Kinematika

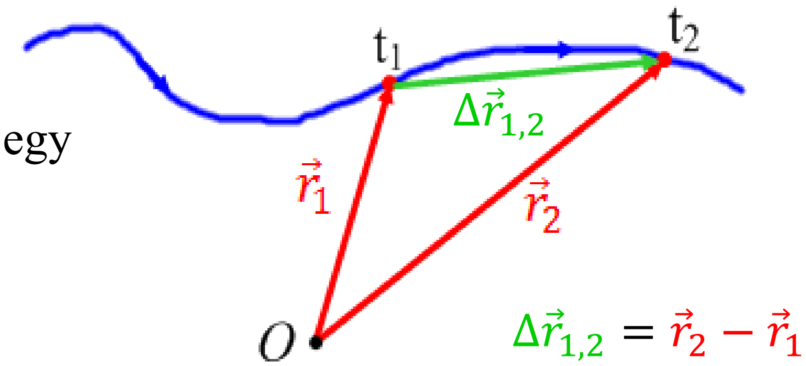
A mozgás matematikai leírása, a mozgást kiváltó ok feltárása nélkül.

Helyvektor és elmozdulás

Egy test helyzetét és helyzetváltozását csak más testekhez viszonyítva írhatjuk le. Ezért először választani kell egy vonatkoztatási rendszert:

Egy test (pontszerű) helyzetét a t időpillanatban egy $\vec{r}(t)$ **helyvektorral** jellemezzük, ami a vonatkoztatási rendszer origójából a testhez mutat.

A test mozgása során a térben kijelöli a **pályagörbét**.



Az **elmozdulás** a helyvektor megváltozása egy eltelt Δt idő alatt (itt $\Delta t = t_2 - t_1$).

$$\Delta\vec{r}_{1,2} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)$$

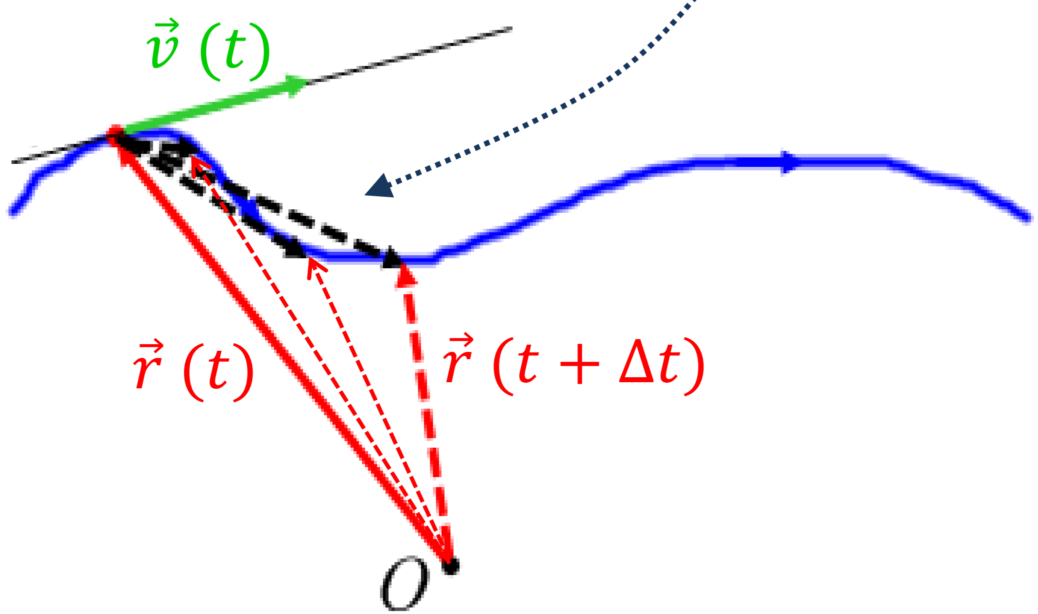
Sebesség

A **sebesség** azt jellemzi milyen gyorsan változik a helyvektor.
FONTOS: a sebesség vektormennyiség, iránya és nagysága is számít!

Ha a sebesség iránya és/vagy nagysága változik (általában igen), akkor pontos értéket csak kis Δt időre kaphatunk. Teljesen pontos, ha $\Delta t \to 0$.

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Elmozdulás-vektorok egyre kisebb Δt esetében



Gyorsulás

A **gyorsulás** a sebességvektor változási gyorsasága:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

FONTOS: gyorsulás akkor is van ha csak a sebesség iránya változik. Pl. kanyarodás

Ha a gyorsulás, mint az idő függvénye, valamint a kezdeti hely $\vec{r}_0$ és a kezdeti sebesség $\vec{v}_0$ ismert, akkor a mozgás pályája meghatározható:

Első lépés a sebesség idő függvény meghatározása:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad \to \quad \vec{a}\,dt = d\vec{v}$$

Bármely t_1 időpontban a sebesség: $\vec{v}(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \vec{a}(t)\,dt + \vec{v}(t_0)$

A végén a t_1 paraméter helyett simán t-t írunk, és megvan a $\vec{v}(t)$

A sebességfüggvény ismeretében a helyvektor bármely t_1 időpontban hasonlóképpen meghatározható:

$$\vec{r}(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \vec{v}(t)\,dt + \vec{r}(t_0)$$

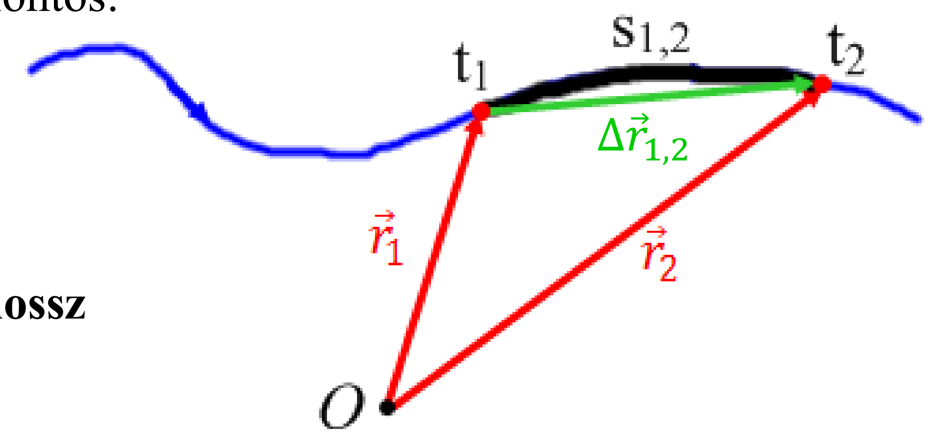
A végén a t_1 paraméter helyett simán t-t írunk, és megvan az $\vec{r}(t)$ függvényünk.

Úthossz és átlagsebesség

Egy adott idő alatt megtett **úthossz** a közben befutott pályagörbe hosszát jelenti.
Ez már csak egy skalár mennyiség.

Számításánál csak a sebesség nagysága fontos:

$$s_{1,2} = \int_{t_1}^{t_2} |\vec{v}(t)|\, dt$$



Az ábra szemlélteti a különbséget az **úthossz**
és az **elmozdulás(vektor)** között!

Az **átlagsebesség** (skalár) az a sebességnagyság
amivel egyenletesen haladva ugyanazt a hosszúságú
utat tenné meg a test ugyanakkora idő alatt:

Nem vektor jel,
csak egy vonás!

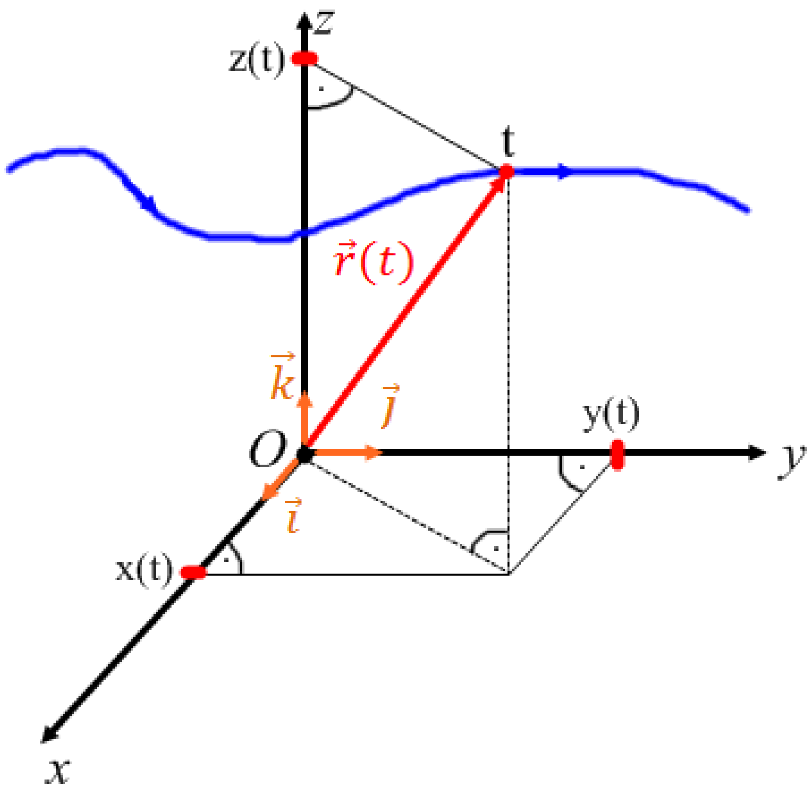
$$\bar{v} = \frac{s_{1,2}}{t_2 - t_1}$$

Derékszögű Descartes koordináta rendszer

Segítségével a pálya egyenlete:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{\imath} + y(t)\vec{\jmath} + z(t)\vec{k}$$

Az *x(t), y(t), z(t)* függvények a **koordináták**.



Az $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$ egységvektorok a **bázisvektorok**.

Pitagorasz tételével: $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

A sebesség:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{\imath} + \frac{dy}{dt}\vec{\jmath} + \frac{dz}{dt}\vec{k} = \dot{x}\vec{\imath} + \dot{y}\vec{\jmath} + \dot{z}\vec{k}$$

A sebesség nagysága: $v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$

A gyorsulás és nagysága:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{\imath} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{\jmath} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k} = \ddot{x}\vec{\imath} + \ddot{y}\vec{\jmath} + \ddot{z}\vec{k}$$

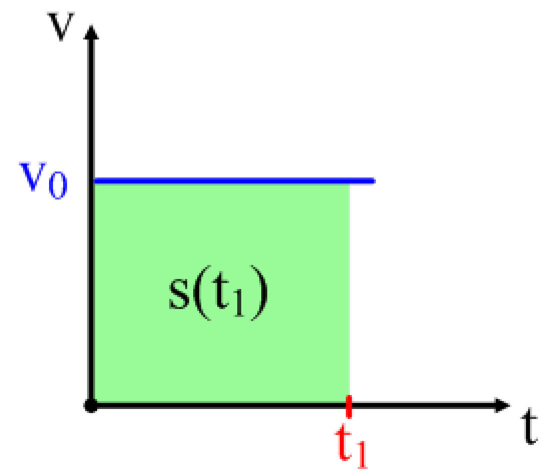
$$a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}$$

Példa: Egyenes vonalú egyenletes mozgás*

A mozgás 1 dimenziós, ezért elég egy koordináta ha a mozgás irányába vesszük fel azt az egy tengelyt (pl. *x*).
Ebben az egyszerű esetben:

$$v_x = v \qquad \Delta x = s$$

$$s(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} |\vec{v}(t)|\, dt = \int_{t_0}^{t_1} v\, dt = v \int_{t_0}^{t_1} dt = v\Delta t$$

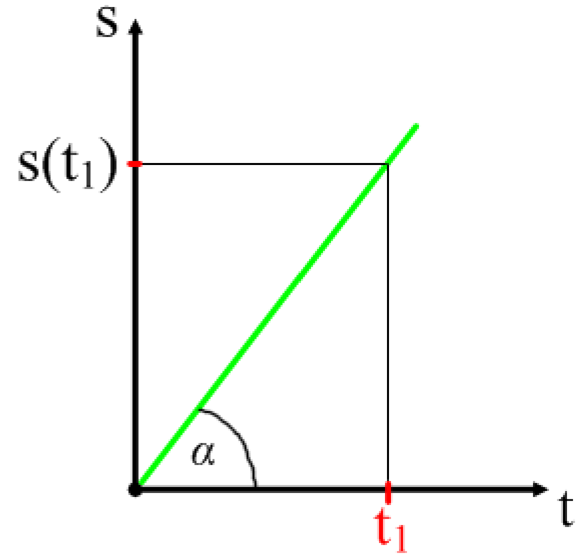


Tehát ha $t_0 = 0$, akkor visszakapjuk az $s = vt$ képletet.

