Kovács Endre, Paripás Béla,

Fizika I.

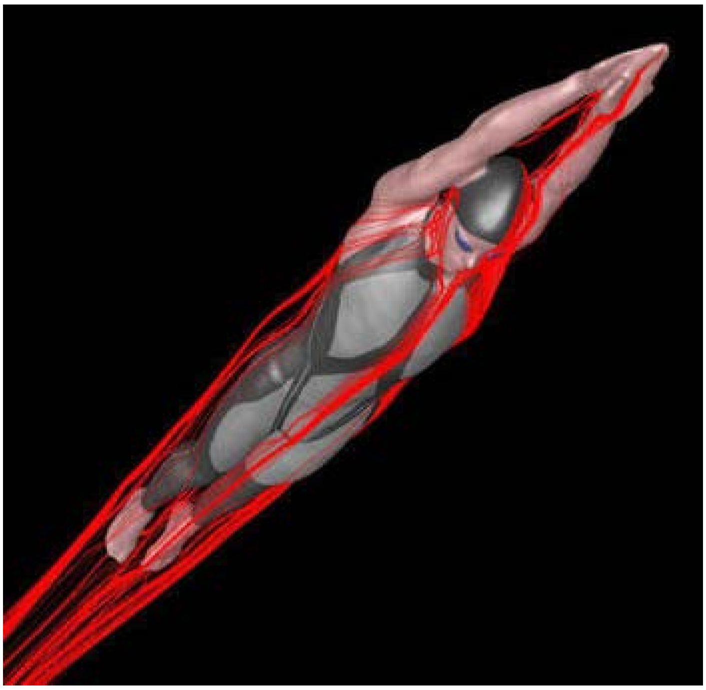
4

A Műszaki Földtudományi Alapszak tananyagainak kifejlesztése a TÁMOP 4.1.2-08/1/A-2009-0033 pályázat keretében valósult meg.

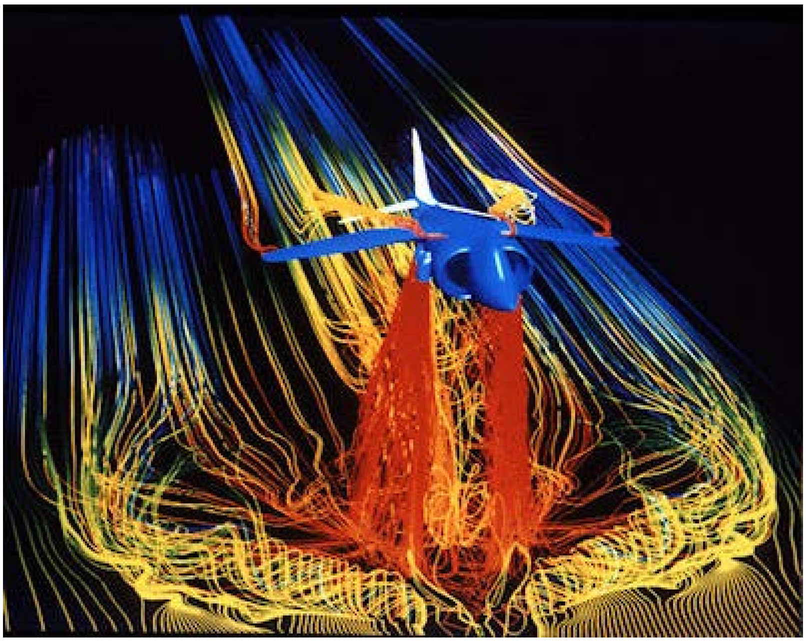
IV. FOLYADÉKOK ÉS GÁZOK MECHANIKÁJA

1. BEVEZETÉS

A merev testek után olyan anyagok mechanikájával foglalkozunk, amelyek alakjukat szabadon változtatják. Először nyugvó folyadékokat és – bár nem mindig hangsúlyozzuk – gázokat tárgyalunk, majd a folyadékok áramlásának törvényszerűségeibe nyújtunk egy nagyon alapszintű bevezetőt.



