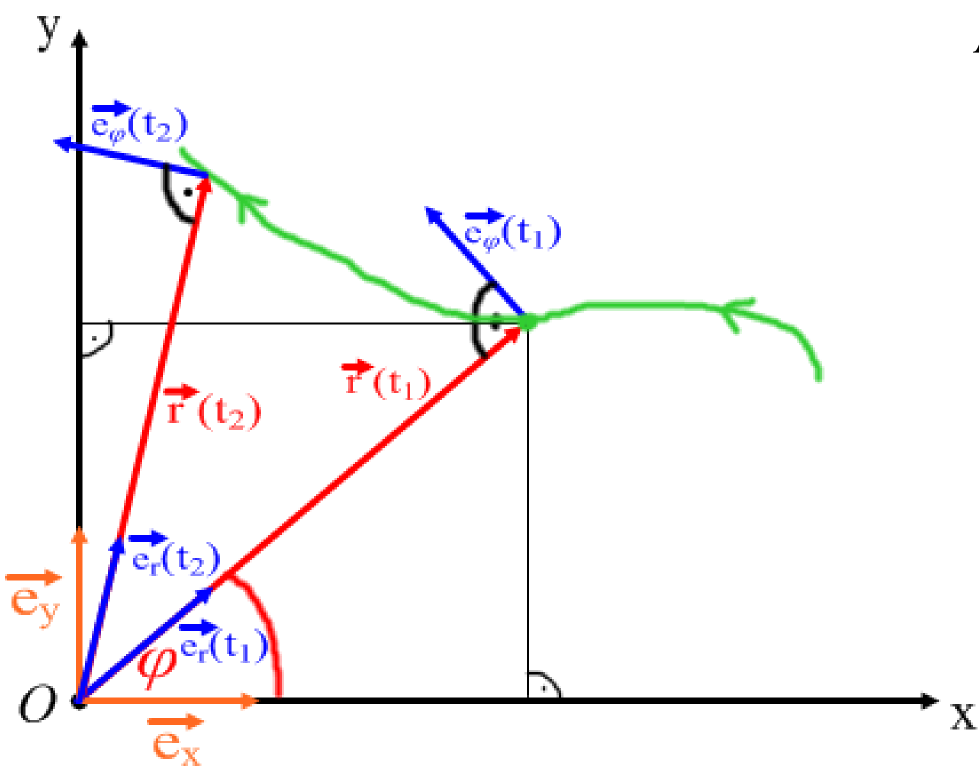
Általános mozgás leírása síkbeli polár koordináta rendszerben

Ha a mozgást a síkbeli polár koordinátarendszer bázisvektoraival akarjuk leírni, akkor figyelembe kell vennünk, hogy az $\vec{e}_r$ és $\vec{e}_\varphi$ bázisvektorok függnek a test helyétől.
Lásd ábra:



A test pillanatnyi helyzete egyszerűen:

$$\vec{r} = r\vec{e}_r$$

A sebesség számolásánál azonban az $\vec{e}_r$ bázisvektor deriváltját is meg kell határoznunk:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d(r\vec{e}_r)}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\frac{d\vec{e}_r}{dt}$$

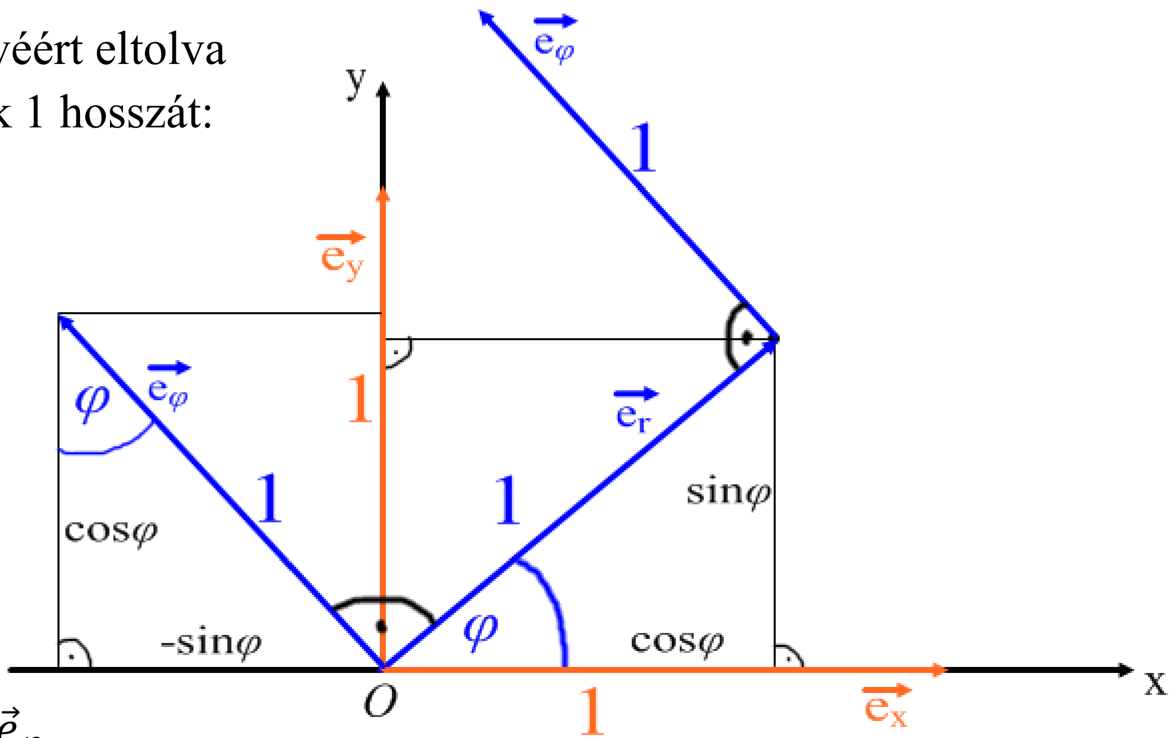
Az idő szerinti deriváltra pontot használva:

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\vec{e}}_r$$

A bázisvektorok deriváltjának meghatározásához írjuk fel azokat a fix $\vec{e}_x$ és $\vec{e}_y$ segítségével…

A bázisvektorok deriváltjai

Az $\vec{e}_\varphi$ bázisvektort a láthatóság kedvéért eltolva az origóba és jelölve a bázisvektorok 1 hosszát:



$\vec{e}_r = \cos\varphi\,\vec{e}_x + \sin\varphi\,\vec{e}_y$

$\vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\,\vec{e}_x + \cos\varphi\,\vec{e}_y$

A φ ugye szintén függ az időtől, ezért láncszabályt alkalmazva még egy $\dot{\varphi}$ szorzó bejön.

Tehát a deriváltak:

$\dot{\vec{e}}_r = -\sin\varphi\,\dot{\varphi}\vec{e}_x + \cos\varphi\,\dot{\varphi}\vec{e}_y = \dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$

$\dot{\vec{e}}_\varphi = -\cos\varphi\,\dot{\varphi}\vec{e}_x - \sin\varphi\,\dot{\varphi}\vec{e}_y = -\dot{\varphi}\vec{e}_r$

Most már fel lehet írni a sebességet és gyorsulást:

$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\vec{e}}_r = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi = \dot{r}\vec{e}_r + r\omega\vec{e}_\varphi$

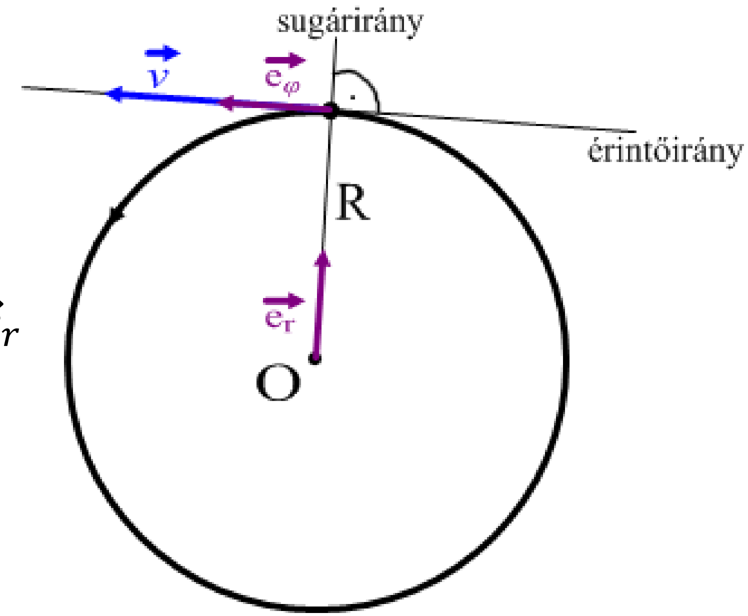
$\vec{a} = \ddot{r}\vec{e}_r + \dot{r}\dot{\vec{e}}_r + \dot{r}\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + r\ddot{\varphi}\vec{e}_\varphi + r\dot{\varphi}\dot{\vec{e}}_\varphi = \ddot{r}\vec{e}_r + \dot{r}\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \dot{r}\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + r\ddot{\varphi}\vec{e}_\varphi - r\dot{\varphi}\dot{\varphi}\vec{e}_r =$

$= (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\vec{e}_\varphi = (\ddot{r} - r\omega^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\omega + r\beta)\vec{e}_\varphi$

Egyenletes és egyenletesen változó körmozgás

Körmozgás esetén: $\dot{r} = \ddot{r} = 0$

Egyenletes körmozgásnál pedig: $\ddot{\varphi} = \beta = 0$
Továbbá: $\dot{\varphi} = \omega = \text{állandó}$ és $r = R$



$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\omega\vec{e}_\varphi = R\omega\vec{e}_\varphi = v\vec{e}_\varphi \qquad (v = \text{állandó})$$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\omega^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\omega + r\beta)\vec{e}_\varphi = -R\omega^2\vec{e}_r = -a_{cp}\vec{e}_r$$

$a_{cp} =$ állandó nagyságú centripetális gyorsuláskomponens

Egyenletesen változó körmozgásnál pedig: $\ddot{\varphi} = \beta = \text{állandó}$

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\omega\vec{e}_\varphi = R\omega\vec{e}_\varphi = v\vec{e}_\varphi \qquad (v = \text{pillanatnyi sebességnagyság})$$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\omega^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\omega + r\beta)\vec{e}_\varphi = -R\omega^2\vec{e}_r + R\beta\vec{e}_\varphi = -\frac{v^2}{R}\vec{e}_r + R\beta\vec{e}_\varphi = -a_{cp}\vec{e}_r + a_t\vec{e}_\varphi$$

$a_{cp} =$ pillanatnyi centripetális gyorsuláskomponens
$a_t =$ állandó nagyságú tangenciális gyorsuláskomponens