega \equiv dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 = c dt dV$

A speciális relativitás elve

A természet törvényei nem függnék attól, hogy mely inerciarendszerben írjuk fel őket.

Matematikailag: a törvényeket leíró egyenletek alakja azonos

Ez akkor lehet, ha az **egyenletek Lorentz-kovariánsak**, vagyis

$$\boxed{\text{négyestenzor} = 0} \quad \text{alakúak.}$$

Ilyenkor az adott típusú négyestenzor Lorentz-transzformáció hatására ugyanolyan típusú négyestenzorba transzformálódik. A matematikai alak megmarad.

Mozgásegyenletek:

Származtatás a **legkisebb hatás elve** alapján.

Hatásfunkcionál: létezik az általános koordinátáknak és általános sebességeknek olyan funkcionálja, amely az adott kezdő- és végpont között a valóságos mozgásra extrémális. Lorentz-invariáns vagyis Lorentz-skalár.

A hatás a rendszer mozgására vonatkozó törvényt fejezi ki a legáltalánosabb módon.

Értéke tehát független az inerciarendszertől ← *speciális relativitás elve*

Sebességtranszformáció

A K rendszerben mérve a test sebessége a pozitív x irányban $u_x = \Delta x / \Delta t$.

A K' rendszer a K -hoz képest a pozitív x irányban halad v sebességgel.

Az x irányú sebességkomponens a K' rendszerben mérve:

$$u_x' = \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{\gamma(\Delta x - v\Delta t)}{\gamma\left(\Delta t - \frac{\Delta x v}{c^2}\right)} \cdot \frac{\Delta t}{\Delta t} = \frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{c^2}} \quad \text{ahol } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Amennyiben a mozgó rendszerből szeretnénk u_x' -t átranszformálni a nyugvó rendszerbe, akkor mindenhová v helyett $-v$ -t kell írni:

$$u_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\gamma(\Delta x' + v\Delta t')}{\gamma\left(\Delta t' + \frac{\Delta x' v}{c^2}\right)} \cdot \frac{\Delta t'}{\Delta t'} = \frac{u_x' + v}{1 + \frac{u_x' v}{c^2}}$$

A v sebességre merőleges komponensek transzformációja:

$$u_y' = \frac{\Delta y'}{\Delta t'} = \frac{\Delta y}{\gamma\left(\Delta t - \frac{\Delta x v}{c^2}\right)} \cdot \frac{\Delta t}{\Delta t} = \frac{u_y}{\gamma\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)} \quad \text{és} \quad u_z' = \frac{\Delta z'}{\Delta t'} = \frac{u_z}{\gamma\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)}$$

Az ellenkező irányba transzformálva pedig:

$$u_y = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{\Delta y'}{\gamma\left(\Delta t' + \frac{\Delta x' v}{c^2}\right)} \cdot \frac{\Delta t'}{\Delta t'} = \frac{u_y'}{\gamma\left(1 + \frac{u_x' v}{c^2}\right)} \quad \text{és} \quad u_z = \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{u_z'}{\gamma\left(1 + \frac{u_x' v}{c^2}\right)}$$

Négyessebesség

A sebesség közönséges értelemben vett definíciója ($i = 1, 2, 3$):

$$v^i \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x^i}{\Delta t}$$

Számláló négyesvektor komponenseiként, nevező annak nulladik komponenseként transzformálódik. **A hányados nem transzformálódik négyesvektorként!**

Kis sebességeknél ($\Delta t' = \Delta t$) kapunk csak megfelelő hármasektorokat, amikor az idő skalárként viselkedik.

Invariáns skalár szerint kell deriválni!

Világvonal: a pontrészcseke mozgása során a téridőben kirajzol egy vonalat.

Ez paraméterezhető egy adott elemi eseménytől mérhető s ívhosszal, vagy a vele arányos **sajátidővel**.

$$s = c\tau \quad \tau: \text{a } K_0 \text{ nyugalmi rendszerben mért idő}$$

Mind az ívhossz, mind a sajátidő Lorentz-skalár.

Négyessebesség:

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$$

idődilatáció: $dt = \gamma d\tau$

γ : Lorentz-faktor K és K_0 között.

$$u^i = \frac{dx^i}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \gamma \frac{dx^i}{dt} = \gamma v^i$$

$$u^0 = \frac{dx^0}{d\tau} = \frac{cdt}{d\tau} = \gamma c$$

így $u^\mu = (\gamma c, \gamma \vec{v})$

Feladat

Bizonyítsa be, hogy a négyessebesség időszerű vektor, és normanégyzete Lorentz-skalár!

Négyesgyorsulás

A négyesgyorsulás a négyessebesség sajátidő szerinti deriváltja:

$$a^\mu \equiv \frac{du^\mu}{d\tau} = \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2}$$

A négyessebesség és a négyesgyorsulás ortogonális vektorok.