A megtett út a sebesség-idő grafikon alatti terület.

Tehát az úthossz lineáris függvénye az időnek, a meredekség pedig a sebesség:

$$\tan\alpha = v = \frac{s}{t}$$



Feladat: 1

Példa: Egyenes vonalú egyenletesen változó mozgás*

Ha a kezdősebesség vektor és a gyorsulás vektor egy egyenesbe esik, akkor a test annak az egyenesnek a mentén fog mozogni (ismét elég egy koordináta, pl. *z*):

tehát a test a *z* tengely irányában halad állandó a_z gyorsulással, és időtől függő v_z sebességgel (ezek a komponensek lehetnek negatívok is!). A többi komponens (*x*, *y*) nulla.

A sebesség egy t_1 időpontban:

$$v_z(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} a_z(t)\,dt + v_z(t_0) = a_z(t_1 - t_0) + v_z(t_0)$$

legyen $t_0 = 0$

$$v_z(t_0) = v_{z0}$$

Ezekkel: $\boxed{v_z(t) = a_z t + v_{z0}}$

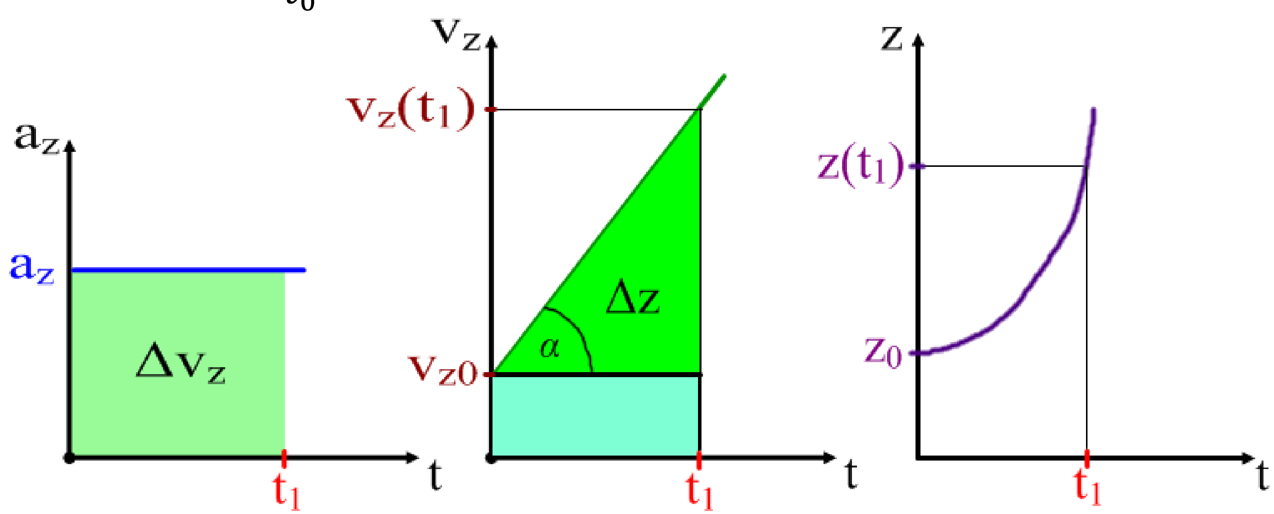
$(\Delta v_z = a_z \Delta t\,)$

A test helye: $z(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} v_z(t)\,dt + z(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} (a_z t + v_{z0})\,dt + z(t_0)$

legyen $z(t_0) = z_0$

Tehát ha $t_0 = 0$ továbbra is:

$$\boxed{z(t) = \frac{1}{2} a_z t^2 + v_{z0} t + z_0}$$

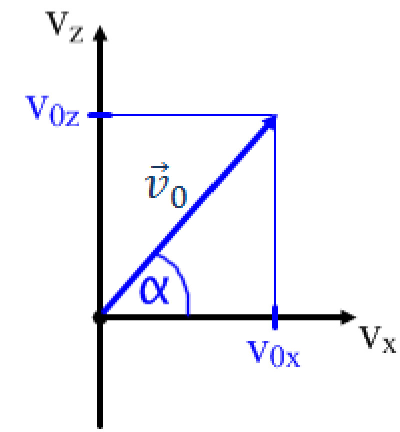


Feladat: 2

Példa: Ferde hajítás*

A gyorsulás állandó (g), de nem esik egybe a kezdősebesség vektor irányával:
A kezdeti sebesség felbontása (2D – x és z):

$$v_{0x} = v_0 \cos\alpha \qquad v_{0z} = v_0 \sin\alpha$$



A gyorsulás: $\vec{a} = -g\vec{k}$

A sebesség-idő függvény: $\vec{v}(t) = v_{0x}\vec{\imath} + 0\vec{\jmath} + (-gt + v_{0z})\vec{k}$

A helyvektor: $\vec{r}(t) = v_{0x}t\vec{\imath} + 0\vec{\jmath} + \left(-\frac{g}{2}t^2 + v_{0z}t\right)\vec{k}$

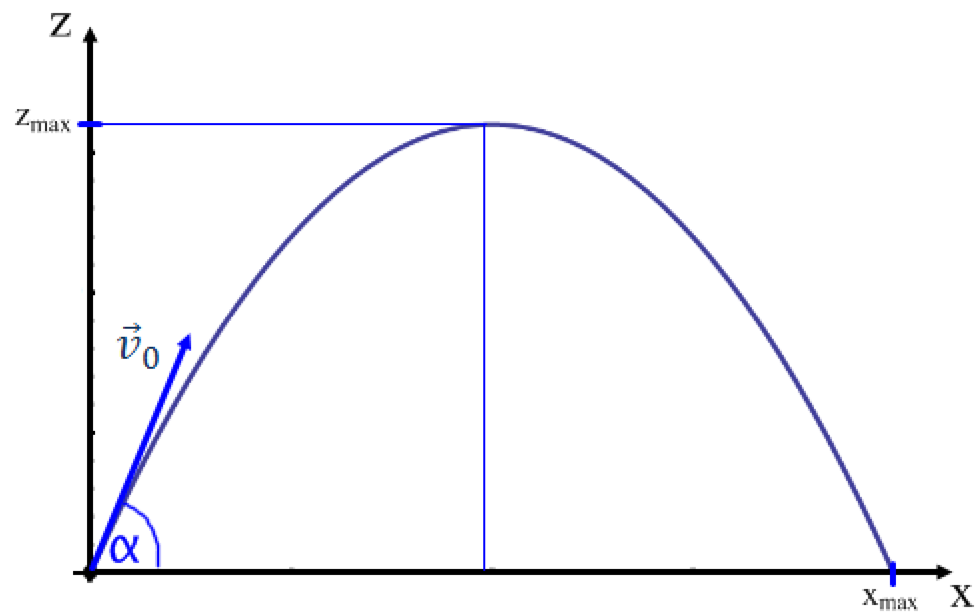
A test földet ér amikor *z* = 0:

$$-\frac{g}{2}t^2 + v_0 \sin\alpha\, t = 0$$

Megoldva az időre: $t = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}$

Behelyettesítve az *x* koordinátára megkapjuk a hajítás távolságát:

$$x_{max} = \frac{2{v^2}_0 \sin\alpha \cos\alpha}{g}$$

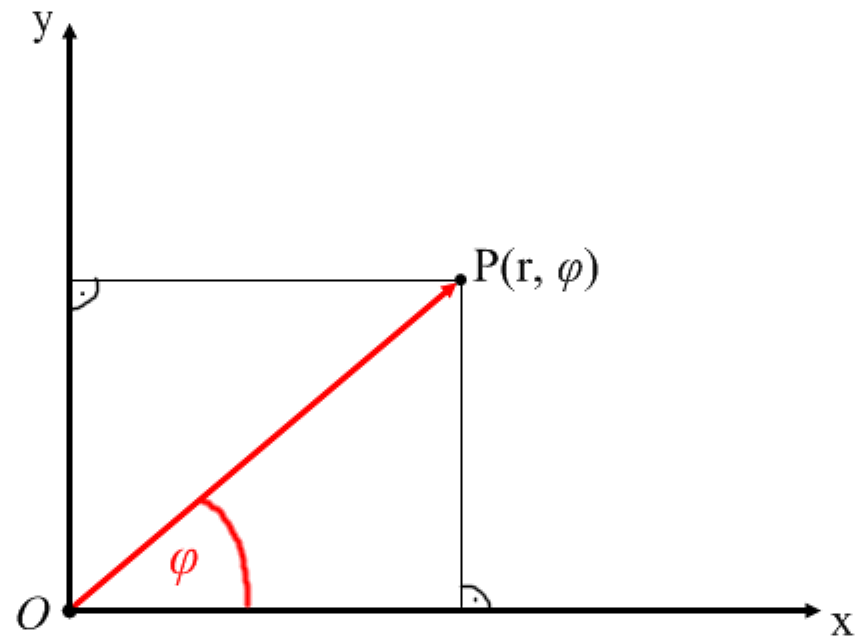


Síkbeli polár koordináta rendszer

A két koordináta: egy ponttól mért távolság és egy iránytól mért szög.
Körmozgás leírására jól használható, ha az origó a kör középpontjában van.

