

# Ideális gázok állapotváltozásai

# Ekvipartíció tétele

**Szabadsági fokok száma:** ( $f$ ) – Az egymástól független energiatárolási módok.

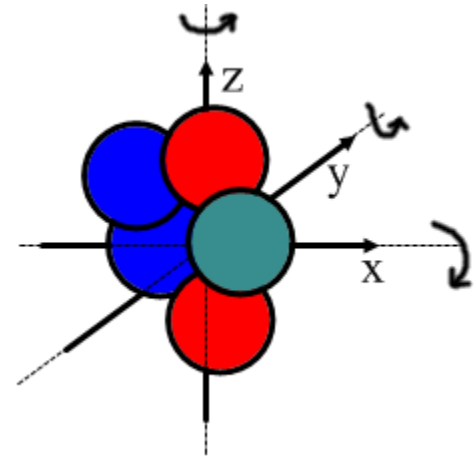
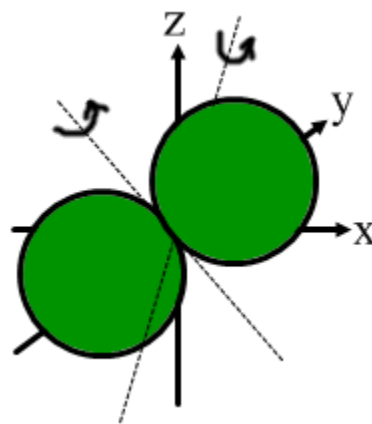
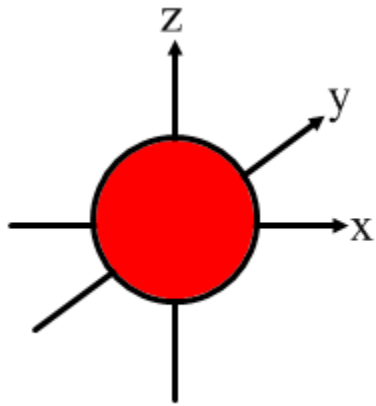
pl. mozgás  $x$  irányban,  $y$  irányban,  $z$  irányban (egyatomos gáz esetén lásd a múlt órai diák)

Tehát:  $f = 3$  (egyetlen atomra). Ezek a translációs szabadsági fokok ( $x, y, z$ ).

Kéttomos vagy egyéb lineáris geometriájú (pl.  $\text{CO}_2$ ) molekulák a hossz tengelyükre merőleges két tengely körül foroghatnak is:  $f = 5$ . Transzlációs mellett 2 rotációs is.

Sokatomos molekulák három egymásra merőleges tengely körül foroghatnak is:  $f = 6$

Energiatárolás csak azon tengely körüli forgás esetén van, amelynél a tehetetlenségi nyomaték nem elhanyagolható (mint a hosszanti tengelyre a lineáris molekuláknál).



**Ekvipartíció tétele:** Egyensúlyi rendszerben, egy adott hőmérsékleten minden rendelkezésre álló szabadsági fokra időátlagban jutó  $\varepsilon_f$  energia megegyezik.

Egy részecske egy szabadsági fokára:  $\varepsilon_f = \frac{1}{2} kT$   $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$  (Boltzmann-állandó)

# Ideális gáz belső energiája

Ha az egy szabadsági fokra jutó energia átlagban  $\varepsilon_f = \frac{1}{2}kT$ , akkor egy részecskére átlagban  $\bar{\varepsilon} = f \cdot \varepsilon_f = f \cdot \frac{1}{2}kT = \frac{f}{2}kT$  energia jut.

Ha a rendszer  $N$  db részecskéből áll, akkor a belső energia ennek egyszerűen az  $N$ -szerese:

$$E_b = \frac{f}{2}NkT = \frac{f}{2}nRT \quad \text{ahol } n = N / N_A \text{ és } R = kN_A$$

$n$ : a mólok száma  $N_A$ : az Avogadro-szám  $R = 8,31 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$  az egyetemes gázállandó.

A belső energia tehát csak a hőmérséklettől függ (adott mennyiségű és típusú gáz esetén).

Annak a testnek magasabb a hőmérséklete, ahol az egy szabadsági fokra jutó energia több.

