

Elektrosztatika

Elektrosztatikai jelenségek

Ebonit vagy üveg rudat megdörzsölve az az apró tárgyakat magához vonzza.

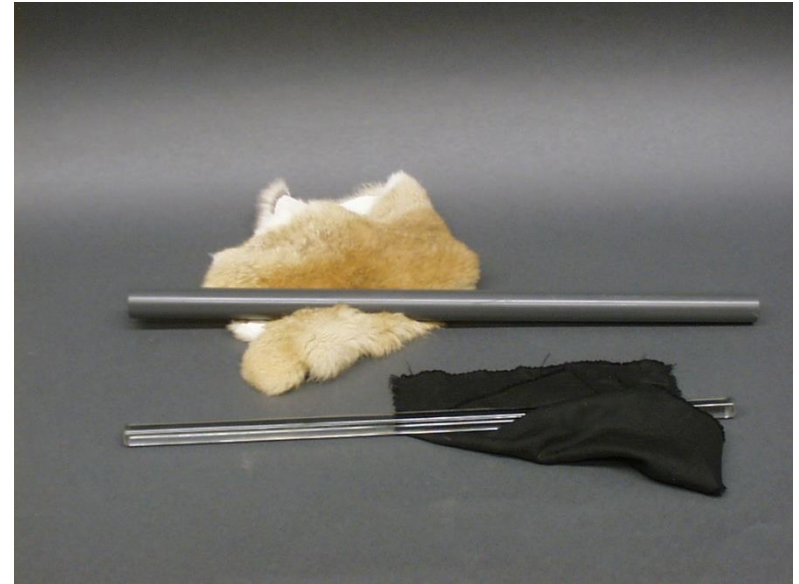
Két selyemmel megdörzsölt üvegrúd között taszítás, üvegrúd és gyapjúval megdörzsölt borostyánkő között vonzás lép fel.

Kétféle elektromos állapot.

Megdörzsölt üvegrúd pozitív.
Borostyán negatív.

Elektromos töltés: milyen mértékben vesz részt egy test az elektromos kölcsönhatásban.
Jele: Q SI mértékegysége: C (coulomb)

Egynemű töltések között taszítás, ellenkező neműek között vonzás.



Elektromos töltések szétválasztása

Semleges test: pozitív és negatív töltések egyenlő mértékben vannak jelen.

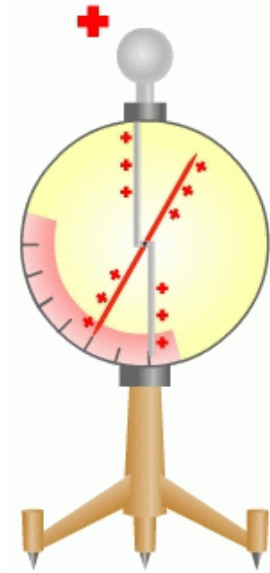
A töltés **megmaradó mennyiség**, viszont szétválasztható.
Elektromos megosztás, vagy influencia.

Vezetők: a töltések szabadon elmozdulhatnak.
(pl. fémek; sók, savak, bázisok vizes oldatai)

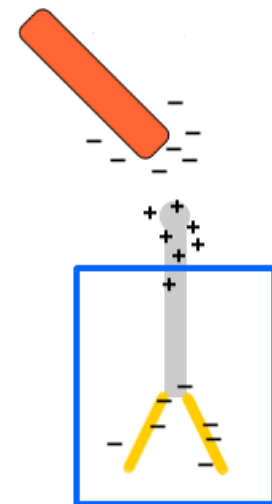
Szigetelők: a töltések csak néhány nanométert mozdulhatnak el.
(polarizáció). (pl. kvarc, gumi, ebonit, porcelán)

A töltések fizikai kontaktus során átvihetők egyik testről a másikra.
Vezető esetén a töltés szétterjed a test teljes felületére.

Töltött test közelében lévő fémbe a töltések megoszlanak.