Speedo LZR – a "cáparuha"
A folyadékok áramlását irányító törvényszerűségek megértése vezetett el olyan csúcstechnológiájú fejlesztésekhez, mint az olimpiai úszók "cáparuhája".



Levegő áramlása
Egy repülő prototípusának számítógépes szimulációja, amint leszállás közben áramlásokat kelt

maga körül (NASA).

2. Hidrosztatika (nyugvó folyadékok mechanikája)

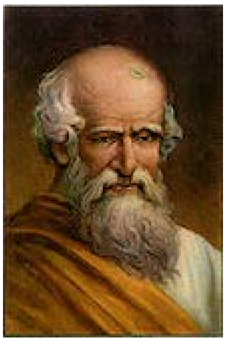
Hidrosztatikai nyomás

A **nyomás** definíciója: $p = \lim_{A \to 0} \frac{F(A)}{A}$, ahol *F(A)* az *A* felületre merőlegesen ható erő nagysága, vagyis a nyomás skalármennyiség. Nehézségi erőtérben lévő álló folyadékban a nyomás csak attól függ, milyen mélyen vagyunk a szabad felszín alatt, a *A* felület irányításától nem. Legyen az *A* felület vízszintes és legyen felette *h* magasságú folyadék, ekkor a folyadék térfogata *Ah*, a tömege *ρAh*, a súlya *ρgAh*, tehát a folyadék súlyából származó **hidrosztatikai nyomás**:

$$p_H = \rho g h \ .$$

Nyugvó folyadékban lévő tárgyakra vagy az edény falára a folyadék csak a felületre merőleges erőt fejthet ki.

Felhajtóerő



Szürakuszai Arkhimédész (kb. i.e. 287 - i.e. 212) természettudós, ókori szicíliai matematikus, mérnök, fizikus, csillagász, filozófus.

Arkhimédész törvénye kimondja, hogy a folyadékba mártott testre felhajtóerő hat, amely nagysága egyenlő a test által kiszorított, (azaz a test bemerülő részével egyenlő térfogatú) folyadék súlyával.

Bizonyítás teljesen bemerülő téglatestre: legyenek a téglatest vízszintes oldalai *a* és *b*, a függőleges *c*. A függőleges oldallapokra vízszintesen ható erők kiegyenlítik egymást, a felső vízszintes lapnál a nyomás legyen *ρgh* (*ρ* a folyadék sűrűsége) az alsó lapnál *ρg(h+c)*. A fenti lapot eszerint ρghab erő nyomja lefelé, a lentit *ρg(h+c)ab* felfelé. Az eredő erő *ρgcab*. Mivel abc a téglatest térfogata, ρabc a kiszorított folyadék tömege, *ρgabc* a súlya, *q.e.d*.

Ha a test a folyadéknál nagyobb sűrűségű, lemerül az aljára, ha egyenlő sűrűségű, akkor lebeg, ha kisebb sűrűségű, akkor úszik (persze csak ha elég mély a folyadék és nem "fut zátonyra").

A) A test lemerül. Ekkor a kiszorított folyadék térfogata megegyezik a test teljes térfogatával.

Mivel $G = \rho_t V_g$ és $F_f = \rho_f V_g$, a két egyenletet elosztva

$$\frac{F_f}{G} = \frac{\rho_f}{\rho_t}$$

vagyis ahányad része a folyadék sűrűsége a testének, annyiad része a test súlyának a felhajtóerő, annyiad résszel kisebb erővel lehet egyensúlyban tartani. (Ezt nem túl szabatosan úgy is szokták mondani, hogy ennyit veszít a súlyából.) Ahhoz, hogy a test egyensúlyba kerüljön, tartóerő szükséges:

$$F_t = G - F_f = (\rho_t - \rho_f) V_g$$

B) Úszás esetében a test súlya egyenlő a felhajtóerővel. A fenti téglatestre $\rho_t$gabc= $\rho_f$gabx, ahol x a bemerülési mélység. Ebből $x = c \cdot \rho_t / \rho_f$. Általában a bemerülő térfogat:

$$v_{be} = v_t \rho_t / \rho_f$$

vagyis ahányad része a test sűrűsége a folyadékénak, annyiad része merül bele a folyadékba.

