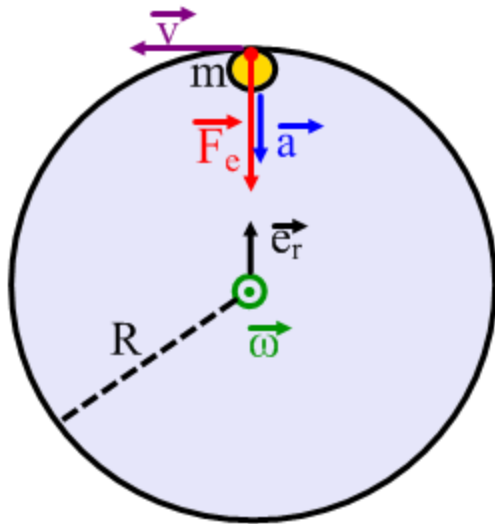


Egyenletes körmozgás dinamikája

Egyenletes körmozgás: A mozgás során a sebesség nagysága állandó, iránya viszont folyamatosan változik. Tehát van gyorsulás, ami a középpont felé mutat (**centripetális**). Ennek feltétele, hogy az eredő erő is abba az irányba mutasson (centripetális erő).



INERCIARENDSZERBEN TÁRGYALJUK

A dinamika alapegyenlete: $m\vec{a} = \vec{F}_e$

Gyorsulásnak csak centripetális (sugár irányú) komponense van.

Az eredő erő nagysága:

$$F_e = ma = ma_{cp} = m \frac{v^2}{R} = m\omega^2 R$$

Ezt az eredő erőt sokféle kölcsönhatás biztosíthatja: lehet pl. gravitációs erő, Coulomb-erő, kötél-erő, nyomóerő, Lorentz-erő, stb. stb.

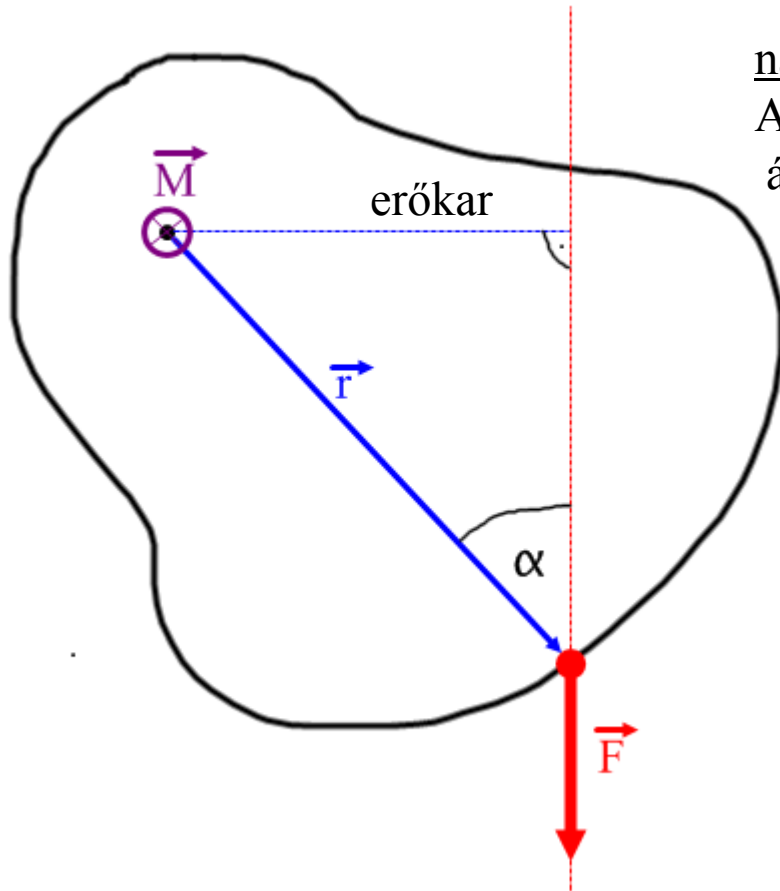
Ekkor $\vec{F}_e \perp \vec{v}$, tehát a **munkavégzés nulla**. A centripetális erő nem végez munkát.

