

Kinematika

A mozgás matematikai leírása, a mozgást kiváltó ok feltárása nélkül.

Helyvektor és elmozdulás

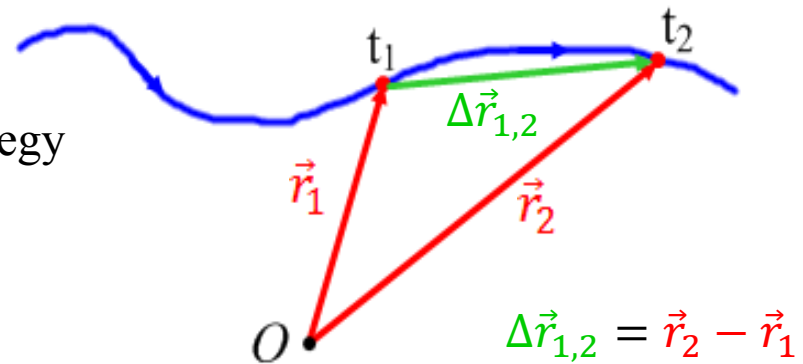
Egy test helyzetét és helyzetváltozását csak más testekhez viszonyítva írhatjuk le. Ezért először választani kell egy vonatkoztatási rendszert:

Egy test (pontszerű) helyzetét a t időpillanatban egy $\vec{r}(t)$ **helyvektorral** jellemezzük, ami a vonatkoztatási rendszer origójából a testhez mutat.

A test mozgása során a térben kijelöli a **pályagörbét**.

Az **elmozdulás** a helyvektor megváltozása egy eltelt Δt idő alatt (itt $\Delta t = t_2 - t_1$).

$$\Delta\vec{r}_{1,2} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)$$



Sebesség

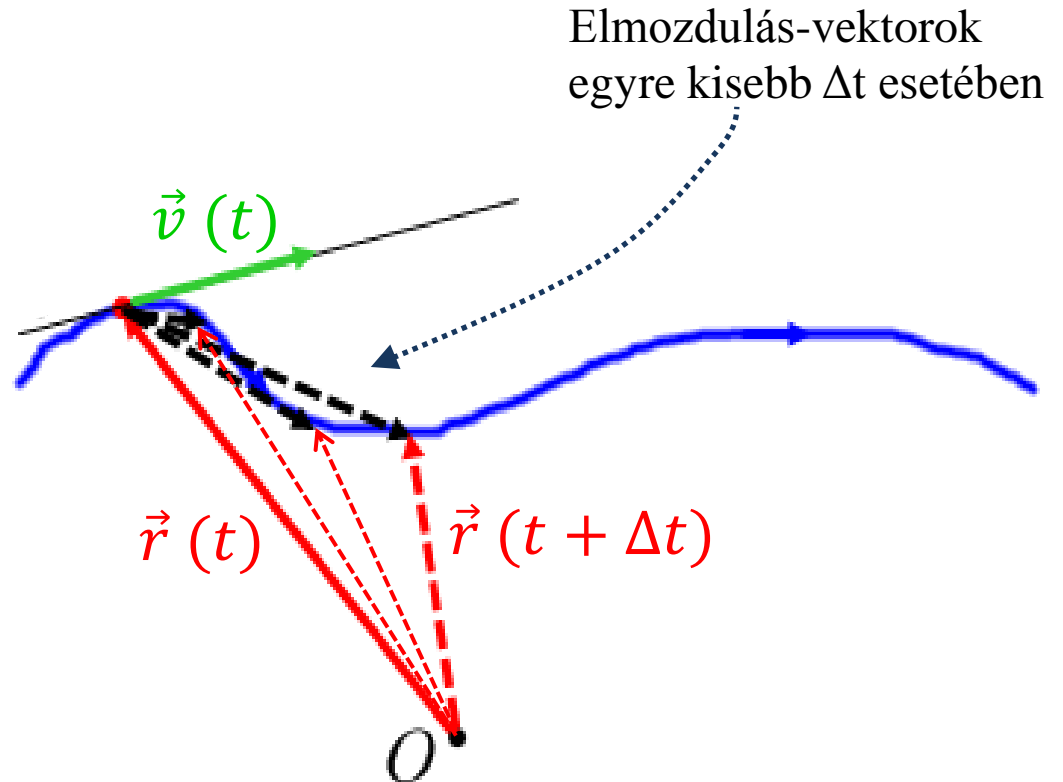
A **sebesség** azt jellemzi milyen gyorsan változik a helyvektor.