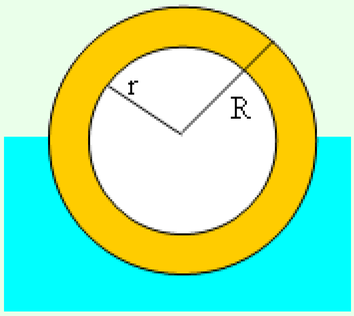
Számolási Feladat

Feladat

Sárgarézből készült gömbhéj külső sugara 1m. Mekkora a falvastagsága, ha félig bemerülve úszik a vízen? (A sárgaréz sűrűsége 8,5 kg/dm^3.)

Megoldás: Mivel a gömb egyensúlyban van, a rá ható súlyerő megegyezik a felhajtóerővel.

A réz térfogata: $V_{réz} = \frac{4}{3}\pi\left(R^3 - r^3\right)$. A kiszorított víz térfogata: $V_v = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}R^3\pi$.



Vagyis a súlyerő: $G = \rho_{réz} g V_{réz}$, a felhajtóerő $F_f = \rho_v g V_v$, tehát az egyenlet:

$$\rho_v \frac{2}{3} R^3 \pi = \rho_{réz} \frac{4}{3}\pi\left(R^3 - r^3\right)$$

Ebből:

$$r^3 = \left(1 - \frac{\rho_v}{2\rho_r}\right) R^3$$

azaz $r = 0{,}98m$, vagyis a falvastagság: $R - r = 2cm$

Felületi feszültség

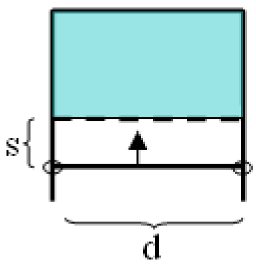
Ha egy borotvapengét lapjával óvatosan nyugvó vízfelszínre helyezünk, az nem süllyed el. Ha erővel lenyomjuk a vízfelszín alá, akkor viszont nem jön fel, hanem elmerül, vagyis a sűrűsége nagyobb, mint a vízé. Mi az oka, hogy az első esetben nem süllyedt el?

Ha egy olyan drótkeretet, amelynek egyik oldala elcsúsztatható, mosószeres vízbe mártunk, a folyadék hártyaként feszül rá a keretre, és ha elég könnyű a drót, akár fel is emelheti.

A drótdarabra ható erő csak a drót hosszától és a folyadék minőségétől függ, független a hártya felületének nagyságától. Képlettel: $F = 2\alpha d$, ahol α a folyadékot jellemző állandó, amit **felületi feszültségnek** is nevezünk. A 2-es faktor indoka pedig az, hogy a szappanhártyának két felülete van. Ez utóbbiból az is következik, hogy ha a drótdarab *s* utat tesz meg, a felület megváltozása $\Delta A = 2sd$. A szappanhártya által kifejtett erő által végzett munka, miközben *s*-sel magasabbra emelte a drótot:

$$W = Fs = \alpha s d = \alpha \Delta A$$

vagyis a felület-változással arányos.



Következésképp a folyadéknak a felületével arányos energiát kell tulajdonítanunk: $E = \alpha A$.

Ennek oka, hogy a folyadék részecskéi között rövid hatótávolságú erők hatnak. Ezért igyekeznek a folyadékok minimalizálni a felületüket, pl. a cseppek gömb alakot felvenni (súlytalanságban). A borotvapenge is azért nem süllyed el, mert a süllyedés növelné a felület energiáját és a penge helyzeti energiája erre kezdetben (amíg át nem szakad a hártya) nem lenne elegendő.