Pitagorasz tételével és a tangens definíciójából:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \tan\varphi = \frac{y}{x}$$



A koordinátákat a másik irányba kifejezve:

$$x = r\cos\varphi \qquad y = r\sin\varphi$$

A φ szög változási gyorsasága adja a **szögsebességet** (mértékegysége: 1/s):

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

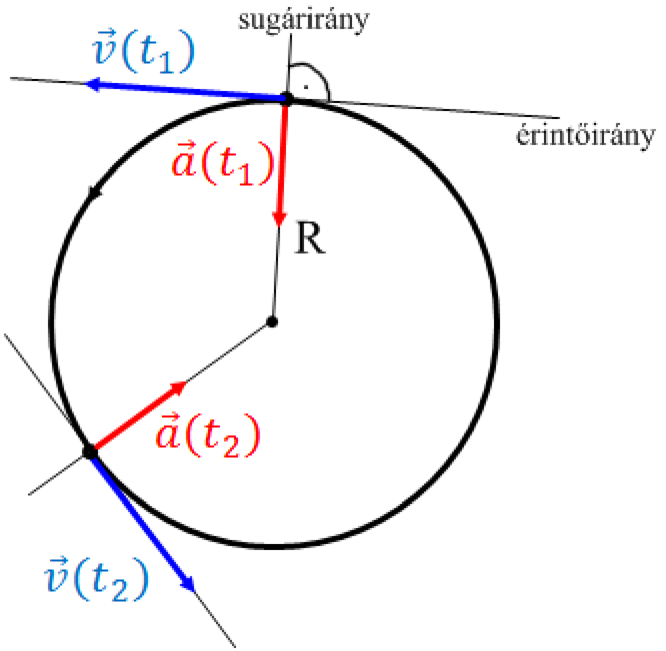
A szögsebesség változási gyorsasága pedig a **szöggyorsulás** (mértékegysége: $1/s^2$):

$$\beta = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

Példa: Egyenletes körmozgás*

A szögsebesség állandó: $\omega = \text{áll.} = \dfrac{2\pi}{T} \quad \beta = 0$
(ahol *T* a periódusidő)

A *T* idő alatt megtett út tehát a kör kerülete: $s(T) = 2R\pi$



A mozgás sebességének nagysága (kerületi sebesség) is állandó (az iránya viszont nem!):

$$v = \frac{s(T)}{T} = \frac{2\pi R}{T} = R\omega$$

Mivel a sebesség iránya folyamatosan változik, a gyorsulás nem nulla. Nagysága állandó, iránya pedig mindig a középpont felé mutat (centripetális):

$$a = a_{cp} = \frac{v^2}{R} = \frac{R^2\omega^2}{R} = R\omega^2$$

Példa: Egyenletesen változó körmozgás

A szöggyorsulás β = állandó, és emiatt a szögsebesség lineárisan változik:

$$\omega(t) = \beta t + \omega_0$$

Az állandó szöggyorsulás miatt a gyorsulásnak lesz egy állandó nagyságú érintőirányú (tangenciális) komponense. Emiatt a sebesség nagysága egyenletesen változik:

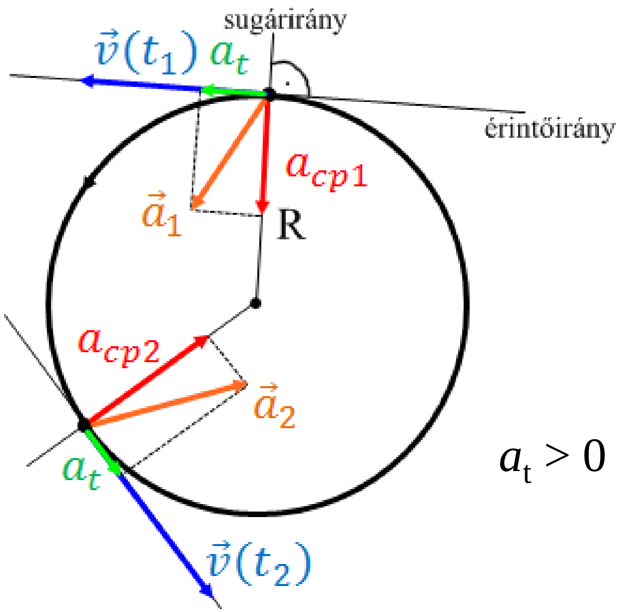
$$a_t = \beta R = \frac{dv}{dt}$$

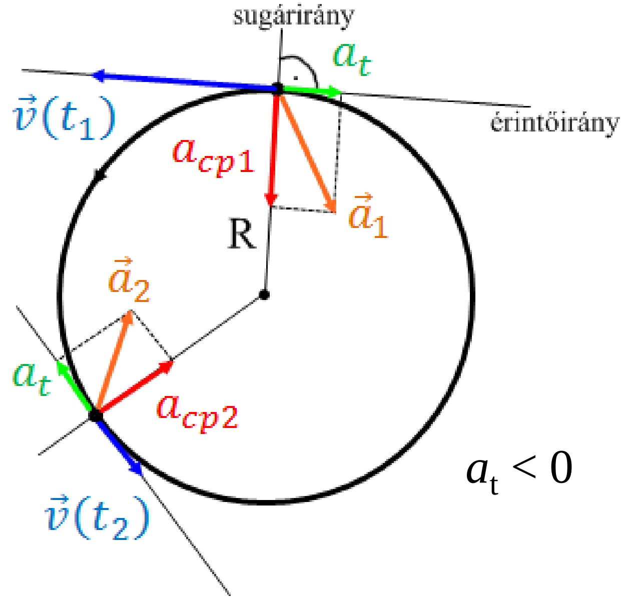
A gyorsulás nagysága Pitagorasz tételéből:

$$a = \sqrt{{a_{cp}}^2 + {a_t}^2}$$

A megtett út csak a tangenciális gyorsulás komponenstől függ (a másik komponens csak az irányt változtatja):

$$s(t) = \frac{1}{2} a_t t^2 + v_0 t$$





Feladat: 3

Henger koordináta rendszer*

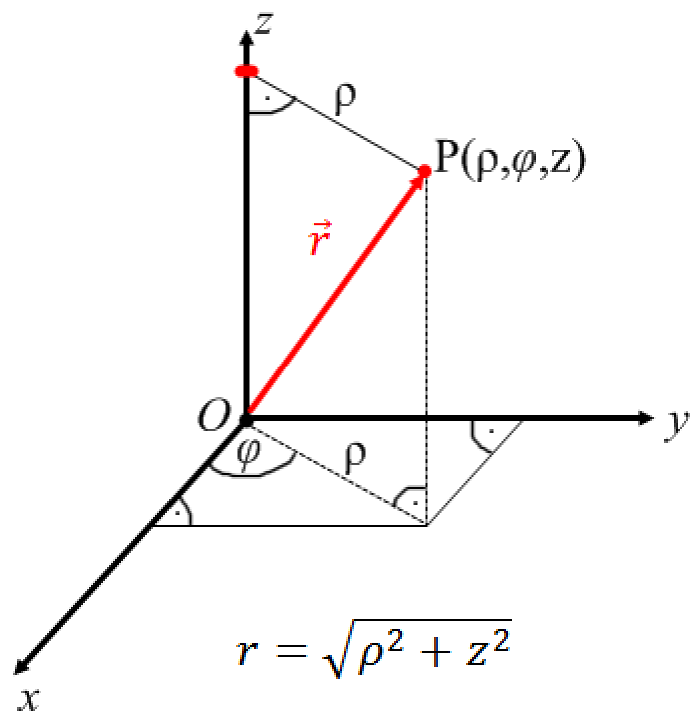
A síkbeli polár koordinátarendszer két koordinátájához hozzávesszük a Descartes koordinátarendszer *z* koordinátáját.

Három dimenziós mozgások leírására használható, főleg csavar alakzat menti mozgásra.

Megkülönböztetésül a síkbeli polár koordinátarendszertől *r* helyett ρ adja meg a tengelytől mért távolságot (ez még nem a pont origótól vett távolsága, azt jelöljük *r*-el).

$$x = \rho \cos\varphi \qquad y = \rho \sin\varphi \qquad z = z$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \tan\varphi = \frac{y}{x}$$



$$r = \sqrt{\rho^2 + z^2}$$

Dinamika

A dinamika feladata a test(ek) gyorsulását okozó erők matematikai leírása.

Az erők kölcsönhatások során lépnek fel.
Ezek a kölcsönhatások lehetnek:
- test és test között
- mező(erőtér) és test között

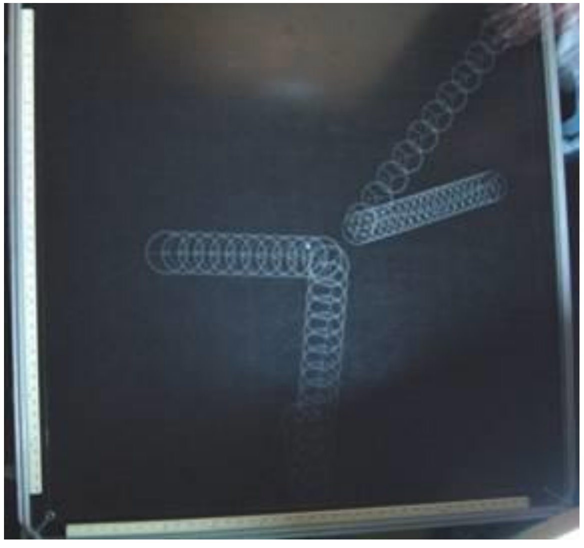
A magára hagyott test egy olyan test, amely nem áll kölcsönhatásban sem más testtel, sem pedig mezővel.

Newton törvényei: I.

<u>Newton I. törvénye</u>: Minden nyugalomban lévő test megtartja nyugalmi állapotát, minden mozgó test pedig egyenes vonalú egyenletes mozgását mindaddig, amíg egy másik test vagy mező annak megváltoztatására nem kényszeríti.

ugyanez kicsit pontosabban megfogalmazva:

<u>Kiválasztási axióma</u>: Létezik olyan vonatkoztatási rendszer amelyben a magára hagyott testek megtartják eredeti mozgásállapotukat (azaz a sebesség vektor állandó). Az ilyen rendszereket **inerciarendszereknek** nevezzük.



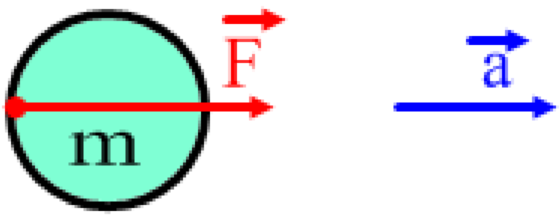
A légpárnás asztalon mozgó korong jó közelítéssel egy magára hagyott testnek számít.
Mozgása az asztalhoz (Föld felszínéhez) képest jó közelítéssel egyenes vonalú egyenletes, tehát a Föld felszínéhez rögzített rendszer jó közelítéssel (mindennapi élet történéseire) inerciarendszer.

Newton törvényei: II.

Ha egy pontszerű testre erő hat az megváltoztatja annak mozgásállapotát (a sebesség vektort). Ekkor a test gyorsul (a gyorsulás vektor nem nulla).

<u>Newton II. törvénye</u>: Egy állandó tömegű pontszerű test gyorsulása arányos a testre ható erővel és ellentétesen arányos a test tömegével. A gyorsulás a testre ható erő irányába mutat.

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

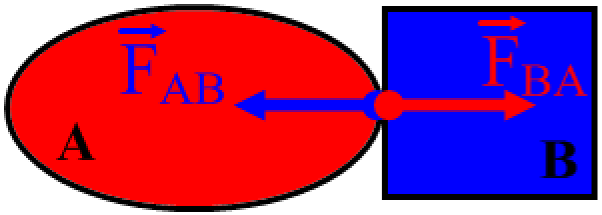


Newton törvényei: III.

Newton III. törvénye: (Hatás-ellenhatás törvénye)
Ha az *A* test a *B* testre $\vec{F}_{BA}$ erőt fejt ki, akkor a *B* test is erőt fejt ki az *A* testre.

Ez az $\vec{F}_{AB}$ erő azonos nagyságú, de ellentétes irányú az $\vec{F}_{BA}$ erővel.

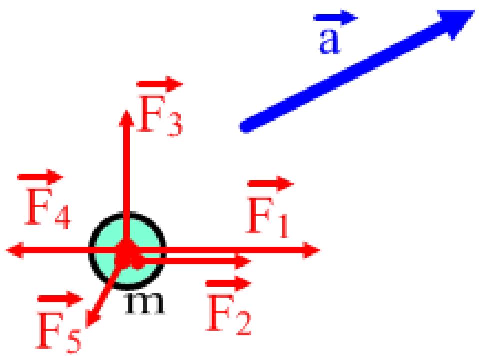
$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$$

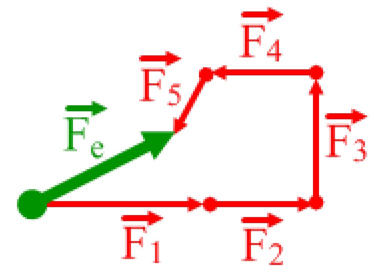


Newton törvényei: IV.