FONTOS: a sebesség vektormennyiség, iránya és nagysága is számít!

Ha a sebesség iránya és/vagy nagysága változik (általában igen), akkor pontos értéket csak kis Δt időre kaphatunk.

Teljesen pontos, ha $\Delta t \rightarrow 0$.

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$



Gyorsulás

A **gyorsulás** a sebességvektor változási gyorsasága:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

FONTOS: gyorsulás akkor is van ha csak a sebesség iránya változik. Pl. kanyarodás

Ha a gyorsulás, mint az idő függvénye, valamint a kezdeti hely \vec{r}_0 és a kezdeti sebesség \vec{v}_0 ismert, akkor a mozgás pályája meghatározható:

Első lépés a sebesség idő függvény meghatározása:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \rightarrow \vec{a} dt = d\vec{v}$$

Bármely t_1 időpontban a sebesség: $\vec{v}(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \vec{a}(t) dt + \vec{v}(t_0)$ A végén a t_1 paraméter helyett simán t -t írunk, és megvan a $\vec{v}(t)$

A sebességfüggvény ismeretében a helyvektor bármely t_1 időpontban hasonlóképpen meghatározható:

$$\vec{r}(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \vec{v}(t) dt + \vec{r}(t_0)$$

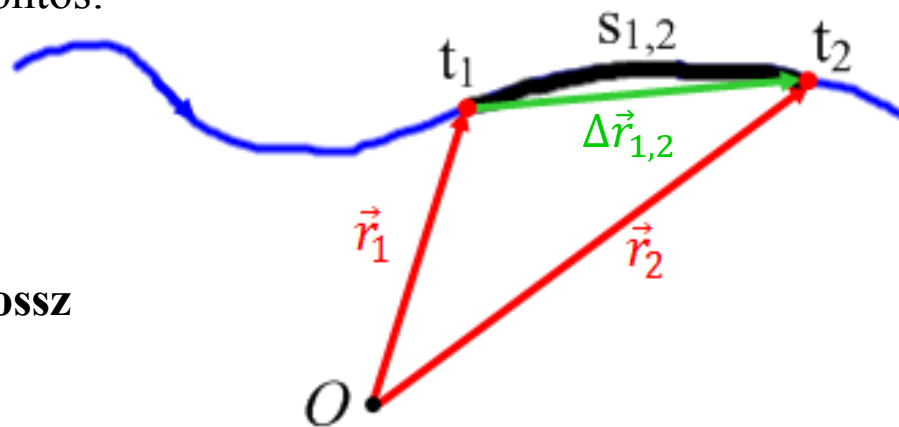
A végén a t_1 paraméter helyett simán t -t írunk, és megvan az $\vec{r}(t)$ függvényünk.

Úthossz és átlagsebesség

Egy adott idő alatt megtett **úthossz** a közben befutott pályagörbe hosszát jelenti. Ez már csak egy skalár mennyiség.

Számításánál csak a sebesség nagysága fontos:

$$s_{1,2} = \int_{t_1}^{t_2} |\vec{v}(t)| dt$$



Az ábra szemlélteti a különbséget az **úthossz** és az **elmozdulás(vektor)** között!

Az **átlagsebesség** (skalár) az a sebességnagyság amivel egyenletesen haladva ugyanazt a hosszúságú utat tenné meg a test ugyanakkora idő alatt:

Nem vektor jel, csak egy vonás!

$$\bar{v} = \frac{s_{1,2}}{t_2 - t_1}$$

Derékszögű Descartes koordináta rendszer

Segítségével a pálya egyenlete:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

Az $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ függvények a **koordináták**.

Az $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ egységvektorok a **bázisvektorok**.