A belső energia megváltozása tehát:  $\Delta E_b = \frac{f}{2}Nk\Delta T = \frac{f}{2}nR\Delta T$

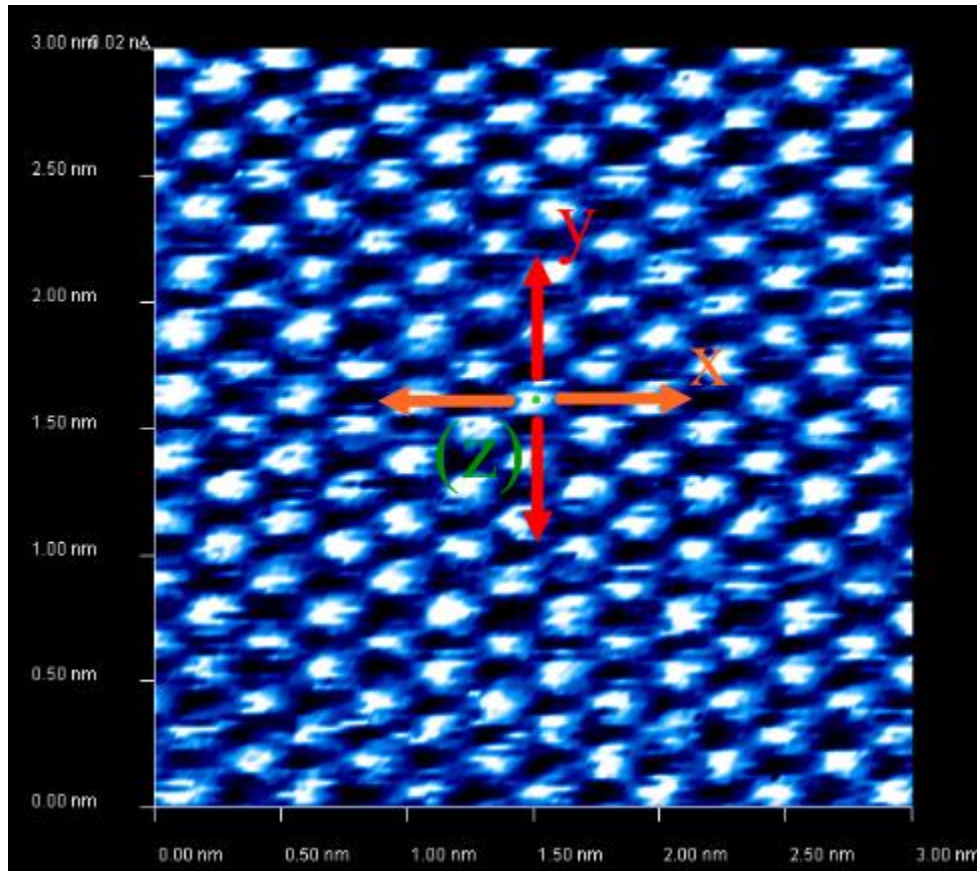
Ha visszatérünk egy pillanatra az egyatomos ideális gázokhoz, akkor kiszámíthatjuk az atomok sebességének **négyzetes középértékét** ( $v_{rms}$  vagyis „root mean square”):

$$E_b = N\bar{\varepsilon} = N \frac{3}{2}kT \quad \text{de így akkor} \quad \bar{\varepsilon} = \frac{1}{2}m_0\overline{v^2} = \frac{3}{2}kT \rightarrow \sqrt{\overline{v^2}} = v_{rms} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$$

( $m_0$ : egy atom tömege,  $M$ : moláris tömeg)

# Dulong-Petit szabály

Szilárd testekben az atomok rezgéseket végeznek három egymásra merőleges ( $x, y, z$ ) irányban. Minden irányhoz tartozik egy kinetikus és egy potenciális energia tag.



*szén atomok pásztázó alagútmikroszkópos képe ( $3 \text{ nm} \times 3 \text{ nm}$ ) grafitban*

Minden atomra:  $f = 6$   
szabadsági fok.

