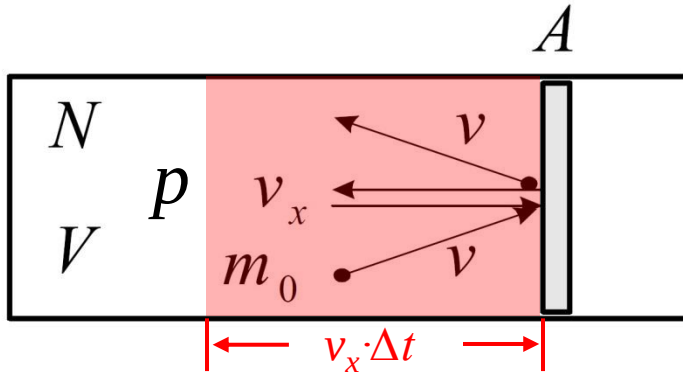


Egyatomos ideális gáz nyomása

Ideális gáz:

1. az összes részecske sajátterfogata elhanyagolható a tartály térfogatához képest
2. a részecskék közötti kölcsönhatás vonzóereje elhanyagolható
3. a rendszertelen mozgás során a részecskék a fallal és egymással ütköznek, ez utóbbi igen ritka
4. a részecskék (atomok vagy molekulák) ütközését teljesen rugalmasnak tételezzük fel

Jelen esetben vizsgáljunk **egyatomos ideális gázt** (pontoszerű golyócskák):



N : részecskék száma

V : henger térfogata

p : bezárt gáz nyomása

m_0 : részecskék (atomok) tömege

A : dugattyú keresztmetszete

v : részecske sebessége, v_x : a sebesség x komponense

- A térfogategységben lévő atomok száma: $n = N / V$
- Egy atom falra (dugattyú) merőleges lendületváltozása: $\Delta p_{ax} = 2m_0 \cdot v_x$
- Adott Δt idő alatt a $v_x \cdot \Delta t \cdot A$ térfogatból származó golyók ütközhetnek a fallal.

Az ütköző atomok száma: $n \cdot v_x \cdot \Delta t \cdot A$, tehát a teljes lendületváltozás: $\Delta p_x = 2m_0 \cdot v_x \cdot n \cdot v_x \cdot \Delta t \cdot A$

A dugattyúra kifejtett erő: $F = \frac{\Delta p_x}{\Delta t} = 2m_0 v_x^2 n A$

Tehát a nyomás: $p = \frac{F}{A} = 2m_0 v_x^2 n$

Belső energia és nyomás kapcsolata egyatomos ideális gáz esetén

A nyomásra tehát: $p = 2m_0 v_x^2 n$ (ha minden atomnak ugyanaz a v_x sebessége lenne)

A valóságban azonban a részecskék v_x^2 sebessége különböző, ezért vegyük az N részecskére vett átlagot: $\overline{v_x^2}$

Továbbá csak a részecskék egyik fele megy a dugattyú felé, a másik ellentétesen, így osztanunk kell kettővel:

$$p = m_0 \overline{v_x^2} n$$

Az atomok azonos valószínűséggel mozognak a tér mindhárom irányába, ezért:

$$\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2}$$

A teljes sebesség négyzetére tehát: $\overline{v^2} = \overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2} = 3\overline{v_x^2}$ vagyis: $\overline{v_x^2} = \frac{1}{3}\overline{v^2}$

Ezt felhasználva a nyomás: $p = m_0 \overline{v_x^2} n = m_0 \frac{1}{3} \overline{v^2} n = m_0 \frac{1}{3} \overline{v^2} \frac{N}{V} = \frac{1}{3} \frac{N}{V} 2 \frac{1}{2} m_0 \overline{v^2}$

Egy atom átlagos mozgási energiája: $\bar{\varepsilon} = \frac{1}{2} m_0 \overline{v^2}$ Teljes belső energia: $E_b = N\bar{\varepsilon}$

Beírva a belső energiát a nyomás kifejezésébe és a V térfogattal beszorozva:

$$pV = \frac{2}{3} N \frac{1}{2} m_0 \overline{v^2} = \frac{2}{3} N \bar{\varepsilon} = \frac{2}{3} E_b$$

A belső energia: $E_b = \frac{3}{2} pV$

Térfogati munka

A **térfogati munka** a környezet által a gázon (rendszeren) végzett munka, miközben annak térfogata változik.