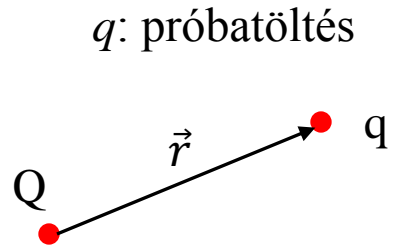


elektroszkóp



Coulomb törvény

Inerciarendszerben nyugvó, pontszerű elektromos töltésekre:



$$\vec{F}_q = k \frac{Qq}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} = k \frac{Qq}{r^2} \vec{e}_r$$

k : Coulomb állandó

$$k \approx 9 \cdot 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2}$$

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \text{ ahol}$$

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi k} \approx 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{Nm}^2}$$

Mivel a q -ra ható erő nagysága csak a távolságtól függ, iránya pedig centrális, így az erőter konzervatív.
(mint a gravitáció)

a vákuum permittivitás, vagy a vákuum dielektromos állandója.

Newton 4. axióma:

Bármely töltéselrendezés erőtere is

konzervatív. $\vec{F}_e = \sum_i \vec{F}_i$

Az elektromos térerősség

Az **elektromos térerősség** a próbatöltéstől független, egy P pontban csak a teret jellemző mennyiség:

$$\vec{E}(P) = \frac{\vec{F}_q(P)}{q} \quad \text{Mértékegysége: } \frac{\text{N}}{\text{C}} \text{ vagy } \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

Térerősség érzékeltetésére az erővonalakat használjuk

- iránya a vonalakkal párhuzamos minden pontban
- nagysága a vonalak sűrűségével van jelölve
- pozitív töltésekről indulnak, negatív töltéseken végződnek

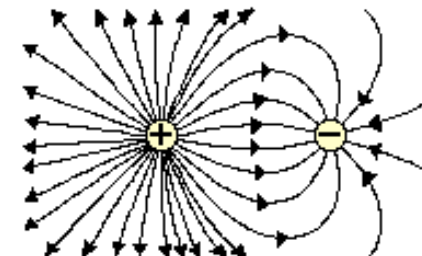
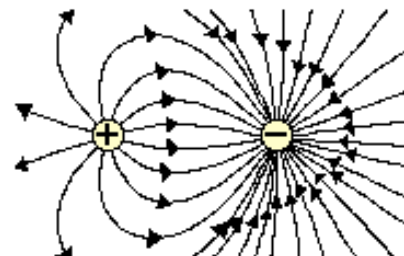
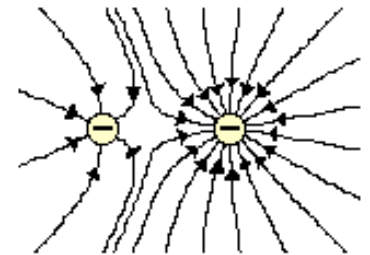
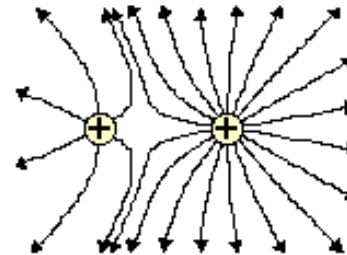
Szuperpozíció: két vagy több töltés esetén a térerősség az egyes töltések által létrehozott térerősségek vektori összege.

A q -ra ható eredő erő :

$$\vec{F}_e = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_N$$

$$q\vec{E} = q\vec{E}_1 + q\vec{E}_2 + \dots + q\vec{E}_N$$

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_N$$



Elektromos feszültség

Az elektrosztatikus tér munkája a q próbatöltésen amíg az A -ból B -be jut:

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B q\vec{E} \cdot d\vec{r} = q \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

A **feszültség** az egységnyi próbatöltésen végzett munka:

$$U_{AB} = \frac{W_{AB}}{q} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} \quad \text{Mértékegysége: V}$$

Homogén térben, azzal egyirányú d elmozdulás esetén: $U = Ed$

Az elektromos feszültség csak a térre és a két pontra jellemző mennyiség.

Potenciális energia és potenciál

Konzervatív erőterben a tér által az A és B pontok között végzett munka megegyezik a kezdő és végpontbeli potenciális energia különbségével:

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = E_P(A) - E_P(B)$$

Az egységnyi pozitív töltésre jutó potenciális energia a **potenciál**:

$$U_A = \frac{E_P(A)}{q}$$

Két pontban vett potenciálok különbsége a két pont közötti feszültség:

$$U_A - U_B = U_{AB} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

Az elektrosztatikus potenciált általában (véges töltéeloszlások esetén) a végtelenben vehetjük zérusnak:

$$U_A = \int_A^\infty \vec{E} \cdot d\vec{r} \quad \text{Hasonlóan: } E_P(A) = \int_A^\infty \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