A szögsebesség-vektor iránya a jobbkéz-szabállyal határozható meg. Az ábrán pl. kifelé.

Változó körmozgás - forgatónyomaték

Egy erő origóra (forgástengely) vonatkoztatott **forgatónyomatéka**: $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$

Erőkar: az erő hatásvonalának a forgástengelytől mért távolsága



nagysága: erő \times erőkar, vagyis $M = Fr_{\perp} = Fr \sin \alpha$
A forgatónyomaték nulla, ha az erő hatásvonala átmegy a forgástengelyen, maximális ha merőleges a helyvektorra.

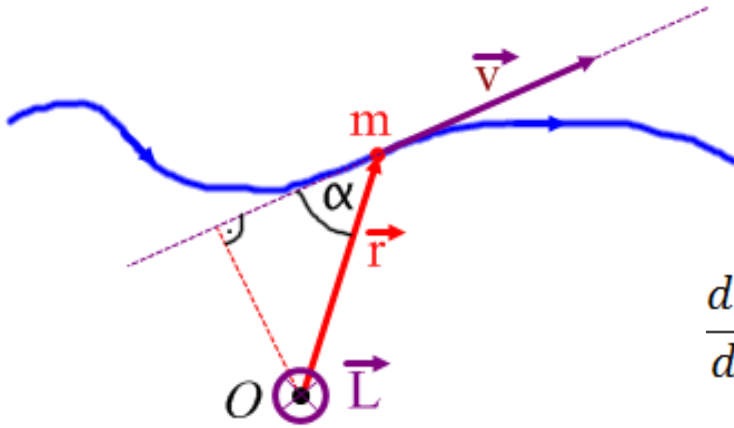
iránya: a vektorszorzat alapján (jobbkez-szabály) merőleges az erő és a helyvektor által meghatározott síkra.

Perdület (impulzusmomentum)

Pontszerű test **perdületének** általános definíciója: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times (m\vec{v})$
(hasonló a forgatónyomaték definíciójához, ami az erő momentuma)

Ha a helyvektor és a sebesség merőleges, mint pl. egyenletes körmozgásnál:

$$L = rmv = mrv = mr\omega r = mr^2\omega$$



A perdület vektor a forgatónyomaték hatására változik meg:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}}{dt} &= \frac{d}{dt} (m\vec{r} \times \vec{v}) = m \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v} + \vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt} \right) = \\ &= m(\vec{v} \times \vec{v} + \vec{r} \times \vec{a}) = \vec{r} \times (m\vec{a}) = \vec{r} \times \vec{F}_e = \vec{M}_e \end{aligned}$$

Perdülettétel:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_e$$

Tehetlenségi nyomaték

Speciális eset: tömegpont rögzített tengely körül, állandó távolságban mozog (körmozgás)

$$L(t) = mr^2 \omega(t)$$

Ekkor a perdületet idő szerint deriválva: $\frac{dL}{dt} = mr^2 \frac{d\omega(t)}{dt} = mr^2 \beta(t)$

β a szöggyorsulás, az mr^2 tag pedig a tömegpont **tehetlenségi nyomatéka**.

Tömegpontra a tehetlenségi nyomaték tehát: $\theta = mr^2$, ahol r a tengelytől mért távolság.