Egy könnyen mozgó dugattyún végzett elemi munka a környezet által, miközben azt dx távolsággal beljebb nyomja: δW

A szükséges erő p nyomású gáz esetén: $F = pA$.

Tehát az elemi munkára: $\delta W = pAdx$
Mivel $Adx = -dV$

$$\delta W = -pdV$$

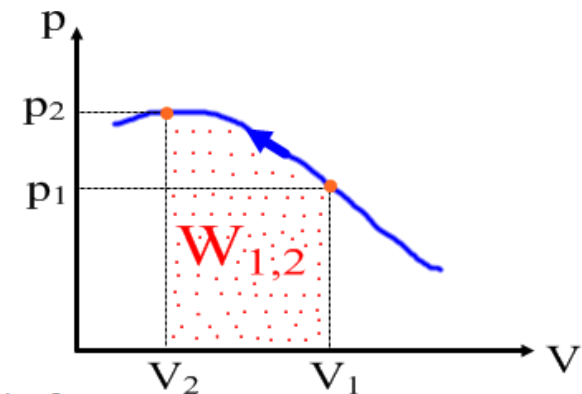
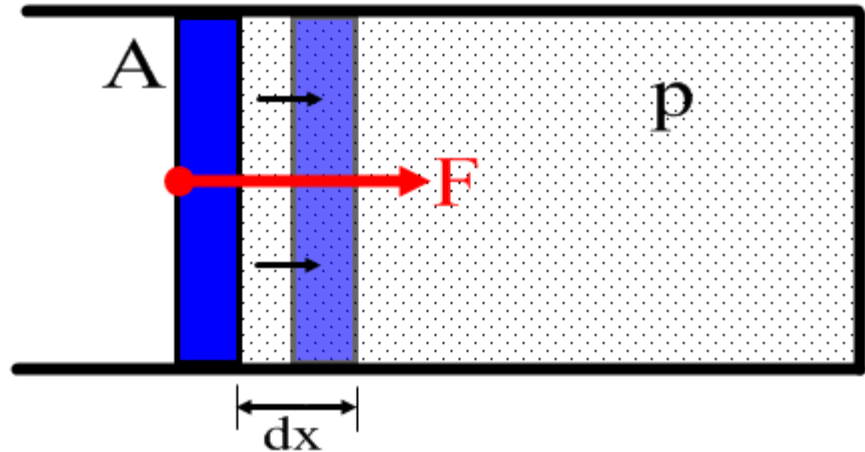
Eközben a gáz által végzett munka negatív, mert a gáz kifelé nyomja a dugattyút (az erő ellentétes az elmozdulás irányával): $\delta W_g = -\delta W$

Tágulás esetén viszont: $\delta W < 0$ és $\delta W_g > 0$

Egy véges térfogatváltozás esetén a

nyomás általában változik, ezért integrálni kell: $W_{1,2} = - \int_{V_1}^{V_2} p(V) dV$

A munkát a p - V diagramon a görbe alatti terület reprezentálja.



ha a nyomás állandó:
 $W_{1,2} = -p(V_2 - V_1)$

Hőközlés

A test belső energiája úgy is nőhet, ha egy magasabb hőmérsékletű test energiát ad neki. Ez a makroszkopikus mozgás (munkavégzés) nélkül átadott energia a **hő**.

Jele: Q (az energia amit a rendszer a környezettől kap). Mértékegysége: J (Joule)

A rendszer (test, folyadék, gáz) által a környezetnek leadott energia pedig: $Q_{le} = -Q$

Hőközlés fajtái:

- **hővezetés** (a test anyagában vagy testek között érintkezés útján - pl. főzőlap)
- **konvekció** (a közeg áramlik és ezáltal az energiát is viszi magával - pl. központi fűtés)
- **hősugárzás** (mindenféle közeg nélkül, elektromágneses hullám formájában – pl. Nap)

Hőkapacitás: A rendszer hőmérsékletének 1 fokkal emeléséhez szükséges hő:

$$Q = C \cdot \Delta T \quad \text{Mértékegysége: } [C] = \text{J/K vagy J/}^\circ\text{C}$$

A hőkapacitás a rendszer egészét jellemzi, az anyagi minőségtől és mennyiségtől is függ.