A potenciális energia és a potenciál gradiense

Az erő mindig az alacsonyabb potenciális energiájú hely irányába hat, és annál nagyobb minél nagyobb az egységnyi hosszra eső energiaváltozás:

$$\vec{F} = -gradE_P = -\nabla E_P = \left(-\frac{\partial E_P}{\partial x}, -\frac{\partial E_P}{\partial y}, -\frac{\partial E_P}{\partial z} \right)$$

A q próbatöltéssel végigosztva kapjuk a térerősségre:

$$\vec{E} = -gradU = -\nabla U = \left(-\frac{\partial U}{\partial x}, -\frac{\partial U}{\partial y}, -\frac{\partial U}{\partial z} \right)$$

Példa:

Az elektrosztatikus potenciál az $U = b(3x^2 + 4z)$ módon függ a koordinátáktól (vagyis a helytől). Mekkora és milyen irányú a térerősség az origóban és a $(2, 1, 0)$ pontban?

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\nabla[b(3x^2 + 4z)] = -b\nabla(3x^2 + 4z) = \\ &= -b \left[\frac{\partial(3x^2 + 4z)}{\partial x}, \frac{\partial(3x^2 + 4z)}{\partial y}, \frac{\partial(3x^2 + 4z)}{\partial z} \right] = \\ &= -b(6x, 0, 4) = -6bx\vec{i} - 4b\vec{k} \end{aligned}$$

Origó: $x = 0, y = 0, z = 0$

$(2,1,0)$ pont: $x = 2, y = 1, z = 0$

$$\vec{E}(0,0,0) = -b(0,0,4) = -4b\vec{k}$$

$$\vec{E}(2,1,0) = -b(12,0,4) = -12b\vec{i} - 4b\vec{k}$$

Az elektrosztatikus tér I. alaptörvénye

Mivel az elektrosztatikus tér konzervatív, az általa bármely zárt görbe mentén végzett munka nulla:

$$W_0 = \oint_G \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_G q\vec{E} \cdot d\vec{r} = 0 \quad q\text{-val végigosztva:} \quad \oint_G \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$$

Felhasználva Stokes tételét a zárt hurok által határolt felületre:

$$\oint_G \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_F \text{rot } \vec{E} \cdot d\vec{A} = 0 \quad \text{Majd a zárt görbe méretével nullához tartva kapjuk a törvény lokális alakját:}$$

$$\text{rot } \vec{E} = \nabla \times \vec{E} = 0$$

(az elektrosztatikus tér örvénymentes)

Az elektrosztatikai tér I. alaptörvényét egy áramköri hurokra alkalmazva kapjuk a **Kirchhoff-féle huroktörvényt**. Bármely zárt görbén végighaladva a potenciál változásainak (feszültségek) előjeles összege nulla.

$$\sum_i U_i = 0$$

Ponttöltés elektromos tere és potenciálja

A térerősség definíciójából és a Coulomb törvényből:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_q}{q} = k \frac{Qq}{qr^2} \frac{\vec{r}}{r} = k \frac{Q}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} = k \frac{Q}{r^2} \vec{e}_r$$

A Q ponttöltés potenciálja attól R távolságra:

$$\begin{aligned} U(R) &= \int_R^\infty \vec{E}(r) \cdot d\vec{r} = \int_R^\infty \frac{kQ}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \cdot d\vec{r} = kQ \int_R^\infty \frac{1}{r^2} \vec{e}_r \cdot d\vec{r} \\ &= kQ \int_R^\infty \frac{1}{r^2} dr = kQ \left[-\frac{1}{r} \right]_R^\infty = \frac{kQ}{R} \end{aligned}$$

Töltött részecske mozgása homogén elektrosztatikus térben

A q töltésű és m tömegű részecskére felhasználva Newton 2. axiómáját:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{q\vec{E}}{m}$$

Homogén elektrosztatikus tér esetén ez a gyorsulás is homogén és időben állandó. Vegyük fel az x tengelyt a gyorsulás irányába. Ekkor:

$$\vec{a} = (a, 0, 0) = \left(\frac{qE}{m}, 0, 0\right)$$

$$\vec{v} = (v_{x0} + at, v_{y0}, v_{z0}) = \left(v_{x0} + \frac{qE}{m}t, v_{y0}, v_{z0}\right)$$