Előfordul, hogy az edény fala és a folyadék részecskéi közötti vonzóerők (itt nem elsősorban a gravitációs erőre kell gondolni!) erősebbek, mint a folyadék részecskéi által egymásra gyakorolt erő. Ekkor a folyadék "nedvesíti" az edény falát. Ezen alapszanak a hajszálcsöveknél megfigyelhető jelenségek is.

Molnárka *[i]*
Egy rovar, mely a víz felületi feszültségét kihasználva közlekedik.

3. HIDRODINAMIKA (ÁRAMLÁSTAN)

A folyadékok és a gázok is részecskékből (atomokból, molekulákból) állnak. Nem ezek pályáját követjük nyomon, hanem azt vizsgáljuk, hogy a tér egy adott pontjában mennyi az ott áramló részecskék sebessége, mennyi a nyomás, a sűrűség, stb. **Stacionáriusnak** hívjuk az áramlást akkor, ha a tér bármely pontjában ezek a jellemzők függetlenek az időtől. (Tehát nem arról van szó, hogy egy adott részecske sebessége lenne állandó, ez egy görbe csőben lehetetlen lenne!)

Kontinuitási egyenlet

Az anyag- ill. tömegmegmaradásból következik, hogy ha egy csőben stacionárius módon áramlik a folyadék, akkor a cső bármely keresztmetszetén másodpercenként ugyanannyi tömegű folyadék áramlik át. Tegyük fel, hogy a cső vékony, azaz egy adott keresztmetszetnél a sebesség minden pontban ugyanakkora. Az első keresztmetszet legyen A_1, a második A_2, a megfelelő sűrűségek, ill. sebességek ρ_1 és ρ_2, ill. v_1 és v_2. Egy kis Δt idő alatt a folyadékrészecskék $v\Delta t$ utat tesznek meg, így az átáramlott folyadék térfogata $Av\Delta t$, a tömege $\rho Av\Delta t$. A két keresztmetszeten egységnyi idő alatt átáramlott tömeg (stacionárius esetben) egyenlő, tehát

$$\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2$$

Ezt úgy hívják, hogy **kontinuitási egyenlet** vékony áramcsőre. Ha azt is feltesszük, hogy a folyadék összenyomhatatlan, akkor $\rho_1=\rho_2$ vagyis

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \qquad (1)$$

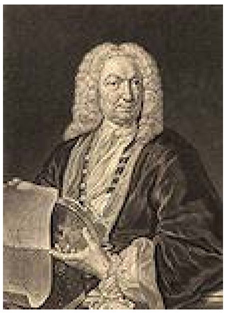
Ezt általánosíthatjuk tetszőleges térfogatra. A térfogatban található folyadék tömege $\int_V \rho dV$

Ez csak akkor változhat, ha a térfogatot határoló felületen nem ugyanannyi folyadék lép be, mint amennyi ki. A felület normálisa kifelé mutat, tehát a nettó kiáramlás $\int \rho \vec{v} d\vec{A}$. Ezzel a *kontinuitási egyenlet általános alakja*:

$$\frac{d}{dt}\int \rho dV = -\int \rho \vec{v} d\vec{A}$$

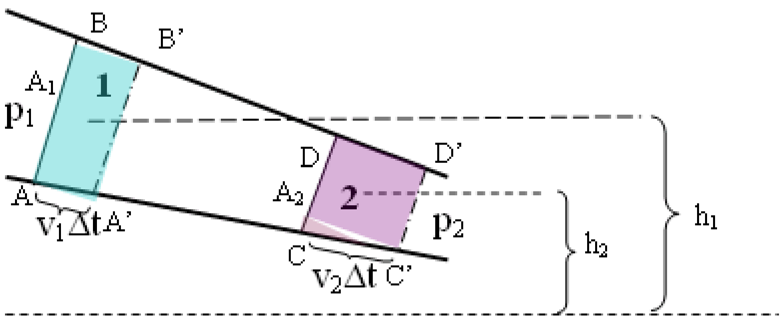
Stacionárius áramlás esetén a baloldal nulla. Összenyomhatatlan folyadékra a (konstans) sűrűséget kiemelhetjük az integrál elé, vagyis $0 = \int \vec{v} d\vec{A}$. Ennek speciális alakja a kontinuitási egyenlet (1).