Pitagorasz tételével: $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

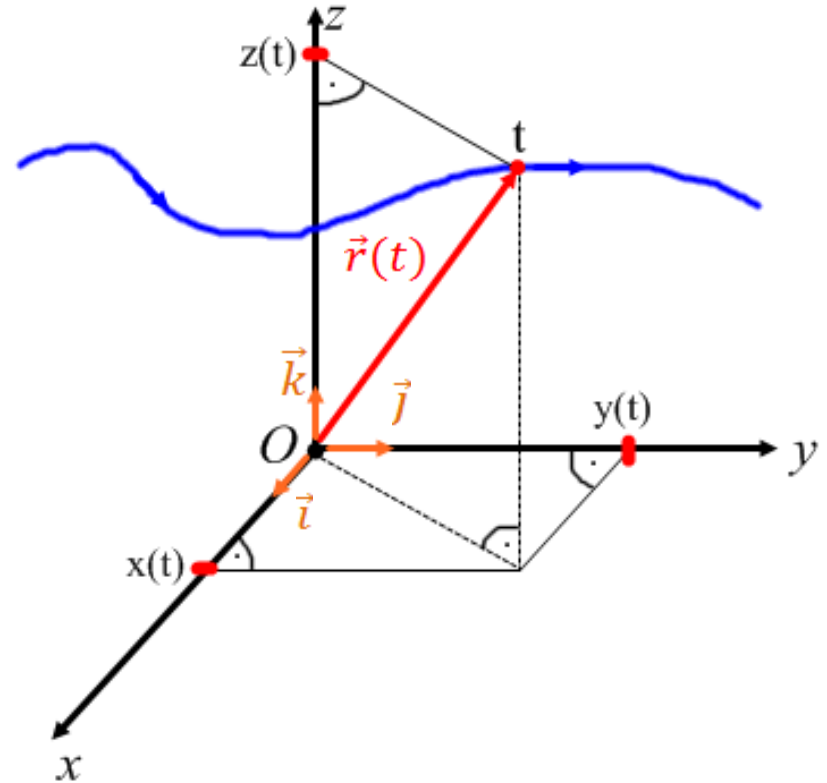
A sebesség:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$$

A sebesség nagysága: $v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$

A gyorsulás és nagysága:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k} \quad a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}$$



Példa: Egyenes vonalú egyenletes mozgás

A mozgás 1 dimenziós, ezért elég egy koordináta ha a mozgás irányába vesszük fel azt az egy tengelyt (pl. x).

Ebben az egyszerű esetben:

$$v_x = v \quad \Delta x = s$$

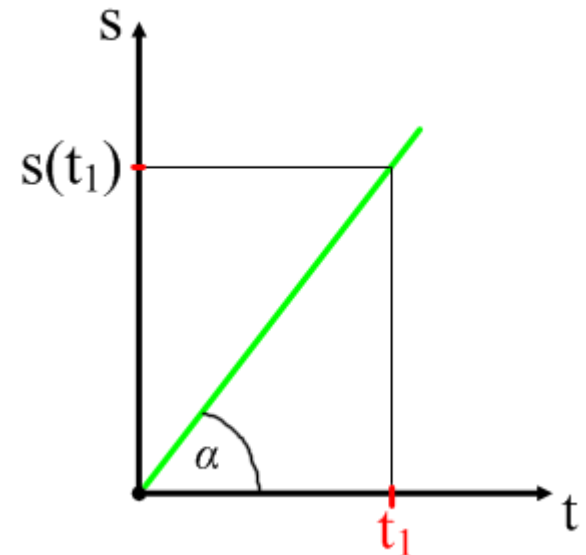
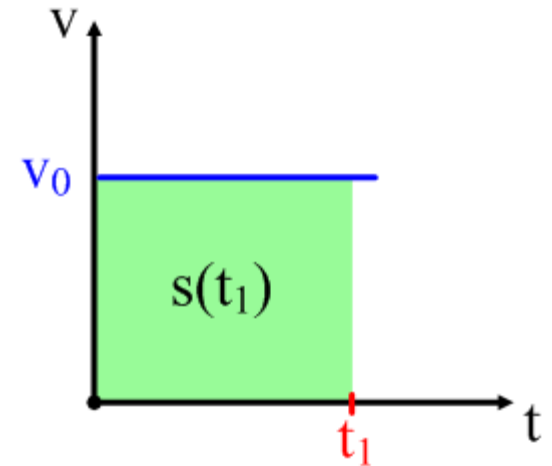
$$s(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} |\vec{v}(t)| dt = \int_{t_0}^{t_1} v dt = v \int_{t_0}^{t_1} dt = v\Delta t$$