Szilárd test belső energiája:

$$E_b = \frac{f}{2} NkT = 3NkT = 3nRT$$

Mivel  $V = \text{áll}$ ,  $W = 0$ ,  
a hőtan első főtétele alapján:

$$\Delta E_b = Q + W = Q$$

$$Q = 3nR\Delta T = c_M n\Delta T$$

**Dulong-Petit szabály:**

a szilárd test mólhője:

$$c_M = 3R$$

# Ideális gázok állapotegyenlete

A belső energiát egyatomos ideális gázokra kétféle módon is megkaptuk:

$$E_b = \frac{3}{2}NkT = \frac{3}{2}nRT \qquad E_b = \frac{3}{2}pV \qquad \rightarrow \qquad pV = NkT = nRT$$

Ez nem csak egyatomos, hanem többatomos molekulákból álló ideális gázokra is igaz, az adott ideális gáz bármely állapotában. Innen az egyenlet neve...

**Állapotegyenlet:** Ideális gáz minden állapotában, az állapotváltozók között érvényes a következő összefüggés:

$$pV = NkT \quad \text{vagy} \quad pV = nRT$$

Ennek felhasználásával a belső energia:  $E_b = \frac{f}{2}NkT = \frac{f}{2}nRT = \frac{f}{2}pV$

Abban az esetben, ha a gáz mennyisége állandó ( $N = \text{állandó}$ , vagy  $n = \text{állandó}$ ), az állapotegyenletből megkapjuk az **egyesített gáztörvényt**.

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}$$

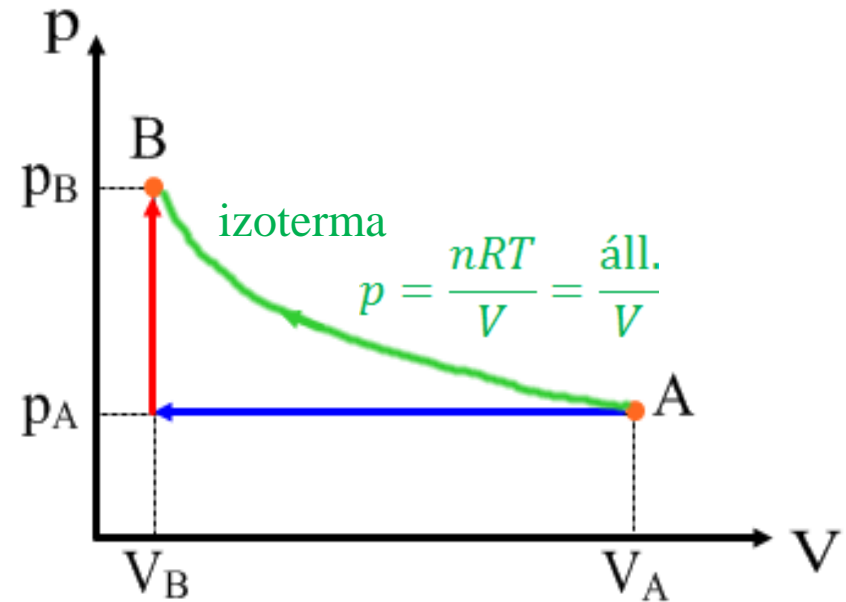
# Ideális gázok speciális állapotváltozásai

Gáz mennyisége mindig adott, tehát  $n = \text{áll!}$

- izobár: a nyomás is állandó ( $pV = nRT$ )  
( $V/T = \text{áll.}$   $W = -p\Delta V = -nR\Delta T$ )

- izochor: a térfogat is állandó ( $pV = nRT$ )  
( $p/T = \text{áll.}$   $W = 0$ )

- izoterm: a hőmérséklet is állandó ( $pV = nRT$ )  
( $pV = \text{áll.}$ )



$$\delta W = -pdV$$

$$W = - \int_{V_1}^{V_2} pdV = -nRT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = -nRT [\ln V]_{V_1}^{V_2} = \\ = -nRT \ln \left( \frac{V_2}{V_1} \right) = nRT \ln \left( \frac{V_1}{V_2} \right) = p_1 V_1 \ln \left( \frac{V_1}{V_2} \right)$$

- adiabatikus: a közölt hő nulla  $Q = 0$  (később...)