Newton IV. törvénye: (A szuperpozíció elve)
Ha egy tömegpont egyidejűleg több erőhatásnak is ki van téve, akkor azok együttes hatása egy eredő erővel helyettesíthető. Az eredő erő a testre ható összes erő vektori összege:

$$\vec{F}_e = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \qquad \vec{a} = \frac{\vec{F}_e}{m}$$



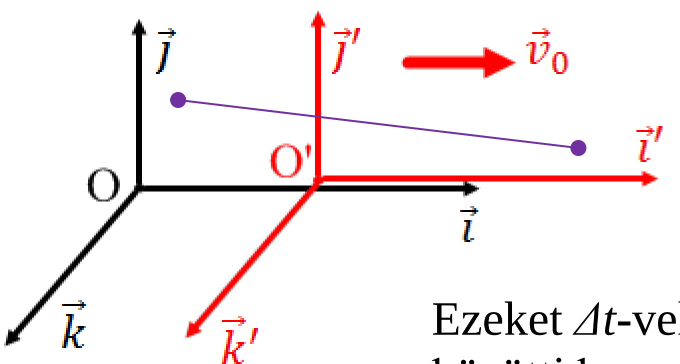


$$\vec{F}_e = \sum_{i=1}^{5} \vec{F}_i$$

A Galilei-féle relativitási elv

Bármely két egymáshoz képest **állandó** sebességgel mozgó vonatkoztatási rendszerben a **mechanikai jelenségek** ugyanúgy mennek végbe.
<u>*Pl.*</u> a rázkódástól eltekintve nem érezzük, hogy mozog-e a vonat, ha állandó sebességgel halad. A leejtett pénzérme ugyanúgy függőlegesen egyenletesen gyorsulva esik.
Az ilyen vonatkoztatási rendszerek közül tehát egyik sincs kitüntetve, nincsen egy abszolút nyugvó vonatkoztatási rendszer.

<u>Egymáshoz képest mozgó rendszerek közötti kapcsolat:</u>
Mozogjon a *K'* rendszer a *K*-hoz képest a pozitív *x* irányba **állandó** v_0 sebességgel.



Egy Δt idő alatt az origók közötti távolság: $\overline{OO'} = v_0 \Delta t$
Tehát a mért koordinátakülönbségek *K'*-ben:

$$\Delta x' = \Delta x - v_0 \Delta t$$
$$\Delta y' = \Delta y$$
$$\Delta z' = \Delta z$$

Továbbá: $\Delta t' = \Delta t$ (órák szinkronban)

Ezeket Δt-vel (ill. Δt') osztva megkapjuk a sebességek közötti kapcsolatot (lila vonal egy mozgó test pályadarabja):

$$v_x' = v_x - v_0$$
$$v_y' = v_y$$
$$v_z' = v_z$$

Ezt vektori formában írva kapunk egy általános érvényű kifejezést:

$$\boxed{\vec{v}' = \vec{v} - \vec{v}_0}$$

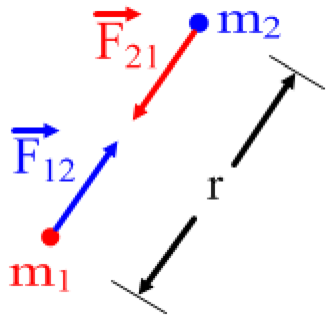
Erőtörvények

Olyan függvények melyek matematikai alakban megadják a testre ható erőket.
Ezeknek a függvényeknek a változói lehetnek:
-a test helye
- a test sebessége
- az idő

Newton-féle gravitációs erő*

Két tömegpont közötti erő arányos a két tömeg szorzatával és fordítottan arányos a távolságuk négyzetével.

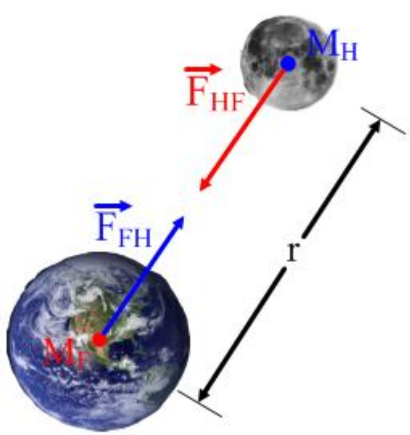
$$F = \frac{\gamma m_1 m_2}{r^2}$$



A kölcsönhatás mindig vonzó.

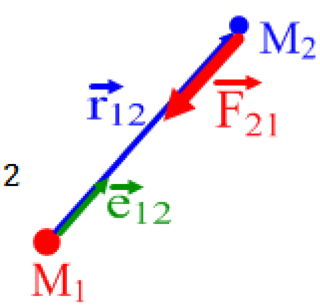
Az arányossági tényező az univerzális gravitációs állandó: $\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{kg}^2}$

Az erőtörvény egyszerű alakja kiterjedt testekre is érvényes, amennyiben gömbszimmetrikusok.
A távolság a középpontok között mérendő.



A vektori alak megadja az erő irányát is:

$$\vec{F}_{21} = -\frac{\gamma M_1 M_2}{r^2{}_{12}} \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}} = -\frac{\gamma M_1 M_2}{r^2} \vec{e}_{12}$$



Súlyerő*

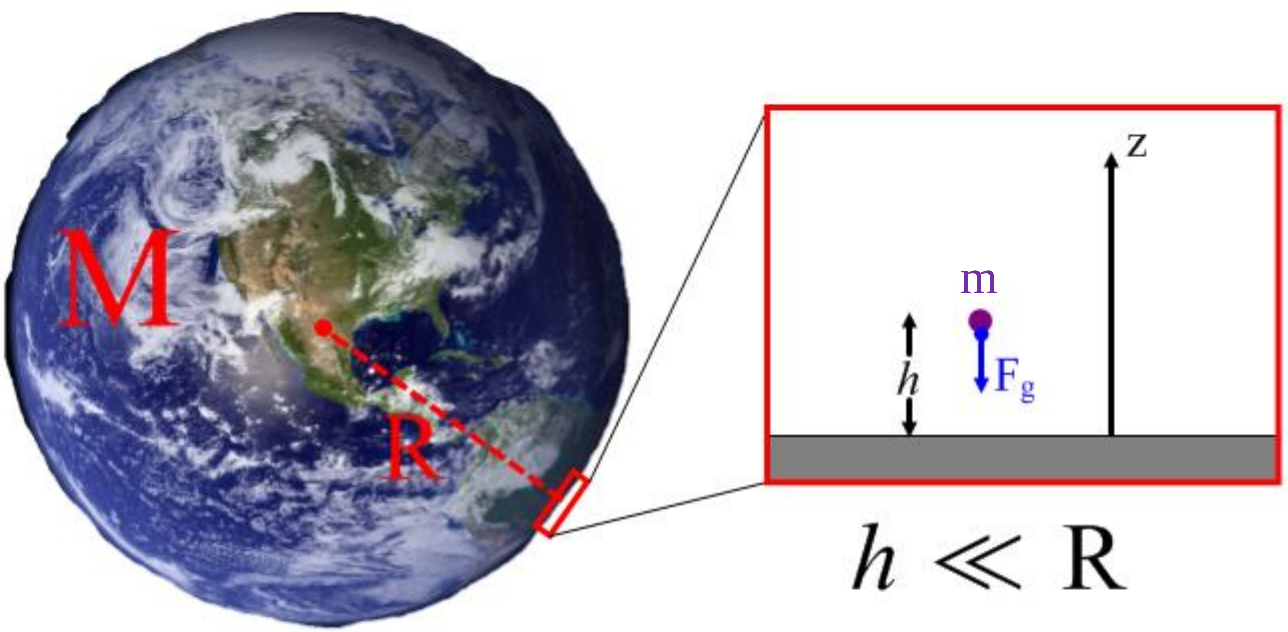
Amikor a test elmozdulása elhanyagolható méretű a bolygó (vagy hold stb.) sugarához képest, akkor a gravitációs erő homogénnek (helytől független) vehető.

Pl. a Földünk felszínének közelében végbemenő mozgásokra az általános Newton-féle erőtörvényből kapjuk:

$$\vec{F}_g = -\frac{\gamma M m}{r^2}\vec{e}_r = -\frac{\gamma M m}{(R+h)^2}\vec{e}_r \approx -\frac{\gamma M m}{R^2}\vec{e}_r = -mg\vec{k}$$

$$g = \frac{\gamma M}{R^2} = 9{,}8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

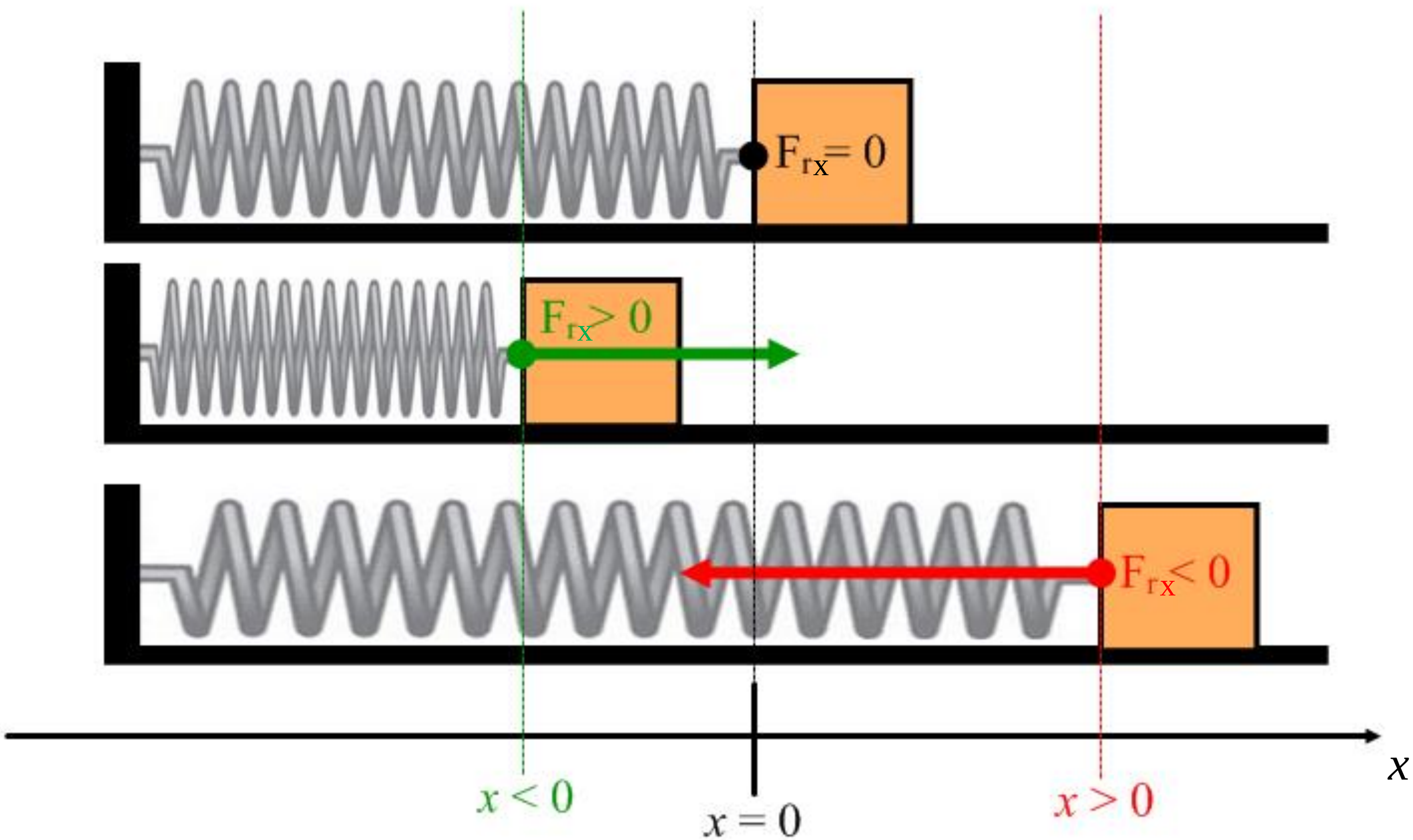
gravitációs gyorsulás
a Föld felszínén



Rugóerő*

<u>Hooke-törvény</u>: Az erő az egyensúlyi helyzettől mért deformáció méretével arányos és azzal ellentétes irányú.
Az arányossági tényező a rugóállandó *D*.