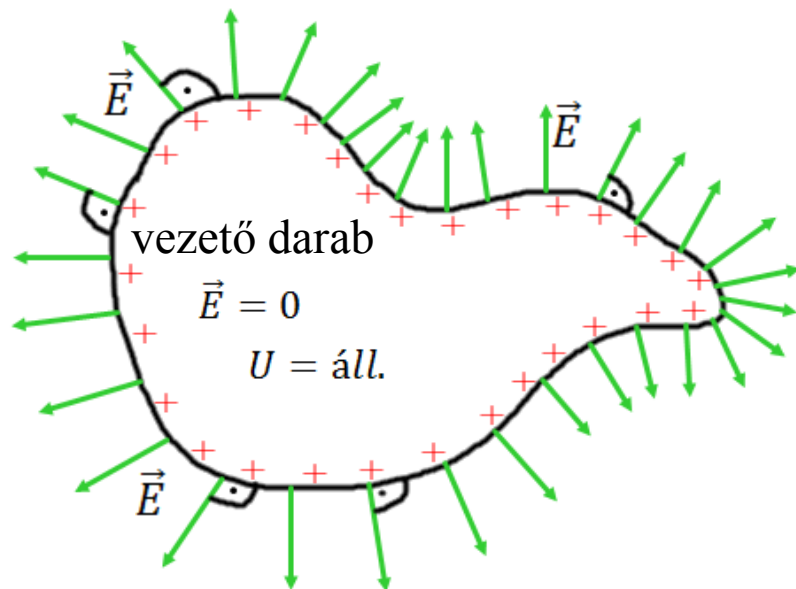
$$\begin{aligned}\vec{r} &= \left(x_0 + v_{x0}t + \frac{a}{2}t^2, y_0 + v_{y0}t, z_0 + v_{z0}t\right) \\ &= \left(x_0 + v_{x0}t + \frac{qE}{2m}t^2, y_0 + v_{y0}t, z_0 + v_{z0}t\right)\end{aligned}$$

Vezetők elektrosztatikus térben

Vezető: a töltések szabadon elmozdulhatnak

Ha a vezető belsejében a térerősség nem lenne nulla akkor áram folyna.

Ha a felületen a térerősségnek lenne tangenciális (párhuzamos) komponense akkor a felület mentén áram folyna.



Egyensúly esetén (elektrosztatika)

- vezetőben a térerősség nulla
- a vezető egész térfogata ugyanolyan potenciálon van (ekvipotenciális)
- a vezető felületén a térerősség merőleges a vezető felületére
- a többlettöltés a vezető felülete mentén oszlik el
- minél hegyesebb egy felületdarab annál nagyobb ott a töltéssűrűség - térerősség

Csúcshatás: kellően hegyes ponton olyan nagy lehet a térerősség, hogy a töltések kilépnek a fémből.

Kapacitás

Kapacitás: az a mennyiség amely jellemzi, hogy egy bizonyos Q töltés szétválasztása mekkora potenciálkülönbséget (feszültség) eredményez a $+Q$ és $-Q$ között.

Vezetőt körülvevő tér erőssége egyenesen arányos a rajta lévő töltéssel.

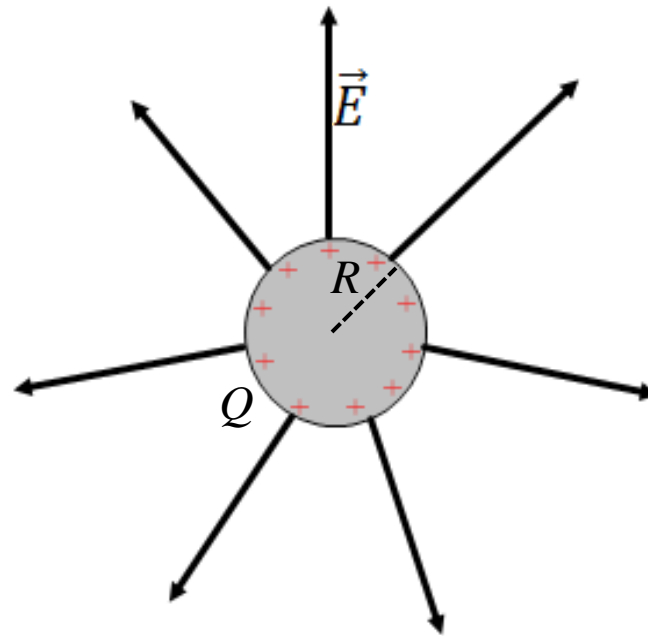
Emiatt a vezető potenciálja is arányos a töltéssel, az arányossági tényező a kapacitás:

$$C = \frac{Q}{U} \quad [C] = F \text{ (farad)}$$

Magányos gömb kapacitása:

gömbszimmetria miatt – ponttöltésre érvényes képlet használható U -ra

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q}{k \frac{Q}{R}} = \frac{R}{k} = 4\pi\epsilon_0 R$$



Ez nagyon kicsi, de ha az ellentétes töltést nem visszük a végtelenbe hanem közel marad akkor sokkal nagyobb lesz a kapacitás, mivel a feszültség így sokkal kisebb!