Bernoulli egyenlet



Johann Bernoulli (1667-1748) svájci matematikus. **[ii]**

Próbáljuk meghatározni, hogyan függ a nyomás a sebességtől. Tegyük fel, hogy egy vékony csőben súrlódásmentes és összenyomhatatlan folyadék **stacionáriusan** áramlik homogén gravitációs mezőben. Tekintsük ebben a csőben a folyadéknak azt a részét, amelyet az *1.* és *2.* helyeken a A_1, ill. A_2 keresztmetszetű AB és CD felületek határolnak. A sebesség és a nyomás az *1.* és *2.* helyeken legyen v_1, p_1, ill. v_2, p_2. Alkalmazni fogjuk az ABCD folyadékoszlop kicsiny elmozdulására a **munkatételt** (energia-megmaradás!), amely szerint a kinetikus energia megváltozása egyenlő a rendszerre ható összes erők munkájával.



Az ABCD folyadékoszlop az igen kicsiny Δt idő alatt az $A'B'C'D'$ helyzetbe jut: az *1.* helyről a folyadékoszlop $AA'B'B = V = A_1 v_1 \Delta t$ térfogatú része (halványkékkel ábrázolva) eltávozik, a *2.* helyen pedig az összenyomhatatlanság (konkrétan a kontinuitási egyenlet) miatt ugyanekkora ($CC'D'D = V = A_2 v_2 \Delta t$) térfogatú (lilával ábrázolt) folyadék megjelenik. Emiatt, és amiatt, hogy az $A'B'CD$ térben az áramlás stacionárius voltából kifolyólag semmi sem változott, a munkatétel alkalmazásánál úgy járhatunk el, mintha a kicsiny $m = \rho V$ tömegű folyadék egyszerűen az *1.* helyről a *2.*-re jutott volna.

Ennél az elmozdulásnál az összes munka – súrlódás hiányában – a nehézségi erő és a nyomóerők munkájából tevődik össze. A nehézségi erő munkája, lényegében a **potenciális energia** megváltozása, $mg(h_1 - h_2)$, a nyomóerők munkája pedig a A_1 és A_2 keresztmetszetnek $AA' = v_1 \Delta t$ -vel, ill. $CC' = v_2 \Delta t$ -vel való eltolásánál: $p_1 A_1 v_1 \Delta t = p_1 V$, ill. $-p_2 A_2 v_2 \Delta t = -p_2 V$. A **munkatétel** szerint tehát

$$\frac{1}{2}\rho V\left(v_2^2 - v_1^2\right) = \rho V g\left(h_1 - h_2\right) + \left(p_1 - p_2\right)V$$

Ebből V-vel való egyszerűsítés után adódik a Bernoulli-egyenlet**:**

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2$$

azaz súrlódásmentes és összenyomhatatlan folyadék stacionárius áramlására

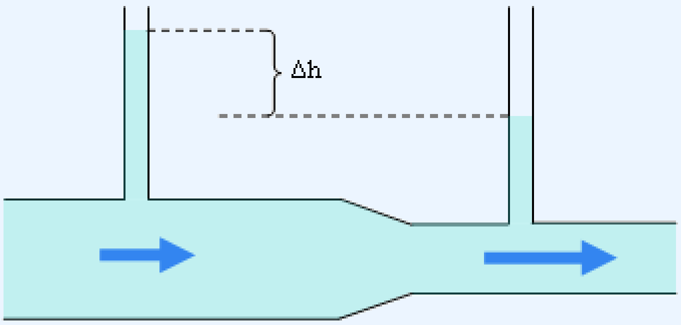
$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g h = áll\ .$$

Ez az egyenlet az energia megmaradását fejezi ki. Emellett álló folyadék (v=0) esetén visszaadja a **hidrosztatikai nyomás** képletét.