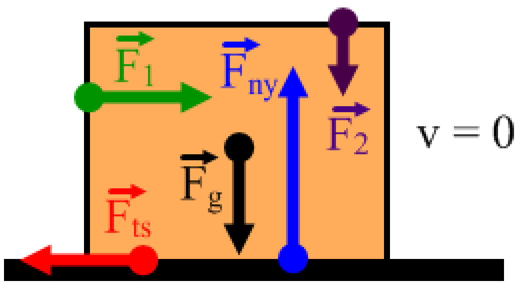
$$F_{rx} = -Dx$$



Súrlódási erő*

<u>Három fajta lehet</u>:

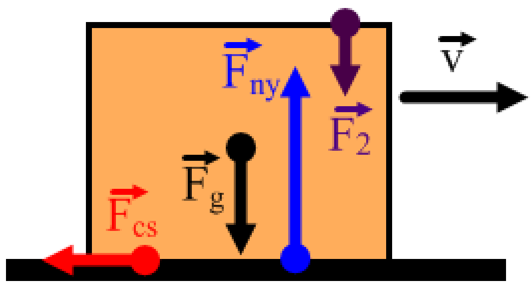
1. **tapadási**: A két felület egymáshoz képesti mozdulatlanságát igyekszik megőrizni. Értéke **bármekkora** lehet egy bizonyos **maximális** értékig (míg meg nem csúszik).



$$F_{ts} = F_1$$
amíg
$$F_1 \leq F_{ts,max}$$
$$F_{ts,max} = \mu_t F_{ny}$$

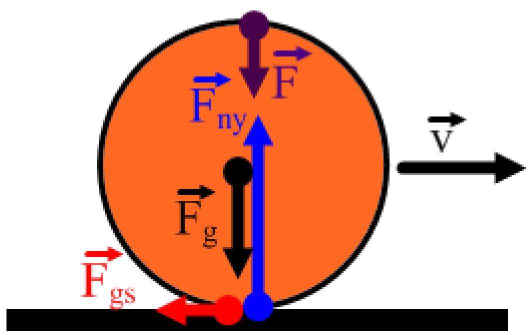
$\mu_t > \mu_{cs}$ mindig

2. **csúszási**: Két egymáson csúszó felület között fellépő erő, mely a mozgást igyekszik gátolni. Csak az anyagi minőségtől (μ) és a felületeket összenyomó erőtől függ.



$$F_{cs} = \mu_{cs} F_{ny}$$

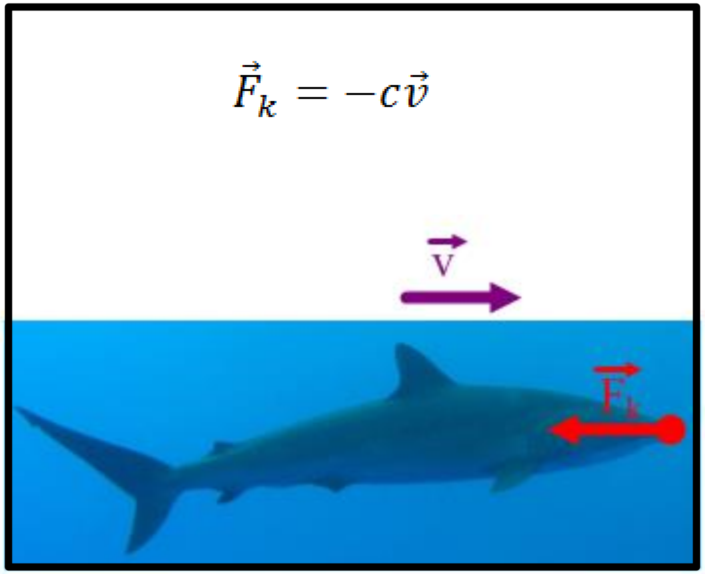
3. **gördülési**: Felületen guruló testre hat a mozgással ellenkező irányban.
(pl. emiatt áll meg a guruló billiárd vagy teke golyó)

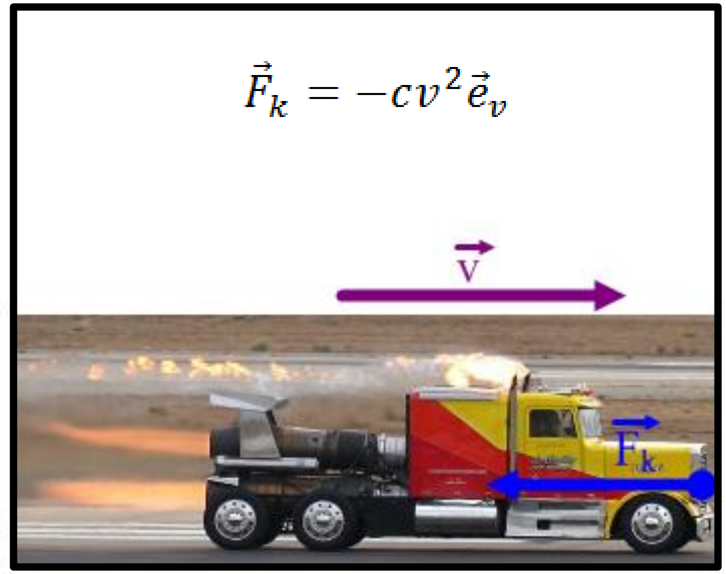


$$F_{gs} = \mu_g F_{ny}$$

Közegellenállás vagy légellenállás*

Arányos a test sebességével, ill. a sebesség négyzetével, és azzal ellentétes irányú.

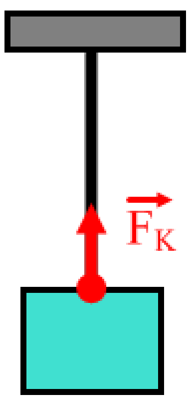




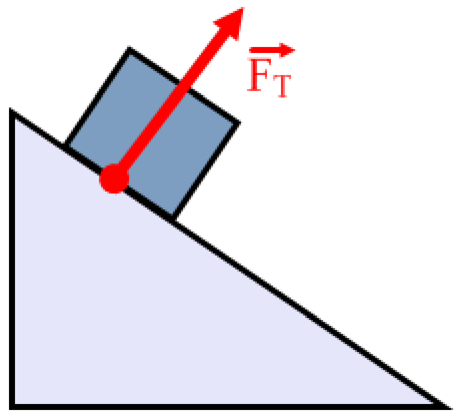
Az arányossági tényező *c* függ:
- a test mozgásra merőleges felületének nagyságától
- a test alakjától (mennyire áramvonalas)
- a közeg sűrűségétől

Kényszererők*

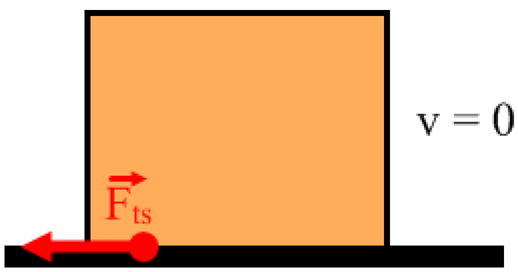
Ezek nagysága éppen akkora, hogy a **kényszerfeltétel** teljesüljön:
pl. kötélerő, tartóerő, tapadási súrlódás (a megcsúszás határáig)



kötél nem nyúlik



nem mehet bele a lejtőbe



ne csússzon meg

A dinamika alapegyenlete

Ha összegezzük Newton I., II., és IV. törvényét, akkor megkapjuk a **dinamika alapegyenletét**:

$$\vec{F}_e = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = m\vec{a}$$

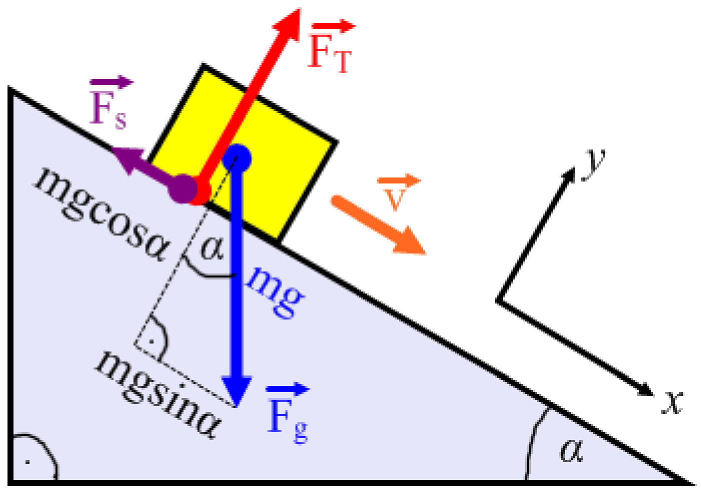
Ezeket koordinátánként kiírva, illetve az erőkre beírva a megfelelő erőtörvényeket, megkapjuk a **mozgásegyenleteket**. Pl. derékszögű Descartes koordinátarendszerben:

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_{ex}(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \\ m\ddot{y} &= F_{ey}(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \\ m\ddot{z} &= F_{ez}(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \end{aligned}\right\} \quad \text{másodrendű, csatolt differenciálegyenletek}$$

Az erők nem függhetnek a gyorsulástól, mert az ellentmondana a szuperpozíció elvének.
A megoldáshoz meg kell még adni 6 integrálási állandót. Ezek általában a **kezdeti hely** 3 koordinátája és a **kezdeti sebesség** 3 koordinátája: $\vec{r}_0$ és $\vec{v}_0$
Az egyenleteket megoldva megkapjuk a **mozgástörvényt**, mely megmondja, hogy a test hol tartózkodik egy bizonyos időben (a pálya egyenlete): $\vec{r}(t) = \begin{cases} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{cases}$

Példa: Lejtőn mozgó test

Alkalmazva a dinamika alapegyenletét: $m\vec{a} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \vec{F}_g + \vec{F}_T + \vec{F}_s$



Célszerű párhuzamos és merőleges komponenseket vizsgálni, mert tudjuk, hogy az *y* irányú eredő erőnek zérusnak kell lennie:

$$(x) \quad m\ddot{x} = ma_x = mgsin\alpha - F_s$$
$$(y) \quad m\ddot{y} = ma_y = 0 = F_T - mgcos\alpha$$

Mivel a tartóerő egyben a nyomóerő is:

$$F_s = \mu mgcos\alpha$$

Beírva az *(x)* egyenletbe a súrlódást:

$$ma_x = mgsin\alpha - \mu mgcos\alpha$$
$$a_x = g(sin\alpha - \mu cos\alpha)$$

Ha $a_x < 0$ jön ki megoldásnak:
- a lefelé csúszó test lassul

Lejtőre helyezett test egyensúlyának feltétele:
- a nulla eredő erőhöz szükséges tapadási súrlódási erőnek kisebbnek kell lennie, mint a lehetséges maximális érték ($\mu_t F_T$)

Lendület

Lendület (impulzus): A test tömegének és sebességének szorzata.
vektormennyiség: iránya a sebesség vektor iránya.

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

Lendülettétel: Az lendület erő hatására változik meg.
Az eredő erő határozza meg a változási gyorsaságát:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \vec{F}_e$$

Bizonyítás állandó tömeg esetén:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} = \vec{F}_e$$

Tehát ha az eredő erő zérus (magára hagyott test), akkor a lendület állandó.