A perdülettélt felhasználva: $\frac{dL}{dt} = mr^2 \frac{d\omega(t)}{dt} = \theta \beta(t) = M$

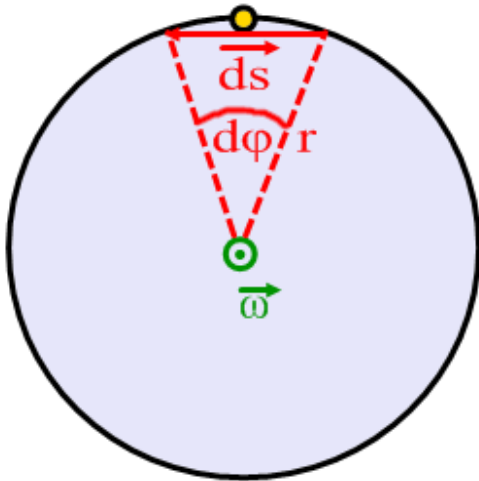
Megkaptuk a forgómozgás alapegyenletét: $M = \theta \beta$

A tömegpont **mozgási energiája**: $E_K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mr^2\omega^2 = \frac{1}{2}\theta\omega^2$

Munka és teljesítmény

Az elemi munka egy infinitezimális elmozdulás során (körmozgás):

$$\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{s} = m\vec{a} \cdot d\vec{s} = ma_t ds = m\beta r ds = m\beta r^2 d\phi = \theta\beta d\phi = M d\phi$$



Haladó és forgó mozgások közötti analógia

	Haladó mozgás (1 dimenzió)	Forgó mozgás
változó	x	ϕ
(szög)sebesség	v_x	ω
(szög)gyorsulás	a_x	β
tehetetlenség	m	θ
A (szög)gyorsulás oka	$F_x = m a_x$	$M = \theta\beta$
Impulzus(momentum)	$p_x = m v_x$	$L = \theta\omega$
Kinetikus energia	$\frac{1}{2} m v_x^2$	$\frac{1}{2} \theta\omega^2$
munka	$F_x \Delta x$	$M\Delta\phi$
teljesítmény	$F_x v_x$	$M\omega$

Ebből a teljesítmény:

$$P = \frac{dE_K}{dt} = \frac{\delta W}{dt} = M \frac{d\phi}{dt} = M\omega$$

Súlypont

A testek mérete sokszor nem hanyagolható el a problémában szereplő méretekhez képest. A kiterjedésük miatt a haladó mozgás mellett a forgó mozgásukat is figyelembe kell venni.