Fajhő: a rendszer egységnyi tömegű részének hőkapacitása:

$$C = c \cdot m \quad \text{vagyis} \quad Q = c \cdot m \cdot \Delta T \quad \text{Mértékegysége: } [c] = \text{J/(kg} \cdot \text{K) vagy J/(kg} \cdot ^\circ\text{C)}$$

Mólhő: a rendszer egy mólnyi részének hőkapacitása:

$$C = c_M \cdot n \quad \text{ahol } n \text{ a mólok száma vagyis } Q = c_M \cdot n \cdot \Delta T$$

$$\text{Mértékegysége: } [c_M] = \text{J/(mol} \cdot \text{K) vagy J/(mol} \cdot ^\circ\text{C)}$$

A fajhő és mólhő már csak az anyagi minőségtől függő mennyiségek!

A belső energia a rendszer egy állapotát jellemzi, míg a munka és a hő egy folyamatot.

Kalorimetria

Kalorimetria: A hőmennyiség és a fajhő mérésére szolgáló eljárás.

Kaloriméter: Egy ismert hőkapacitású hőszigetelt tartály, benne ismert hőkapacitású folyadékkal.

Eljárás alapja: A rendszerben idővel kiegyenlítődik a hőmérséklet, **termikus egyensúly** áll be.

Zárt rendszer belső energiája állandó

Ha Q_i az i -edik test által kapott hőmennyiség:

$$\sum_{i=1}^N Q_i = 0$$

Q lehet:

$cm\Delta T$ (melegedés vagy hűlés)

$-mL_e$ (égés során leadott hő)

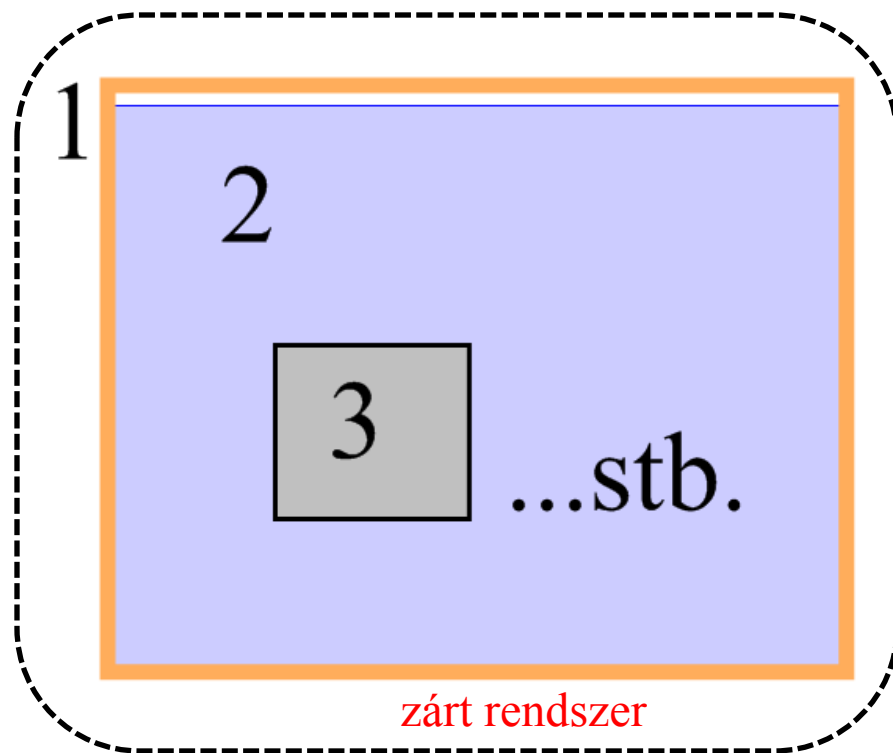
mL_o (olvadás során felvett hő)

$-mL_o$ (fagyás során leadott hő)

mL_f (forrás során felvett hő)

$-mL_f$ (lecsapódás során leadott hő)

fázisátalakulás során a hőmérséklet nem változik amíg az anyag egésze át nem alakul (olvadás- és forráspont).



Például három test esetén: $Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0$

ha nincs fázisátalakulás:

$$c_1 m_1 (T_k - T_1) + c_2 m_2 (T_k - T_2) + c_3 m_3 (T_k - T_3) = 0$$

Ha az egyik mennyiség (pl. c_3) ismeretlen, akkor az az egyenletből meghatározható.

A hőtán első főtétele

A **hőtán első főtétele** kimondja, hogy egy rendszer belső energiájának megváltozása egyenlő a **rendszerrel közölt hő** és a **rendszeren végzett munka** összegével:

$$\Delta E_b = Q + W$$

A munka a környezet által végzett térfogati munka.