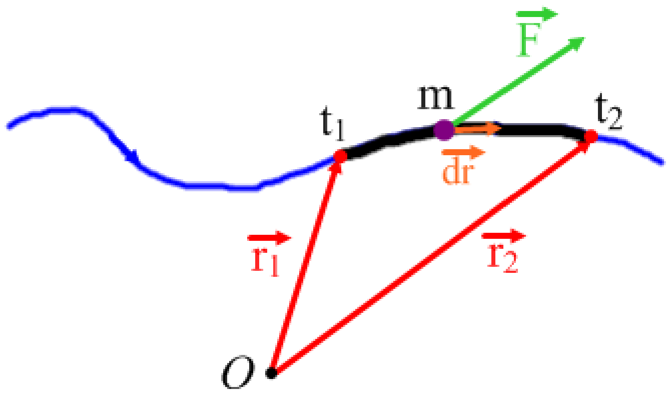
Az okozott lendületváltozás t_1 és t_2 között az eredő erő által:

$$\Delta\vec{p} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_e \, dt$$

tömegtől független

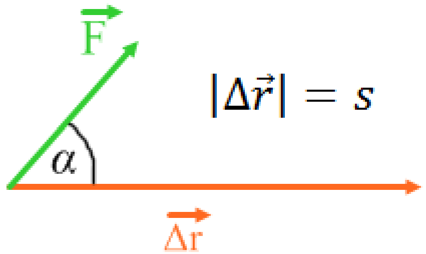
Munka

Munka: Az erő vonal menti (görbe menti) integrálja a test pályája mentén két pont között.



$$W_{1,2} = \int_{\vec{r}_1 \atop (g)}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Speciális eset: A mozgás pályája egyenes, az erő pedig mindenütt ugyanaz a vektor.



$$|\Delta\vec{r}| = s$$

$$W = \int_g \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_g F \cos\alpha \, dr = F \cos\alpha \int_g dr = Fs \cos\alpha$$

Ha az erő végig a mozgás irányába mutat (α = 0): $W = Fs$

Kinetikus (mozgási) energia

Ha egy nyugalomból induló tömegpontra állandó erő hat:

- a pont gyorsulása állandó: $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$ (a mozgás pályája egyenes vonalú) $\rightarrow a_x \rightarrow a$

- t idő múlva sebessége: $v = at$, a megtett út pedig: $s = x = \frac{a}{2}t^2$

Tehát a testen végzett munka: $W = Fs = ma\frac{a}{2}t^2 = \frac{1}{2}m(at)^2 = \frac{1}{2}mv^2$

Ez a test **kinetikus energiája**: $E_K = \frac{1}{2}mv^2$ (a munkavégzés során átadott energia)

Mértékegység mindkettő esetében: J (Joule)

Negatív munka esetén a kinetikus energia csökken, a test lassul.

<u>Munkatétel:</u> A kinetikus energia megváltozása egyenlő az eredő erő által a testen végzett munkával.

$$W = \Delta E_K$$

Teljesítmény - Feladat: 4, 5

Teljesítmény: Az energiaközlés üteme (egységnyi idő alatt közölt energia).

$$P = \frac{dE}{dt}$$

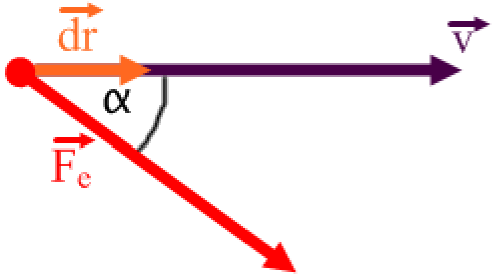
(lehet közölt hőenergia, elektromos energia, mechanikában a munkavégzés során közölt energia)

A mechanikai **teljesítménytétel**: A tömegpontra ható erők teljesítménye egyenlő a test kinetikus energiájának változási gyorsaságával:

$$P = \frac{dE_K}{dt}$$

Az elemi munka: $\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{r} = dE_k$

A munkatétel felhasználásával: $P = \frac{dE_K}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$

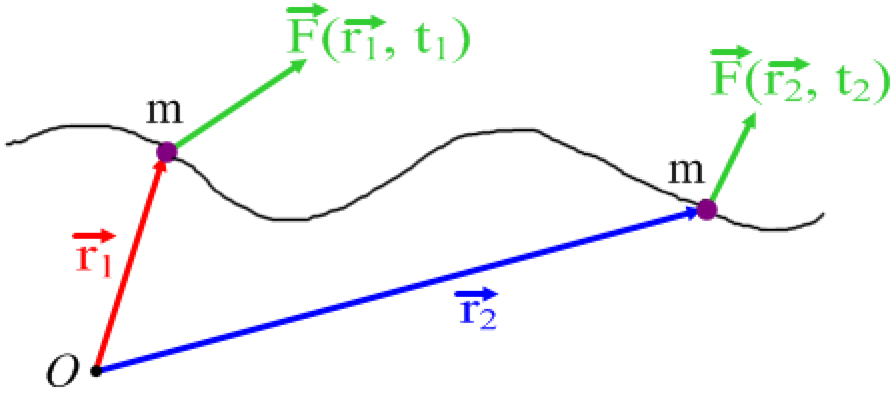


Végrehajtva egy változótranszformációt:

$$W_{1,2} = \int_{\vec{r}_1,g}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot \vec{v} dt = \int_{t_1}^{t_2} P\, dt$$

Fizikai mező (erőtér)

Fizikai mező: Fizikai mezőről akkor beszélünk, ha a tér valamely tartományában és valamely időközben, az akkor és ott jelenlévő tömegpontra erő hat és ez a helykoordináták és az idő folytonosan differenciálható függvénye.
Tehát az $\vec{r}$ és t az erő vektorfüggvény változói: $\vec{F}(\vec{r}, t)$

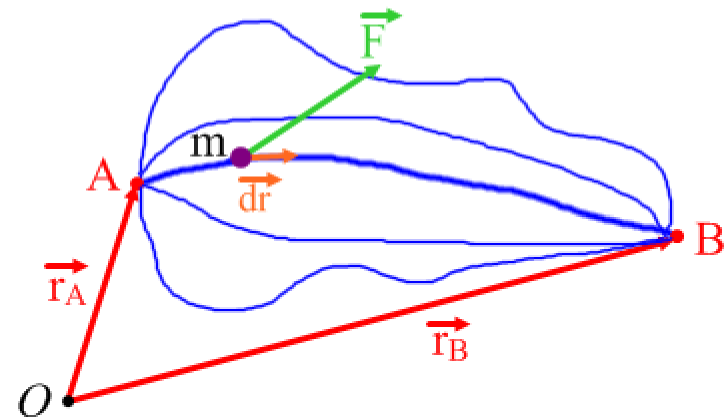


- Az erőtér lehet időtől független (**stacionárius**), tehát $\frac{\partial \vec{F}}{\partial t} = 0.$
  Ekkor az erő csak a helytől függ: $\vec{F}(\vec{r})$

- Az erőtér lehet helytől független (**homogén**), tehát $\frac{\partial \vec{F}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{F}}{\partial y} = \frac{\partial \vec{F}}{\partial z} = 0$
  Ekkor az erő csak az időtől függ: $\vec{F}(t)$

Konzervatív erőterek

Konzervatív erőtér: Olyan időtől független erőtér amelyben két pont között az erőtér által végzett munka független az úttól (ez ekvivalens azzal, hogy bármely zárt görbére a munka nulla).

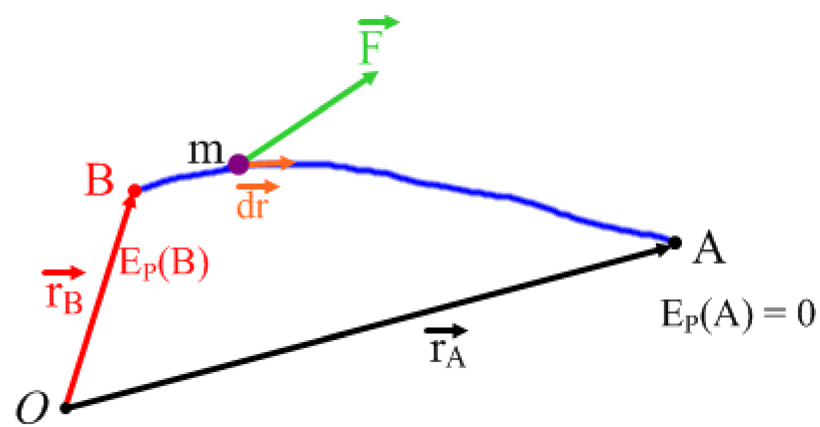


Ekkor a pontokat (pl. B) jellemezhetjük a munkával amit a tér végez amíg onnan a test egy kiválasztott nullpontba (pl. A) mozdul.

Potenciális (helyzeti) energia:

A potenciális energia egy pontban (B) egyenlő azzal a munkával amit a tér végez miközben a test onnan a nullpontba (A) mozdul.

$$E_P(B) = W_{BA} = \int_B^A \vec{F} \cdot d\vec{r}$$



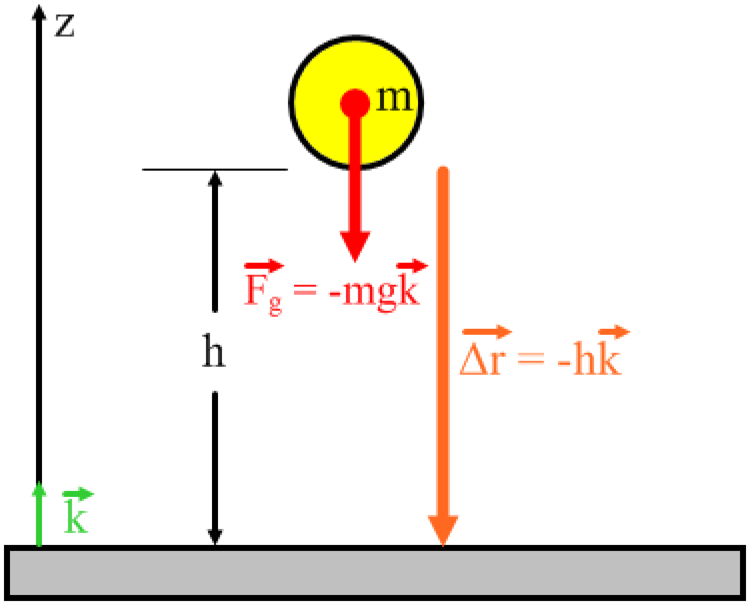
Példa: súlyerő munkája*

Legyen a padló szintje a potenciális energia nullpontja, és ejtsünk le egy F_g = 20N súlyú testet 80m magasról.

Ekkor a súlyerő munkája (vagyis a potenciális energia 80m magasan):

$$E_P(h) = W_{h0} = \int_{h\vec{k}}^{0} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{h\vec{k}}^{0} \left(-mg\vec{k}\right) \cdot \left(dz\vec{k}\right) =$$

$$= \int_{h}^{0} -mg\, dz = -mg[z]_h^0 = mgh$$



Természetesen ebben az egyszerű esetben használható a *W* = *Fs* képlet is, tehát a *W* = (*mg*)*h* = *mgh* egyből látható.

vagyis esetünkben: *W* = (20N)(80m) = 1600J

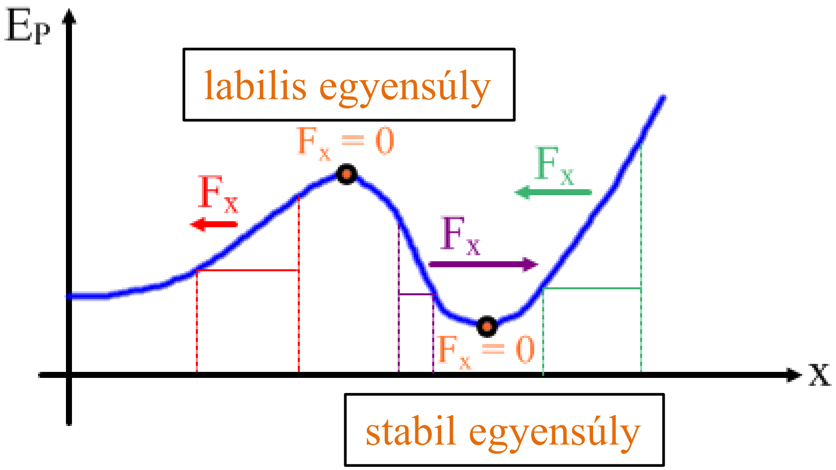
Az energiaminimum elve

Nagyobb erő nagyobb potenciális energiakülönbséget jelent ugyanazon két pont között. Megfordítva: Minél nagyobb ütemben változik a potenciális energia a hely változásával, annál nagyobb a **tér által** kifejtett erő.