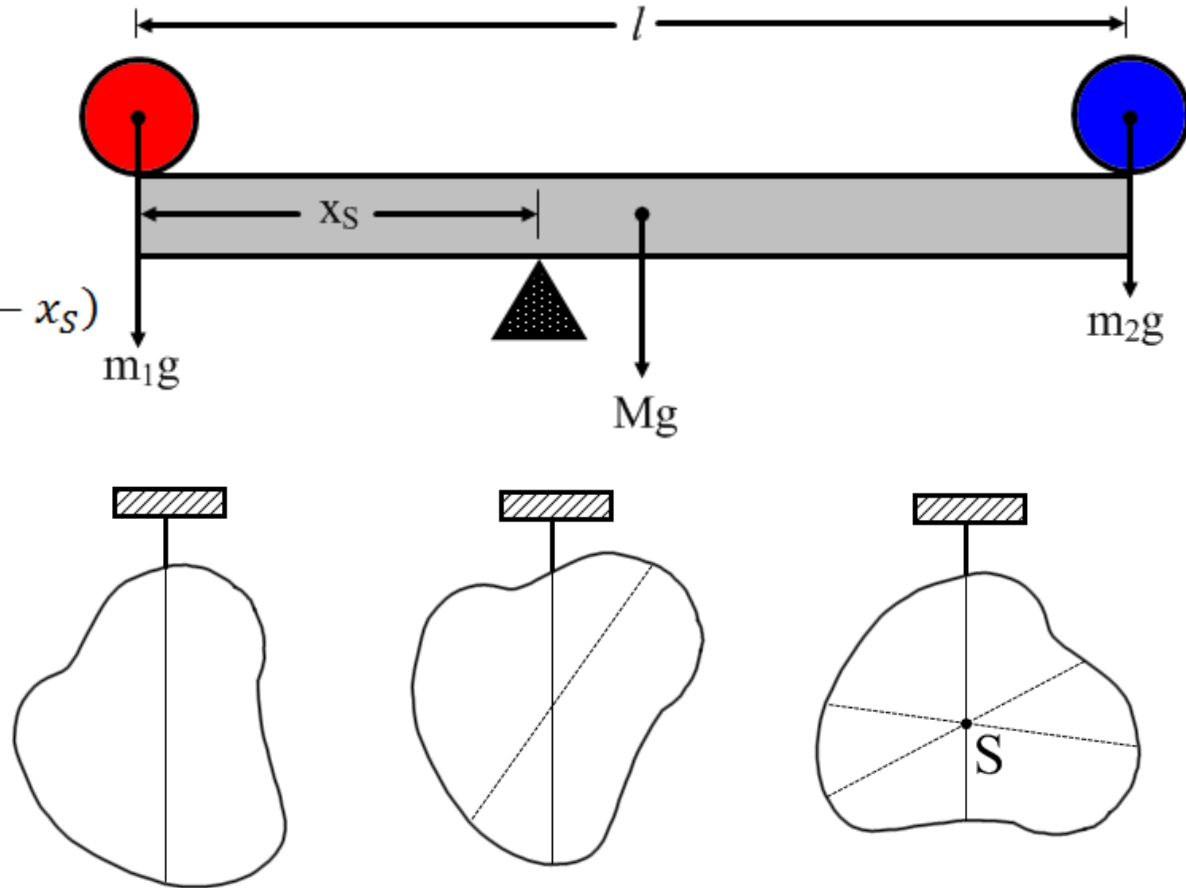
A **súlypont** az a pont ami alatt úgy alátámaszthatjuk a testet, hogy az egyensúlyban legyen:

Az alátámasztás helyére az eredő forgatónyomatéknak nullának kell lennie. Például:

$$m_1 g x_s = Mg \left(\frac{l}{2} - x_s \right) + m_2 g (l - x_s)$$

$$x_s = \frac{Mg \left(\frac{l}{2} \right) + m_2 g l}{m_1 g + Mg + m_2 g}$$

Egy bonyolult alakú test súlypontját azt több pontjában felfüggesztve határozhatjuk meg, mint a függőleges vonalak metszéspontja:

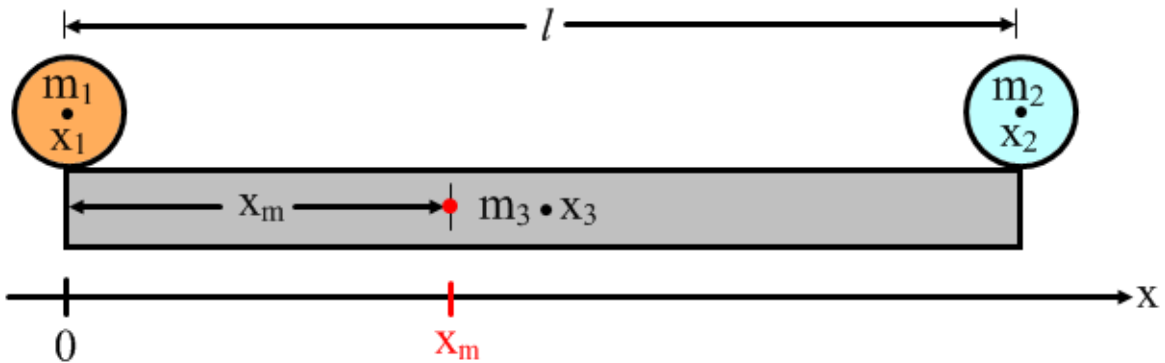


Tömegközéppont

Kiterjedt test **tömegközéppontjának** helye a testet felépítő pontok helyének tömegekkel súlyozott átlaga (illetve a részek tömegközéppontjainak tömegekkel súlyozott átlaga):