PÉLDA

PÉLDA

Tekintsük az ábrán látható elrendezést. Az igen hosszú vízszintes cső keresztmetszete az első szakaszon A_1, a másodikon $A_2 = A_1/2$, benne stacionáriusan áramlik a víz. A vékony függőleges üvegcsövekben a víz nem áramlik, a hajszálcsövességtől eltekintünk. Mekkora a függőleges csövekben a vízszintek különbsége?



A függőleges csövek itt lényegében a nyomást mérik. Abban a pontban, ahol becsatlakoznak a vízszintes csőbe, a vízszintes csőben uralkodó nyomás egyensúlyt tart a függőleges csőben lévő folyadékoszlop súlyával. A kontinuitási egyenlet miatt a kis keresztmetszethez arányosan nagyobb, azaz kétszer akkora sebesség tartozik. Ha a Bernoulli-egyenletet felírjuk, a nyomást kifejező ρgh tag mindkét oldalon ugyanakkora. Egyszerűsítés után:

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

Átrendezve kapjuk a két függőleges szárban a nyomáskülönbséget:

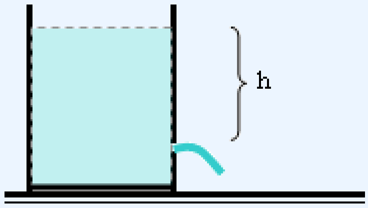
$$\Delta p = p_1 - p_2 = \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2) = \frac{3}{2}\rho v_1^2$$

Ebből a hidrosztatikai nyomás képletét használva adódik a magasságkülönbség:

$$\Delta h = \frac{\Delta p}{\rho g} = \frac{3}{2g} v_1^2$$

Alkalmazás

Folyadékok kiáramlása kis nyíláson (legyen a kiáramló folyadék sebessége v_2, a vízszint süllyedésének sebessége pedig v_1), lásd az ábrán.



Az edény alapterülete (A_1) sokkal nagyobb, mint a nyílás keresztmetszete (A_2), és mivel a **kontinuitási egyenlet** miatt , a v_1 sokkal kisebb, mint a v_2, így előbbi négyzetét elhanyagoljuk. A felszínen és a nyílásnál is, ahol a folyadék érintkezik a külső levegővel, a nyomás egyenlő a külső légnyomással, $p_1=p_2$, ezzel egyszerűsítünk.

A **potenciális energia** nulla szintjét a nyílás magasságától mérjük (vagyis $h_2=0$, $h_1=h$), ezzel a Bernoulli egyenlet a $\rho g h = \rho v_2/2$ -re egyszerűsödik, ebből azt kapjuk, hogy a kiáramló folyadék sebessége, tehát ugyanakkora, mintha a folyadék h magasságból szabadon esett volna. (Ezt 1646-ban vette észre ***Torricelli***.)

4. Ellenőrző kérdések

FOLYADÉKOK ÉS GÁZOK MECHANIKÁJA

Többször megoldható feladat, **elvégzése kötelező**.
A feladat végső eredményének a mindenkori **legutolsó megoldás** számít.

Válassza ki a helyes megoldást!

Egy vízzel teli 40 cm mély akvárium fenekén három fémgolyó van. A sugaraik rendre R_1 = 2 cm, R_2 = 3 cm, R_3 = 6 cm, a sűrűségük ρ_1 = 9 g/cm^3, ρ_2 = 1200 kg/m^3, ρ_3 = 3 kg/dm^3. Rakjuk nagyság szerinti sorrendbe a golyókra ható felhajtóerőket!

- ○ $F_3<F_2<F_1$
- ○ $F_1<F_3<F_2$
- ○ $F_1<F_2<F_3$
- ○ $F_1>F_2>F_3$
- ○ $F_1= F_3<F_2$
- ○ $F_3<F_1<F_2$

BIBLIOGRÁFIA:

[i] Fotó: Markus Gayda (Creative Commons)

[ii] Forrás: public domain