Homogén erőtér esetén (illetve az átlagos erőt számolva) egy dimenzióban: $F_x = -\dfrac{\Delta E_P}{\Delta x}$

Általánosan egy tetszőleges pontban egy dimenzióban: $F_x = -\dfrac{\partial E_P}{\partial x}$

Energiaminimum elve: Az erő a csökkenő potenciális energia irányába hat (negatív jel).



Három dimenzióban:

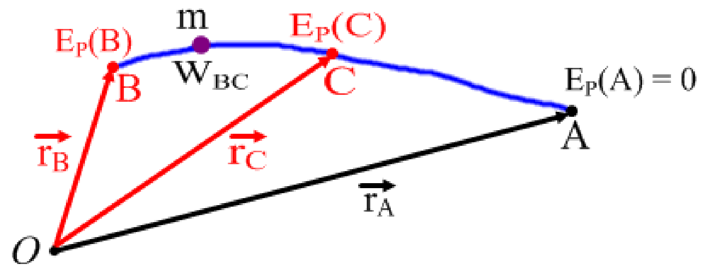
$$\vec{F} = F_x\vec{\imath} + F_y\vec{\jmath} + F_z\vec{k} =$$

$$= -\frac{\partial E_P}{\partial x}\vec{\imath} - \frac{\partial E_P}{\partial y}\vec{\jmath} - \frac{\partial E_P}{\partial z}\vec{k} =$$

$$= -\nabla E_P = -\mathrm{grad} E_P$$

Mechanikai energia

Vegyük azt a speciális esetet **amikor csak konzervatív erők hatnak** miközben a test *B*-ből *C*-be mozdul.



Ekkor bármely *B* és *C* pontokra: $E_P(B) - E_P(C) = W_{BC} = E_K(C) - E_K(B)$

$$-\Delta E_P = W_{BC} = \Delta E_K$$

Ennek az egyenletnek a differenciális alakja: $-dE_P = \delta W = \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = dE_K$

Tehát az **elemi munka a potenciális energia teljes differenciálja**.

Az eredeti egyenletet átrendezve: $E_P(B) + E_K(B) = E_P(C) + E_K(C)$

A potenciális és a kinetikus energia összege **minden pontban megegyezik**.

Vezessük be a **mechanikai energiát**, mely a kinetikus és potenciális energiák összege:

$$E_M = E_P + E_K$$

Ez a mechanikai energia konzervatív erőtérben megmarad: $E_M(B) = E_M(C)$

Nem konzervatív erők munkája

Amikor **<u>nem</u> konzervatív** erők (*nk*) is hatnak (pl. súrlódás, közegellenállás, emberi munka) a tömegpontra:

$$W_{BC} = {W_{BC}}^{k} + {W_{BC}}^{nk} = E_K(C) - E_K(B)$$

Ahol: ${W_{BC}}^{k} = E_P(B) - E_P(C)$ a konzervatív erő munkája.

Átrendezve a nem konzervatív erők munkájára, és behelyettesítve:

$${W_{BC}}^{nk} = E_K(C) - E_K(B) - E_P(B) + E_P(C)$$

$${W_{BC}}^{nk} = E_K(C) + E_P(C) - E_P(B) - E_K(B)$$

Mivel: $E_k(C) + E_P(C) = E_M(C)$ és $E_P(B) + E_K(B) = E_M(B)$

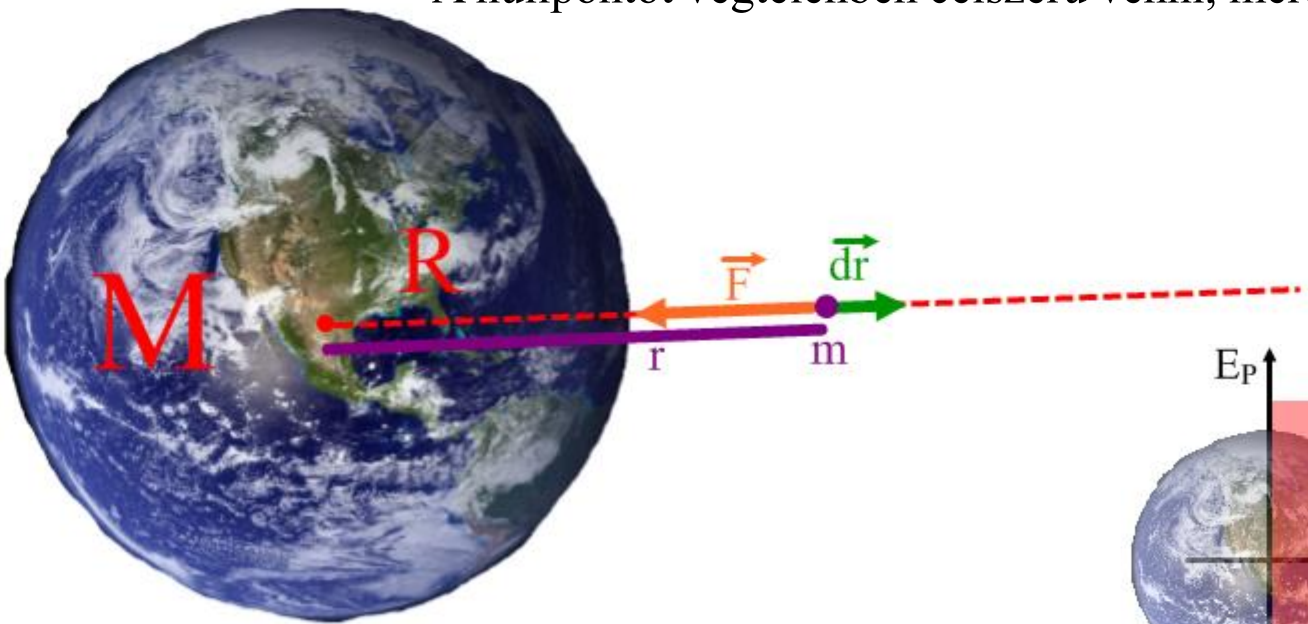
$${W_{BC}}^{nk} = E_M(C) - E_M(B)$$

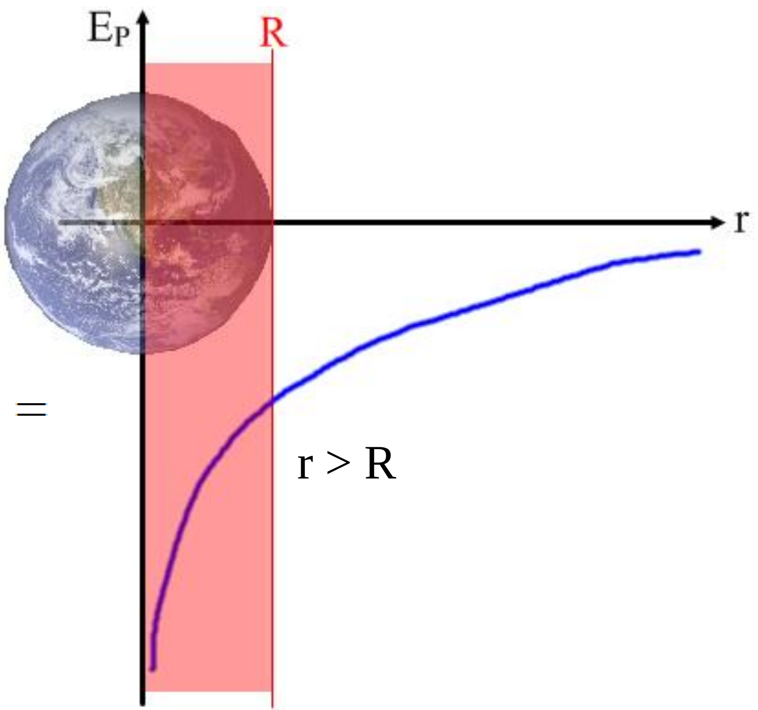
Tehát a nem konzervatív erők munkája egyenlő a mechanikai energia megváltozásával.

Példák konzervatív erőterekre*

Potenciális energia Newton-féle gravitációs mezőben*

Legyen a *M* tömegű test rögzítve, és tőle *r* távolságban kiszámoljuk a *m* tömegű test potenciális energiáját. Az erő sugárirányú, ezért célszerű sugárirányú pályát venni.
A nullpontot végtelenben célszerű venni, mert *r* = 0 problematikus.





$$E_P(\vec{r}) = W_{\vec{r},\infty} = \int_{\vec{r}}^{\infty} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}}^{\infty} \left(-\frac{\gamma Mm}{r^2}\vec{e}_r\right) dr\vec{e}_r =$$

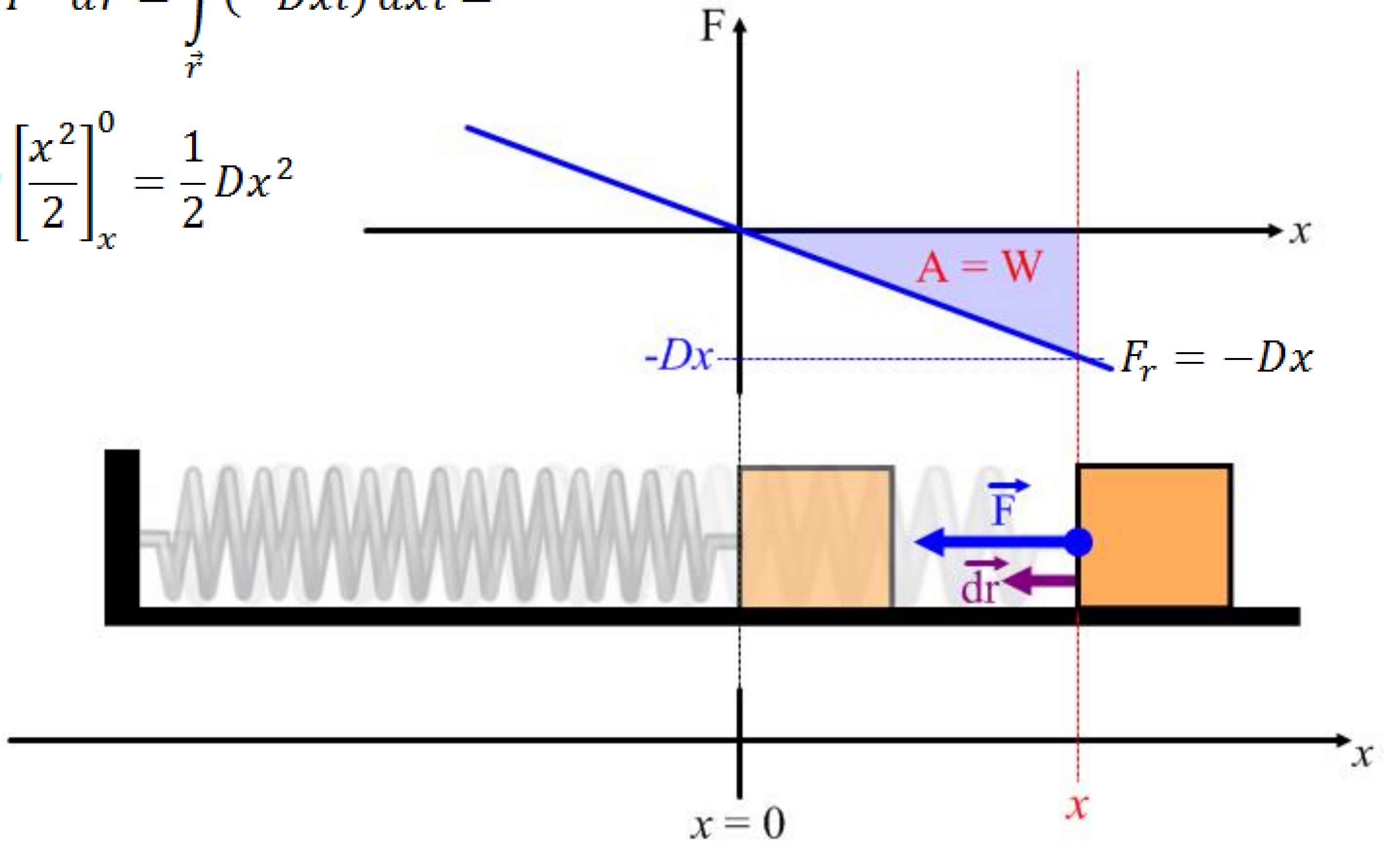
$$= \int_{r}^{\infty} -\frac{\gamma Mm}{r^2} dr = \gamma Mm \left[\frac{1}{r}\right]_r^{\infty} = -\frac{\gamma Mm}{r}$$