Bizonyítás: azon alapul, hogy a négyessebesség normanégyzete konstans.

$$\frac{d}{d\tau} (u_\mu u^\mu) = u_\mu \frac{du^\mu}{d\tau} + \frac{du_\mu}{d\tau} u^\mu = 0$$

Mivel:

$$\frac{du_\mu}{d\tau} u^\mu = g_{\kappa\mu} \frac{du^\kappa}{d\tau} g^{\mu\lambda} u_\lambda = \delta_\kappa^\lambda \frac{du^\kappa}{d\tau} u_\lambda = \frac{du^\kappa}{d\tau} u_\kappa$$

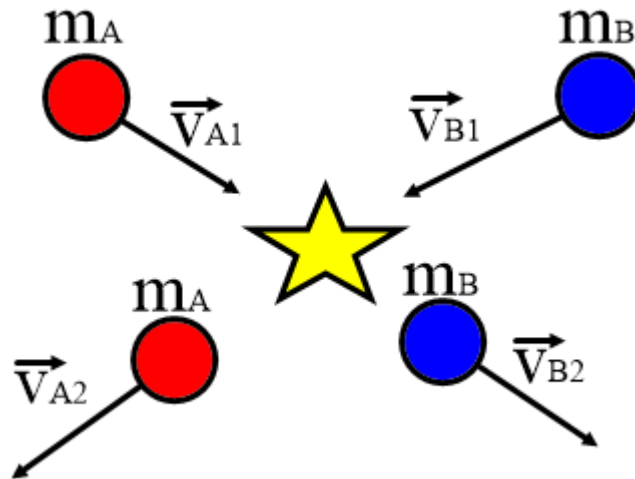
Tehát a normanégyzet deriváltjában ugyanaz a tag szerepel kétszer. Kettővel osztva:

$$u_\mu \frac{du^\mu}{d\tau} = u_\mu a^\mu = 0$$

A tömeg fogalma

A klasszikus (newtoni) mechanikában a tömeg a tehetetlenség mértéke.

Két tömegpont ütközése esetén a sebességváltozások aránya a tömegek arányának reciprokja:



$$\frac{|\vec{v}_{A2} - \vec{v}_{A1}|}{|\vec{v}_{B2} - \vec{v}_{B1}|} = \frac{m_B}{m_A}$$

Tömeg relativisztikus mozgás esetén

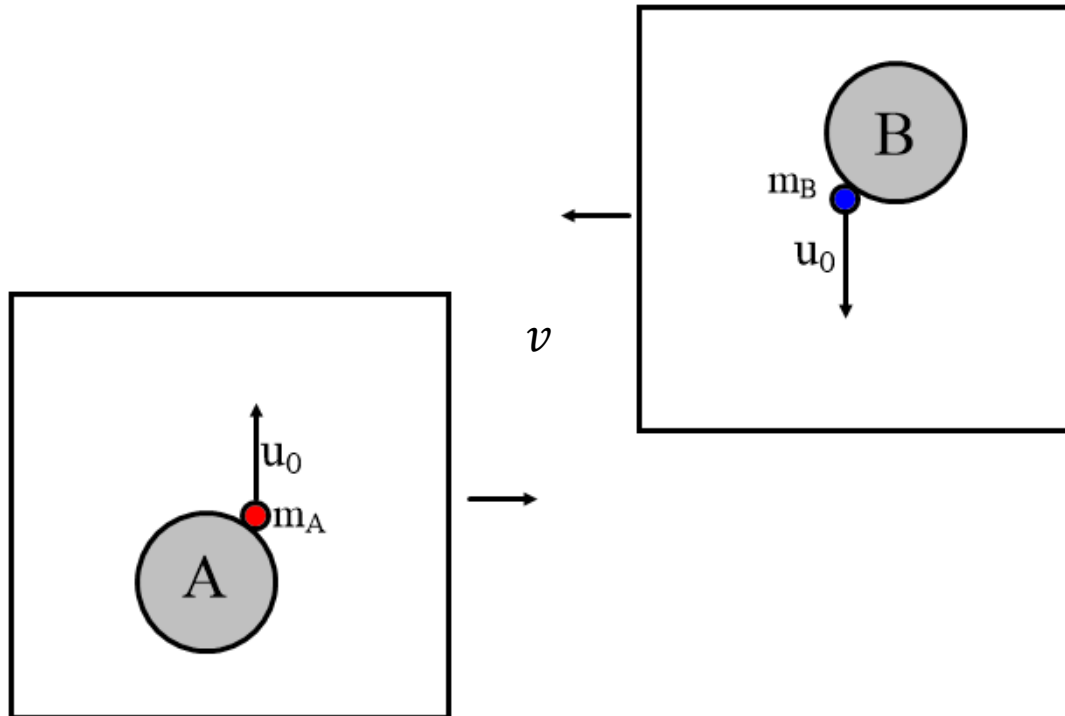
Legyen két megfigyelő A és B , akik egymáshoz képest nyugalomban vannak, és egymásnak dobnak két ugyanolyan ($m_A = m_B = m_0$) labdát azonos u_0 nagyságú sebességgel, melyek rugalmasan ütköznek.