Tehát ha $t_0 = 0$, akkor visszkapjuk az $s = vt$ képletet.

A megtett út a sebesség-idő grafikon alatti terület.

Tehát az úthossz lineáris függvénye az időnek, a meredekség pedig a sebesség:

$$\tan \alpha = v = \frac{s}{t}$$



Példa: Egyenes vonalú egyenletesen változó mozgás

Ha a kezdősebesség vektor és a gyorsulás vektor egy egyenesbe esik, akkor a test annak az egyenesnek a mentén fog mozogni (ismét elég egy koordináta, pl. z):

tehát a test a z tengely irányában halad állandó a_z gyorsulással, és időtől függő v_z sebességgel (ezek a komponensek lehetnek negatívak is!). A többi komponens (x, y) nulla. A sebesség egy t_1 időpontban:

$$v_z(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} a_z(t) dt + v_z(t_0) = a_z(t_1 - t_0) + v_z(t_0)$$

legyen $t_0 = 0$
 $v_z(t_0) = v_{z0}$

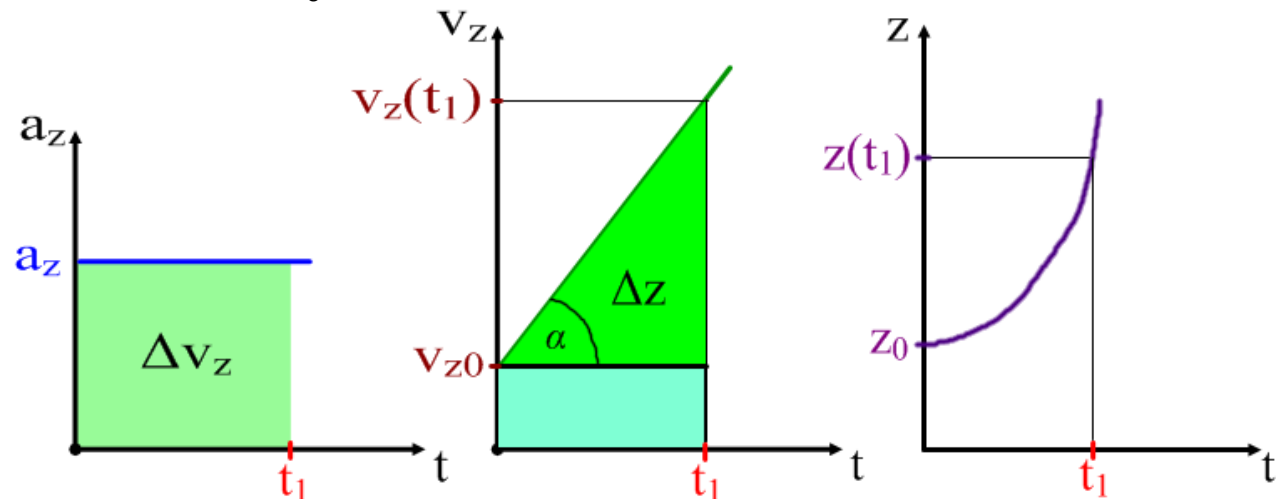
Ezekkel: $v_z(t) = a_z t + v_{z0}$

A test helye: $z(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} v_z(t) dt + z(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} (a_z t + v_{z0}) dt + z(t_0)$ $(\Delta v_z = a_z \Delta t)$

legyen $z(t_0) = z_0$

Tehát ha $t_0 = 0$ továbbra is:

$$z(t) = \frac{1}{2} a_z t^2 + v_{z0} t + z_0$$



Példa: Ferde hajítás

A gyorsulás állandó (g), de nem esik egybe a kezdősebesség vektor irányával:

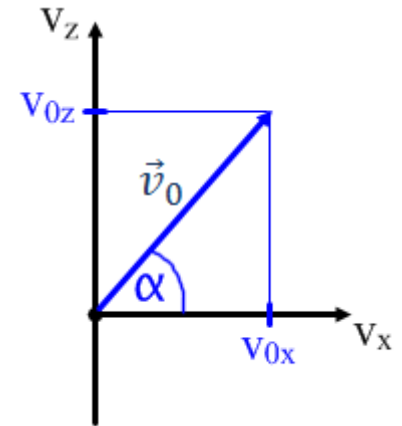
A kezdeti sebesség felbontása (2D – x és z):

$$v_{0x} = v_0 \cos \alpha \quad v_{0z} = v_0 \sin \alpha$$

A gyorsulás: $\vec{a} = -g\vec{k}$

A sebesség-idő függvény: $\vec{v}(t) = v_{0x}\vec{i} + 0\vec{j} + (-gt + v_{0z})\vec{k}$

A helyvektor: $\vec{r}(t) = v_{0x}t\vec{i} + 0\vec{j} + \left(-\frac{g}{2}t^2 + v_{0z}t\right)\vec{k}$



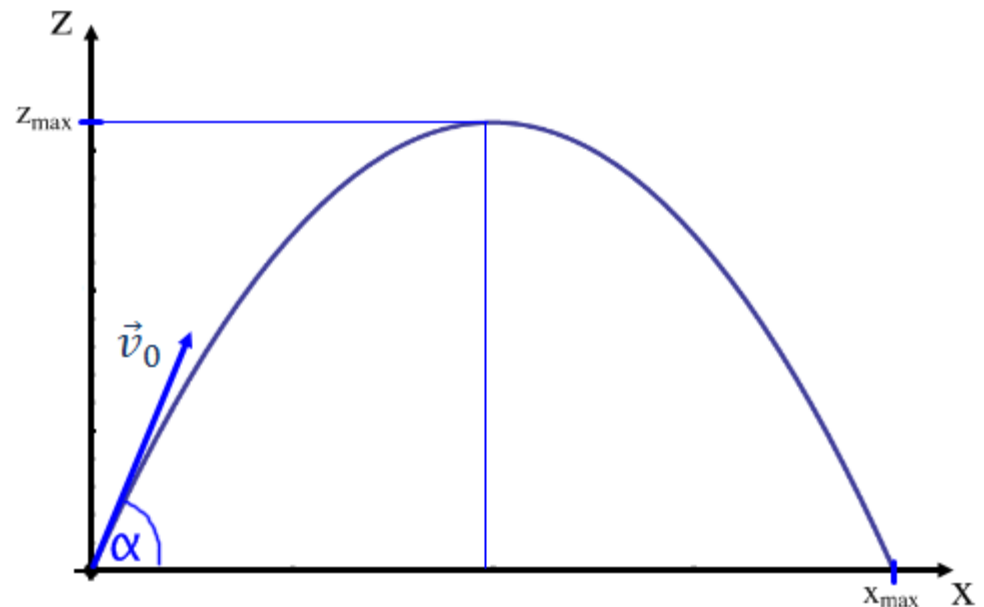
A test földet ér amikor $z = 0$:

$$-\frac{g}{2}t^2 + v_0 \sin \alpha t = 0$$

Megoldva az időre: $t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$

Behelyettesítve az x koordinátára megkapjuk a hajítás távolságát:

$$x_{max} = \frac{2v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g}$$



Síkbeli polár koordináta rendszer

A két koordináta: egy ponttól mért távolság és egy iránytól mért szög.
Körmozgás leírására jól használható, ha az origó a kör középpontjában van.