## Izobár és izochor mólhő

A belső energia megváltozása izochor folyamat esetén ( $V = \text{állandó}$ , így  $W = 0$ ):

$$Q = c_{MV} n \Delta T \quad \Delta E_b = \frac{f}{2} n R \Delta T = Q \quad \text{izochor mólhő: } c_{MV} = \frac{f}{2} R$$

A belső energia megváltozása izobár folyamat esetén:

$$\Delta E_b = \frac{f}{2} n R \Delta T = Q + W = Q - p \Delta V = Q - n R \Delta T$$

$$\frac{f}{2} n R \Delta T + n R \Delta T = Q$$

$$Q = c_{Mp} n \Delta T \quad Q = \left( \frac{f}{2} + 1 \right) n R \Delta T \quad \text{izobár mólhő: } c_{Mp} = \left( \frac{f}{2} + 1 \right) R$$

A két mólhő hányadosa (fajhők hányadosa) az **adiabatikus kitevő**:

$$\kappa = \frac{c_{Mp}}{c_{MV}} = \frac{c_p}{c_v} = \frac{\frac{f}{2} + 1}{\frac{f}{2}} = \frac{f + 2}{f} \quad \kappa = \frac{5}{3}, \frac{7}{5}, \frac{4}{3}$$

# Adiabatikus állapotváltozás

A folyamat során a hőátadás nulla:  $Q = 0 \rightarrow \Delta E_b = W$

A belső energia megváltozása:  $dE_b = \delta W \rightarrow \frac{f}{2} nRdT = -pdV$

Mivel:  $nRT = pV \rightarrow nRdT = pdV + dpV$

$$\frac{f}{2} (pdV + dpV) = -pdV$$

$$\frac{f}{2} pdV + pdV = -\frac{f}{2} Vdp$$

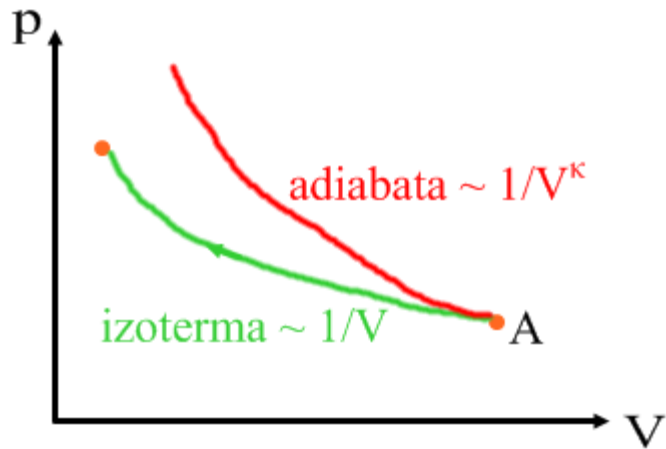
$$\left(\frac{f}{2} + 1\right) \frac{dV}{V} = -\frac{f}{2} \frac{dp}{p}$$

$$\kappa \frac{dV}{V} = -\frac{dp}{p} \rightarrow \kappa \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = -\int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{p}$$

$$\kappa \cdot [\ln V]_{V_1}^{V_2} = -[\ln p]_{p_1}^{p_2}$$

$$\kappa \cdot \ln \left(\frac{V_2}{V_1}\right) = \ln \left(\frac{p_1}{p_2}\right)$$

$$\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^\kappa = \frac{p_1}{p_2}$$



Első Poisson-egyenlet:

$$p_1 V_1^\kappa = p_2 V_2^\kappa$$



## További Poisson-egyenletek

Adiabatikus folyamatra kaptuk az első egyenletet:  $p_1 V_1^\kappa = p_2 V_2^\kappa$

Felhasználva az állapotegyenletet, kapjuk a második Poisson-egyenletet:

$$pV = nRT \rightarrow pV^\kappa = nRTV^{\kappa-1}$$
$$nRT_1 V_1^{\kappa-1} = nRT_2 V_2^{\kappa-1}$$

Egyszerűsítve  $nR$ -el:  $T_1 V_1^{\kappa-1} = T_2 V_2^{\kappa-1}$

Kifejezve  $V$ -t az állapotegyenletből:  $V = \frac{nRT}{p}$

Behelyettesítve az első Poisson egyenletbe:  $p_1 \left( \frac{nRT_1}{p_1} \right)^\kappa = p_2 \left( \frac{nRT_2}{p_2} \right)^\kappa$

Egyszerűsítve  $(nR)^\kappa$ -al és reciprokokat véve kapjuk a harmadik Poisson egyenletet:

$$\frac{p_1^{\kappa-1}}{T_1^\kappa} = \frac{p_2^{\kappa-1}}{T_2^\kappa}$$