A példában az összetett test tömegközéppontjának x koordinátája:

$$x_m = \frac{m_1 \cdot 0 + m_2 l + m_3 \left(\frac{l}{2}\right)}{m_1 + m_2 + m_3}$$



A **tömegközéppont** helye általában: $(x_m, y_m, z_m) = \left(\frac{\sum_{i=1}^N m_i x_i}{\sum_{i=1}^N m_i}, \frac{\sum_{i=1}^N m_i y_i}{\sum_{i=1}^N m_i}, \frac{\sum_{i=1}^N m_i z_i}{\sum_{i=1}^N m_i} \right) =$

$$= \left(\frac{\sum_{i=1}^N m_i x_i}{m}, \frac{\sum_{i=1}^N m_i y_i}{m}, \frac{\sum_{i=1}^N m_i z_i}{m} \right) \text{ tehát: } \vec{r}_m = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{m}$$

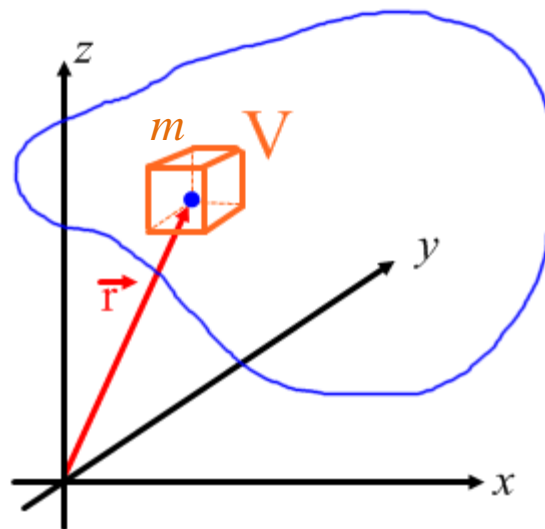
[ANIMÁCIÓ](#)
[IDEKATTINTVA!](#)

A legtöbb esetben a **súlypont** és a **tömegközéppont** helye ugyanott van, és a kettő közül bármelyik használható. Különbség a két pont helye között csak akkor van, ha a test mérete olyan nagy, hogy a gravitáció nem tekinthető a test minden pontjára ugyanolyan erősségűnek.

Folytonos tömegeloszlású test

Folytonos tömegeloszlás esetén a test minden pontjában definiálhatjuk a **sűrűséget**:

$$\rho(\vec{r}) = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{m(\vec{r}, V)}{V}$$



Ez általános esetben pontról pontra változhat.

A test tömegét a sűrűség térfogati integrálja adja (a test térfogatára integrálva):

$$m = \int_V \rho(\vec{r}) dV$$

A test tömegközéppontja (súlypontja) ekkor:

$$\vec{r}_m = \frac{\int_V \rho(\vec{r}) \vec{r} dV}{\int_V \rho(\vec{r}) dV} = \frac{\int_V \rho(\vec{r}) \vec{r} dV}{m}$$

Lendülettétel tömegpontrendszerre

Pontrendszer mozgásának vizsgálatához írjuk fel a **lendülettételt** az egyik pontra (i):

A rá ható külső erők eredője: \vec{F}_i

A j -edik pont által kifejtett erő: \vec{F}_{ji}

A dinamika alapegyenletét is felhasználva az általános (i -edik) tömegpontra:

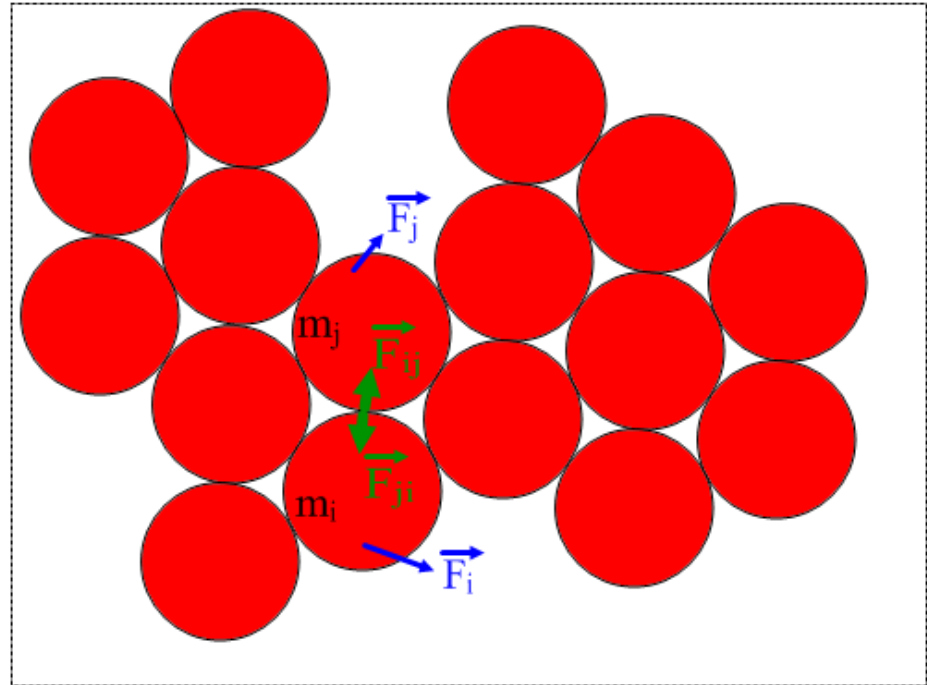
$$\frac{d}{dt}\vec{p}_i = m_i\vec{a}_i = \vec{F}_i + \sum_{j=1}^N \vec{F}_{ji}$$

Összegezve a test minden pontjára:

$$\sum_{i=1}^N \frac{d}{dt}\vec{p}_i = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \vec{F}_{ji}$$

Lendülettétel tömegpontrendszerre:

$$\frac{d}{dt}\vec{p} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i$$



A belső erők kiesnek (Newton 3. axiómája): $\vec{F}_{ji} = -\vec{F}_{ij}$

Ha a pontrendszerre ható külső erők eredője nulla, akkor a lendület állandó.

Ütközések

Ha az ütköző testek zárt rendszert alkotnak (külső erők nem hatnak rájuk), akkor az ütközés során mindig teljesül a lendületmegmaradás.

A rendszer tagjainak lendülete összesen ugyanazt adja az ütközés előtt mint után:

$$\vec{p}_{A1} + \vec{p}_{B1} + \vec{p}_{C1} + \dots = \vec{p}_{A2} + \vec{p}_{B2} + \vec{p}_{C2} + \dots$$

$$m_A \vec{v}_{A1} + m_B \vec{v}_{B1} + m_C \vec{v}_{C1} + \dots = m_A \vec{v}_{A2} + m_B \vec{v}_{B2} + m_C \vec{v}_{C2} + \dots$$

Ez általában 3 független egyenletet jelent a lendület x , y és z komponenseire.

Erre akkor van szükség ha az ütközés térben játszódik le és nem centrális

(pl. két egymáshoz vágott labda, melyek sebességvektorai nem a másik tömegközéppontjának irányába mutatnak, vagy egy szétrobbanó tűzijáték esetében is alkalmazható)

Billiárdgolyók ütközése az asztal síkjában két egyenletet eredményez.

Egyenes mentén mozgó két test centrális ütközése pedig csak egyet:

$$m_A v_{A1} + m_B v_{B1} = m_A v_{A2} + m_B v_{B2}$$

Ha ellentétes irányban halad a két test, akkor ez egyik sebesség negatív.