Pitagorasz tételével és a tangens definíciójából:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \tan \varphi = \frac{y}{x}$$

A koordinátákat a másik irányba kifejezve:

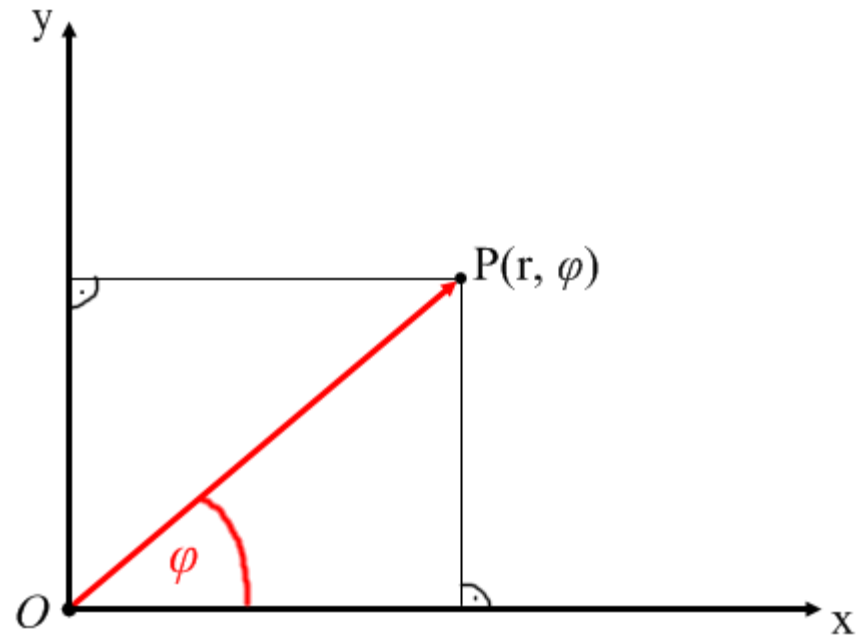
$$x = r \cos \varphi \quad y = r \sin \varphi$$

A φ szög változási gyorsasága adja a **szögsebességet** (mértékegysége: 1/s):

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

A szögsebesség változási gyorsasága pedig a **szöggyorsulás** (mértékegysége: 1/s²):

$$\beta = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$



Példa: Egyenletes körmozgás

A szögsebesség állandó: $\omega = \text{áll.} = \frac{2\pi}{T}$ $\beta = 0$
(ahol T a periódusidő)

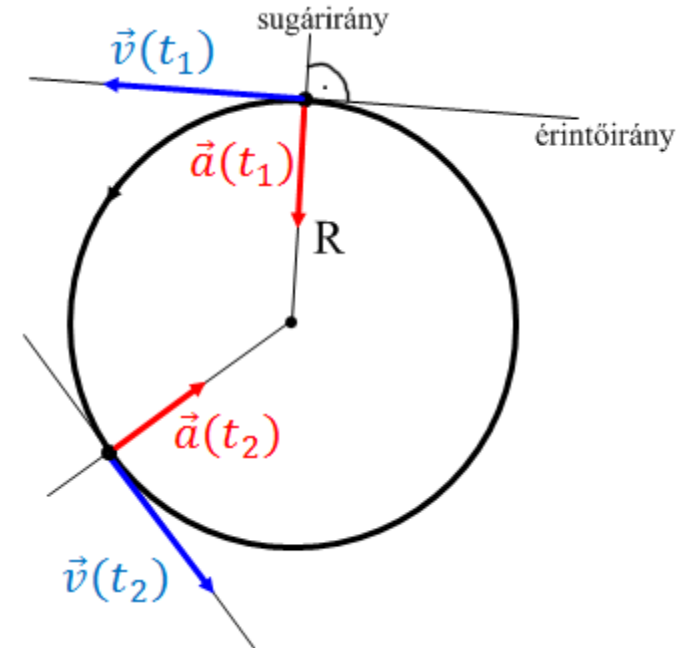
A T idő alatt megtett út tehát a kör kerülete: $s(T) = 2R\pi$