Rugóerő potenciális energiája* – Feladat 6

A Hooke-törvény értelmében az erő lineáris függvénye a hosszváltozásnak.
Ez konzervatív erőteret eredményez.
Az *x* hosszal megnyújtott rúgó potenciális energiája:

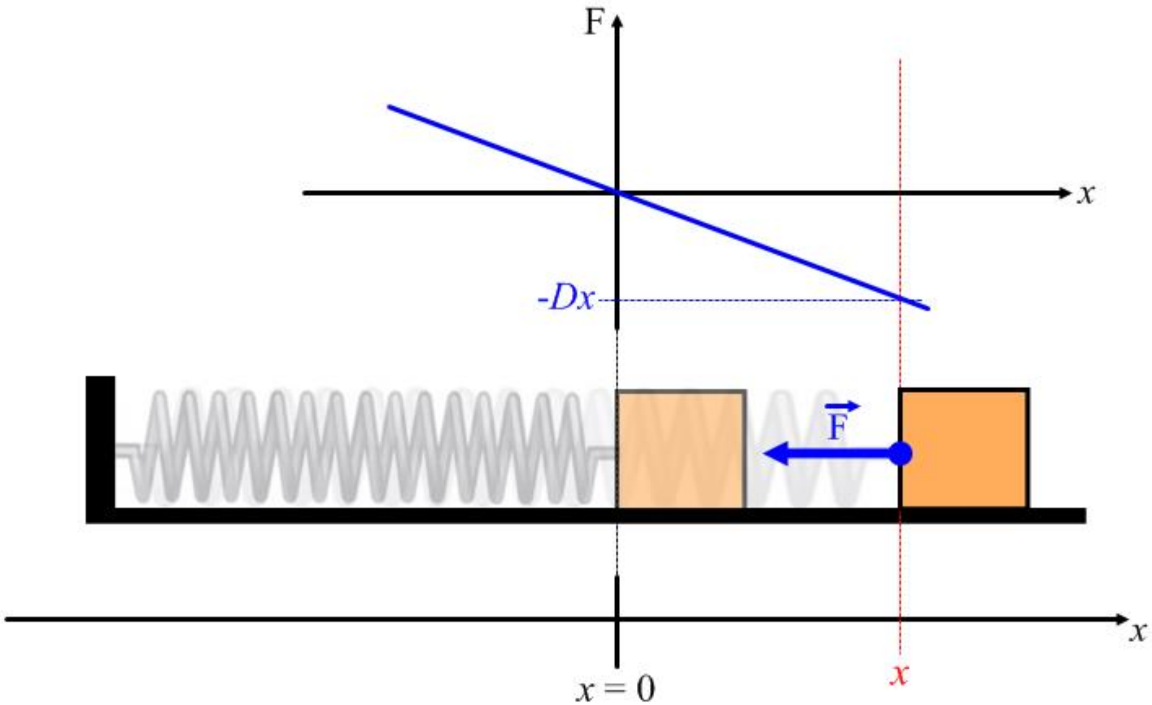
$$E_P(x) = W_{\vec{r},O} = \int_{\vec{r}}^{O} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}}^{O} (-Dx\vec{\imath})\, dx\vec{\imath} =$$

$$= \int_{x}^{0} -Dx\, dx = -D\left[\frac{x^2}{2}\right]_x^0 = \frac{1}{2}Dx^2$$



Harmonikus rezgőmozgás mozgásegyenlete

Harmónikus rezgés: Feltétele, hogy a testre ható erő harmonikus legyen: $F_x = -Dx$ (Hooke-törvény). Tehát pl. egy rúgóra akasztott test (ha minden más erő elhanyagolható).



Felírva a mozgásegyenletet:

$$ma_x = -Dx$$

$$m\ddot{x} = -Dx$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{D}{m}x$$

Általános megoldás (mozgástörvény):

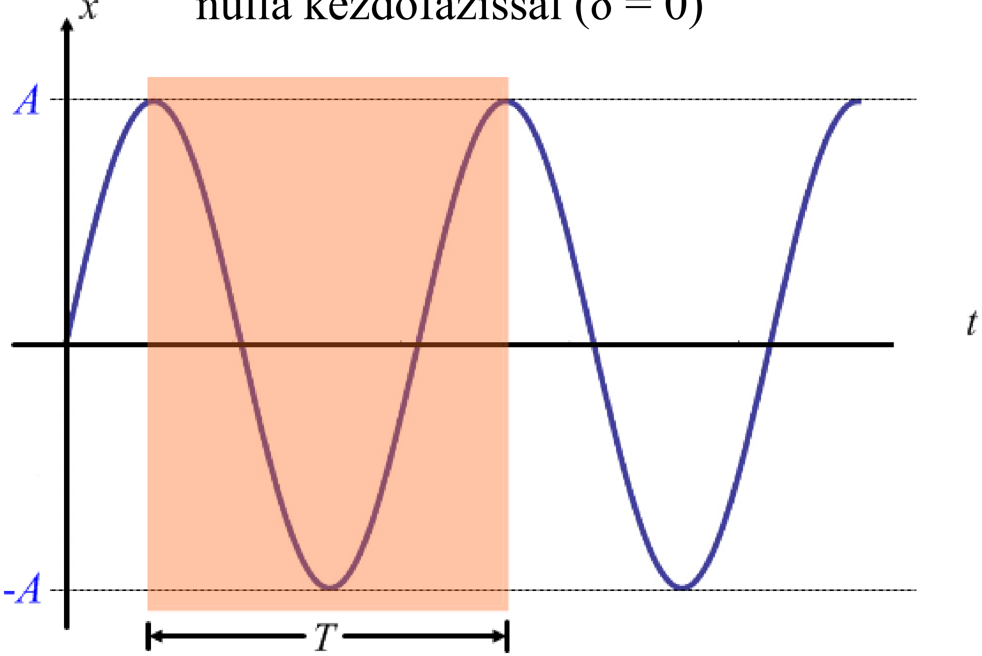
$$x(t) = A\sin(\omega t + \delta)$$

kezdeti feltételek határozzák meg őket $\left\{ \begin{array}{l} \text{A: amplitúdó (maximális kitérés)} \\ \delta\text{: kezdőfázis} \end{array} \right.$

ω: körfrekvencia (lásd később)

Harmonikus rezgőmozgás mozgástörvénye

Szinuszos harmonikus rezgőmozgás,
nulla kezdőfázissal ($\delta = 0$)



$$x(t) = x(t + T)$$

$$\omega(t + T) = \omega t + 2\pi$$

$$\omega T = 2\pi$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$ körfrekvencia

$$\omega = 2\pi f$$

A kitérés-idő függvény:

$$x(t) = A\sin(\omega t + \delta)$$

Ezt deriválva kapjuk a sebességet:

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt} = A\omega\cos(\omega t + \delta)$$

A sebesség deriváltja pedig a gyorsulás:

$$a_x(t) = \frac{dv_x}{dt} = -A\omega^2\sin(\omega t + \delta)$$

Felhasználhatjuk: $x(t) = A\sin(\omega t + \delta)$

Tehát a gyorsulásra: $a_x(t) = -\omega^2 x$

Mozgásegyenletben volt: $a_x = -\frac{D}{m}x$

Tehát: $\omega^2 = \frac{D}{m}$

Kinetikus és potenciális energia*

Kinetikus energia: A sebesség-idő függvényt felhasználva ($\delta = 0$)

$$E_K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\cos^2(\omega t) = \frac{1}{2}DA^2\cos^2(\omega t)$$

Potenciális energia: A kitérés-idő függvényt felhasználva ($\delta = 0$) – rugalmas erőtér

$$E_P = \frac{1}{2}Dx^2 = \frac{1}{2}DA^2\sin^2(\omega t)$$

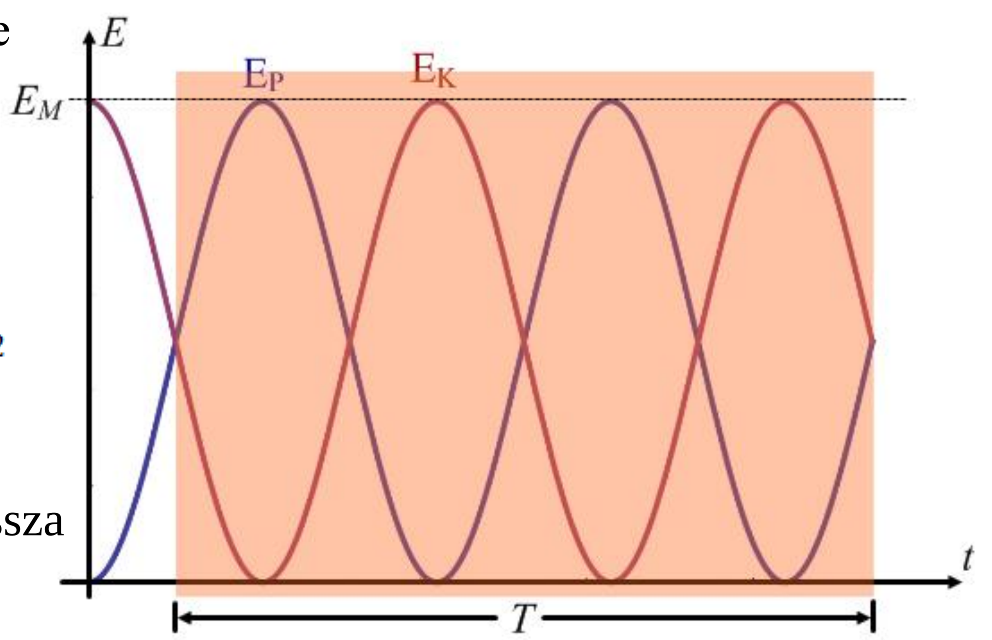
Mechanikai energia:

A potenciális és a kinetikus energia összege

$$E_M = E_K + E_P$$

$$= \frac{1}{2}DA^2\cos^2(\omega t) + \frac{1}{2}DA^2\sin^2(\omega t)$$

$$= \frac{1}{2}DA^2[\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t)] = \frac{1}{2}DA^2$$



A potenciális és a kinetikus energia oda-vissza egymásba alakul a mozgás során.