Kondenzátor

A szétválasztott töltések tárolása egymáshoz közel történik – kis feszültség – nagy kapacitás.

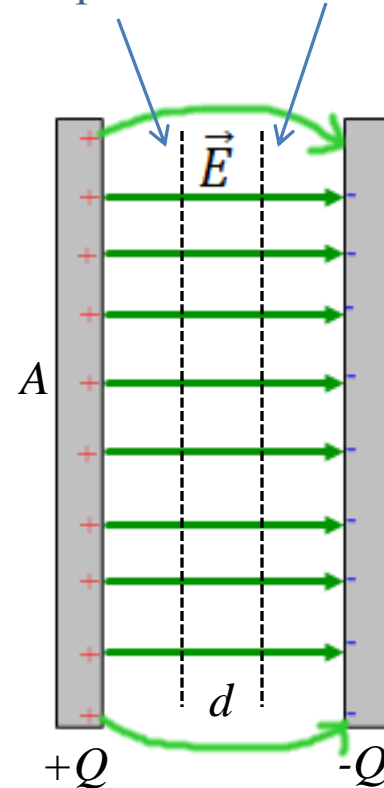
- párhuzamos lemezek (síkkondenzátor)
- koncentrikus gömbök
- koaxiális hengerek

Síkkondenzátor

- A fegyverzetek mérete sokkal nagyobb mint a köztük lévő távolság (d).
- végtelen síkoknak tekinthetők
- a térerősség a lemezek között homogén és azokra merőleges.
- az ekvipotenciális felületek a lemezekkel párhuzamosak.

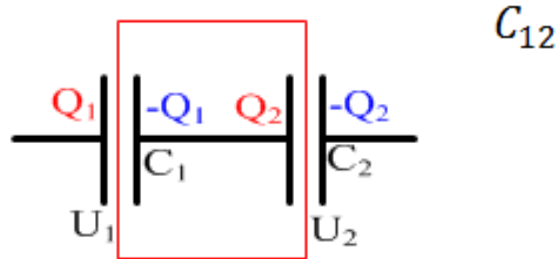
$$C = \frac{Q}{U} \quad Q = CU = CE d$$

ekvipotenciális felületek



Kondenzátorok kapcsolásai

soros kapcsolás eredő kapacitása



Jobbról és balról szakadás -
középen lévő darab össztöltése
feltöltés előtt és után is nulla
(piros téglalap) $Q_2 - Q_1 = 0$

$$Q_1 = Q_2 = Q$$

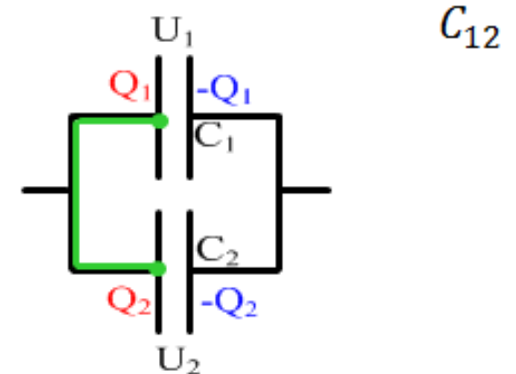
A feszültség összeadódik:

$$U = U_1 + U_2$$

$$\frac{Q}{C_{12}} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2}$$

$$\frac{1}{C_{12}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

párhuzamos kapcsolás eredő kapacitása



A kondenzátor megfelelő lemezei
vezetővel vannak összekötve.
(zöld vonal, de a másik két lemez is)
Ezért azonos potenciálon vannak és

$$U_2 = U_1 = U$$

A töltés összeadódik:

$$Q = Q_1 + Q_2$$

$$C_{12}U = C_1U + C_2U$$

$$C_{12} = C_1 + C_2$$