A két labda ütközés után ugyanolyan u_0 nagyságú sebességgel pattan vissza A és B kezébe.

Így aztán természetesen:

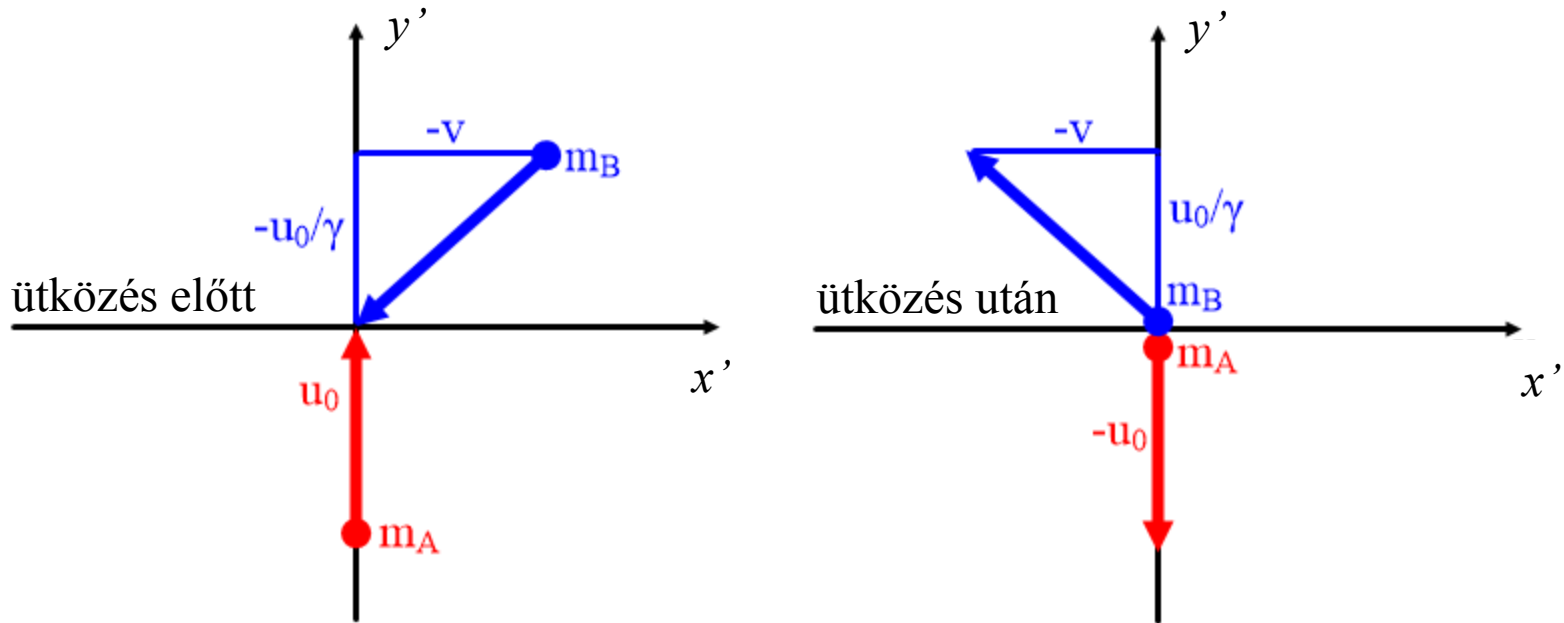
$$\frac{2u_0}{2u_0} = \frac{m_B}{m_A} = 1$$

Most mozogjon A és B egymáshoz képest v sebességgel a labdák irányára merőlegesen.



Relativisztikus tömegnövekedés

Legyen K' vonatkoztatási rendszer az A megfigyelőhöz rögzítve, K pedig B megfigyelőhöz. K' a $+x$ irányban halad v sebességgel. Ekkor a labdák sebességei ütközés előtt és után:



$$\frac{m_B}{m_A} = \frac{|\Delta u_{Ay}|}{|\Delta u_{By}|} = \frac{2u_0}{2u_0/\gamma} = \gamma \quad \text{ahol } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Amennyiben $u_0 \rightarrow 0$, akkor elmondható, hogy m_A nyugalomban van, m_B pedig v nagyságú sebességgel mozog az A megfigyelőhöz képest.