A mozgás sebességének nagysága (kerületi sebesség) is állandó (az iránya viszont nem!):

$$v = \frac{s(T)}{T} = \frac{2\pi R}{T} = R\omega$$

Mivel a sebesség iránya folyamatosan változik, a gyorsulás nem nulla. Nagysága állandó, iránya pedig mindig a középpont felé mutat (centripetális):

$$a = a_{cp} = \frac{v^2}{R} = \frac{R^2\omega^2}{R} = R\omega^2$$



Példa: Egyenletesen változó körmozgás

A szöggyorsulás $\beta = \text{állandó}$, és emiatt a szögsebesség lineárisan változik:

$$\omega(t) = \beta t + \omega_0$$

Az állandó szöggyorsulás miatt a gyorsulásnak lesz egy állandó nagyságú érintőirányú (tangenciális) komponense. Emiatt a sebesség nagysága egyenletesen változik:

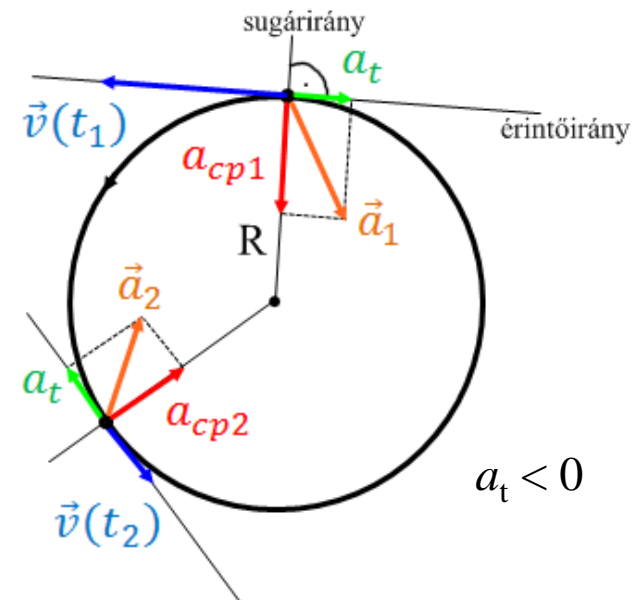
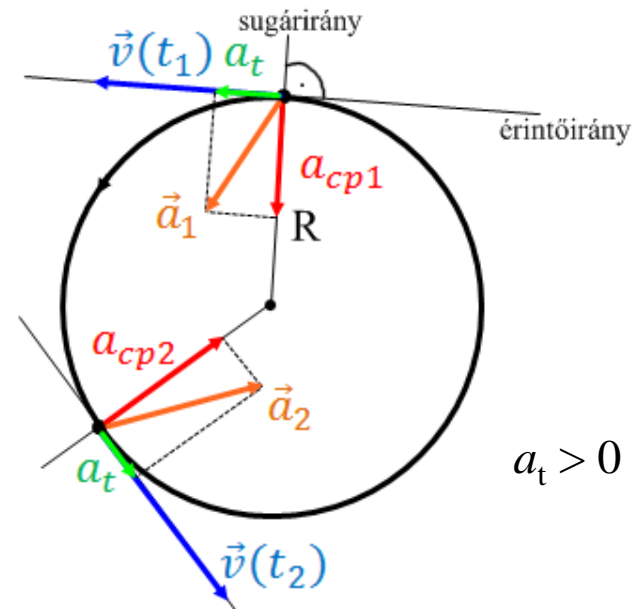
$$a_t = \beta R = \frac{dv}{dt}$$

A gyorsulás nagysága Pitagorasz tételéből:

$$a = \sqrt{a_{cp}^2 + a_t^2}$$

A megtett út csak a tangenciális gyorsulás komponensből függ (a másik komponens csak az irányt változtatja):

$$s(t) = \frac{1}{2} a_t t^2 + v_0 t$$



Henger koordináta rendszer

A síkbeli polár koordinátarendszer két koordinátájához hozzávesszük a Descartes koordinátarendszer z koordinátáját.

Három dimenziós mozgások leírására használható, főleg csavar alakzat menti mozgásra.

Megkülönböztetésül a síkbeli polár koordinátarendszertől r helyett ρ adja meg a tengelytől mért távolságot (ez még nem a pont origótól vett távolsága, azt jelöljük r -el).

$$x = \rho \cos \varphi$$

$$y = \rho \sin \varphi$$

$$z = z$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\tan \varphi = \frac{y}{x}$$