Extrém esetek:

Tökéletesen rugalmatlan ütközésnél a két test összetapad: $v_{A2} = v_{B2}$ és $m = m_A + m_B$

Tökéletesen rugalmas ütközésnél a kinetikus energia is megmarad:

$$\frac{1}{2} m_A v_{A1}^2 + \frac{1}{2} m_B v_{B1}^2 = \frac{1}{2} m_A v_{A2}^2 + \frac{1}{2} m_B v_{B2}^2$$

Ütközési szám

A valóságos ütközések se nem tökéletesen rugalmatlanok, se nem tökéletesen rugalmasak. Az **ütközési szám** azt mutatja meg, hogy mennyire rugalmas az ütközés. Ez a szám a távolodási sebesség és a közeledési sebesség hányadosa.

Az ütközési szám:

$$k = \frac{v_{B2} - v_{A2}}{v_{A1} - v_{B1}}$$

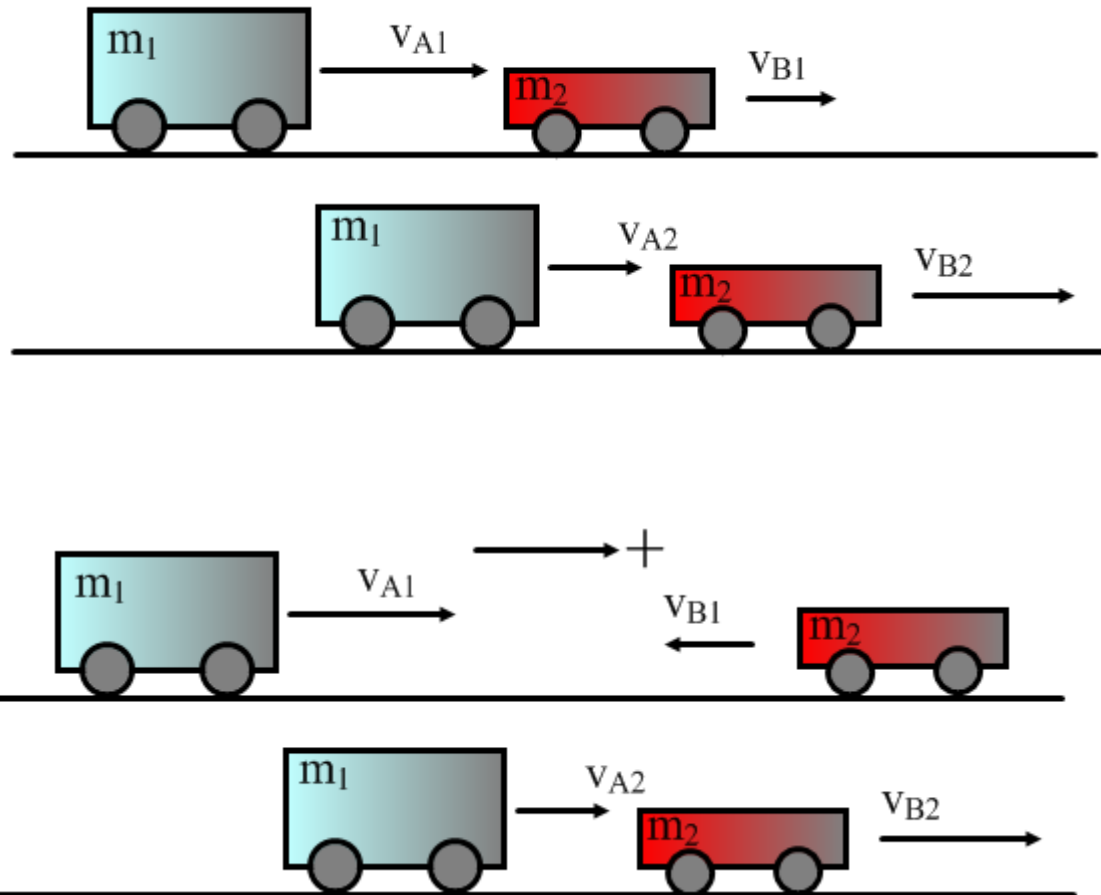
Extrém esetek:

tökéletesen rugalmatlan: $k = 0$

tökéletesen rugalmas: $k = 1$

általánosan: $0 \leq k \leq 1$

Egyszerűbb ezt használni a kinetikus energia megmaradása helyett, mert ez nem másodfokú.



[ANIMÁCIÓ IDEKATTINTVA!](#)

Tömegközépponti tétel

A lendülettételt tovább alakítva, és felhasználva a tömegközéppont/súlypont definícióját:

$$\frac{d}{dt} \vec{p} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N m_i \frac{d}{dt} \vec{r}_i = \frac{d^2}{dt^2} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i = \frac{d^2}{dt^2} (m \vec{r}_S) = m \frac{d^2}{dt^2} \vec{r}_S = m \vec{a}_S$$

A tömegközépponti tétel:

$$m \vec{a}_S = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i$$

Pontrendszer tömegközéppontja úgy mozog, mintha a rendszer összes tömege ebbe a pontba lenne egyesítve, és az összes külső erő erre a pontra hatna.

Perdületétel és munkatétel

A **perdületétel** a lendületételhez hasonlóan levezethető.

A tömegpontrendszer perdületének idő szerinti deriváltja egyenlő az eredő forgatónyomatékkal:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_e$$

A tömegpontrendszerre vonatkozó **munkatétel** azt mondja ki, hogy a rendszer kinetikus energiájának megváltozása egyenlő az összes erő (külső és belső) által a rendszeren végzett munkával:

$$W = \Delta E_K$$

A belső erők azért szerepelnek, mert a rendszer tömegpontjai közötti potenciális energia munkavégzés során átalakulhat a pontok kinetikus energiájává.

Például egy rúgó két végéhez kötött testek rezgése során, vagy a Naphoz közeledő üstökös esetében.

Tehetlenségi nyomaték

Egy tömegpontrendszer **tehetlenségi nyomatéka** az egyes tömegpontok tehetlenségi nyomatékainak összege:

$$\theta = \sum_{i=1}^N m_i r_i^2$$

Folytonos tömegeloszlás esetén az infinitezimális dV térfogatú darab tömege: ρdV

Tehetlenségi nyomatéka: $dmr^2 = \rho dV r^2$

Tehát az egész test tehetlenségi nyomatéka:

$$\theta = \int_V \rho r^2 dV$$

r a tengelytől mért távolság.

Steiner tétel: Ha tudjuk a tehetlenségi nyomatékot egy, a súlyponton átmenő tengelyre (θ_s), akkor a vele párhuzamos, tőle d távolságban lévő tengelyre a tehetlenségi nyomaték:

$$\theta_d = \theta_s + md^2$$

Merev testek mechanikája

Egy **merev test** bármely két pontjának távolsága időben állandó (nem deformálódik).

Egy merev test egyensúlyának feltételei:

- a testre ható külső erők eredője nulla és
- a külső erők bármely pontra (illetve tengelyre) vonatkozó forgatónyomatékainak eredője nulla.

Itt az egyensúly nem csak a statikus állapotot jelenti, hanem állandó sebességű mozgást és állandó szögsebességű forgást is.

Változó mozgás esetén:

Merev test mozgása tehát haladó mozgásból és forgómozgásból áll.

- A haladó mozgást (a tömegközéppont gyorsulását) a **tömegközépponti tételből** kaphatjuk meg.

$$m\vec{a}_S = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i$$

- A forgó mozgás szöggyorsulását pedig a **forgómozgás alapegyenletéből** lehet meghatározni.

$$M_e = \theta\beta$$