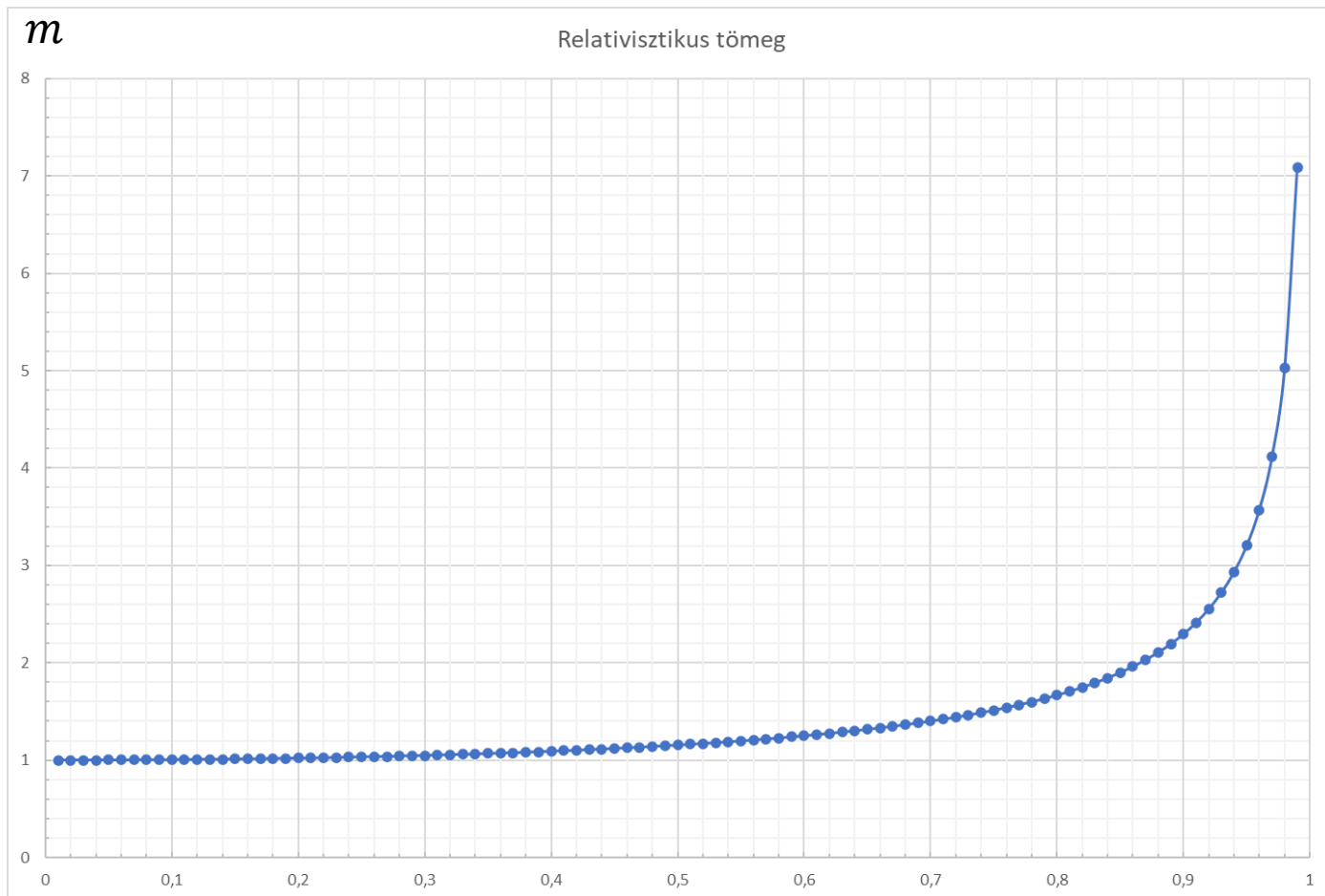
$$m_A = m_0 \quad \text{nyugalmi tömeg}$$

$$m_B = \gamma m_A = \gamma m_0 \quad \text{mozgási tömeg}$$

A relativisztikus tömeg sebességfüggése

A K vonatkoztatási rendszerben nyugvó megfigyelő az u sebességű test tömegét a nyugalmi tömegnél nagyobbak méri:

$$m = \gamma m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$



Relativisztikus lendület

A mozgó test relativisztikus tömegnövekedése miatt a lendület sem a klasszikus módon függ valójában a sebességtől, a megszokott képlet kizárólag $u \ll c$ esetén igaz.

A fény sebességével összemérhető (relativisztikus) sebességek esetén a lendület nagysága:

$$p = mu = \gamma m_0 u = \frac{m_0 u}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