A hő a környezettől kapott hő (lehet például súrlódás által disszipált mechanikai energia).

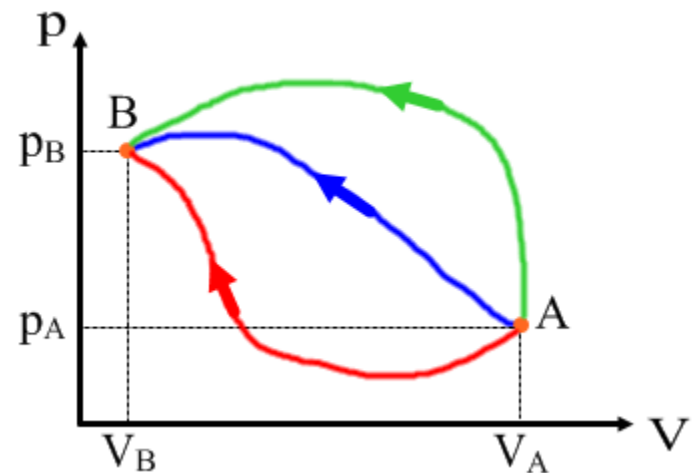
Mivel a belső energia a rendszer állapotára jellemző mennyiség, annak megváltozása egy A és B állapotok között nem függ attól, hogy milyen folyamat során történt a változás:

$$\Delta E_b = E_b(B) - E_b(A)$$

Bármilyen körfolyamat (A -ból kezdve és A -ban végződve) során természetesen:

$$\Delta E_b = E_b(A) - E_b(A) = 0$$

A tétel differenciális alakja: $dE_b = \delta Q + \delta W$



Ideális gázok állapotváltozásai

Ekvipartíció tétele

Szabadsági fokok száma: (f) – Az egymástól független energiatárolási módok.

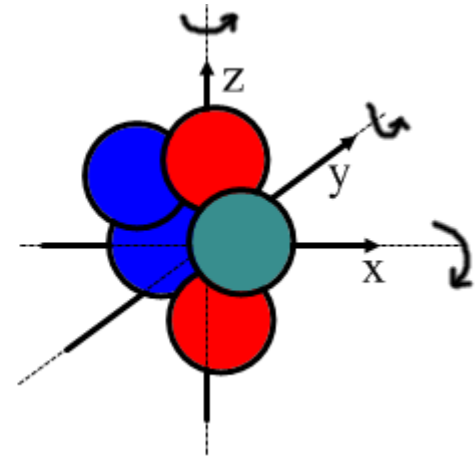
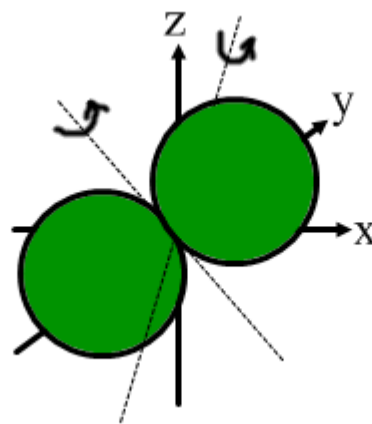
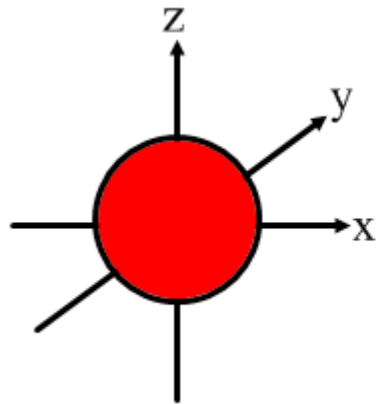
pl. mozgás x irányban, y irányban, z irányban (egyatomos gáz esetén lásd a múlt órai diák)

Tehát: $f = 3$ (egyetlen atomra). Ezek a transzlációs szabadsági fokok (x, y, z).

Kéttomos vagy egyéb lineáris geometriájú (pl. CO_2) molekulák a hossztengeleyükre merőleges két tengely körül foroghatnak is: $f = 5$. Transzlációs mellett 2 rotációs is.

Sokatomos molekulák három egymásra merőleges tengely körül foroghatnak is: $f = 6$

Energiatárolás csak azon tengely körüli forgás esetén van, amelynél a tehetetlenségi nyomaték nem elhanyagolható (mint a hosszanti tengelyre a lineáris molekuláknál).



Ekvipartíció tétele: Egyensúlyi rendszerben, egy adott hőmérsékleten minden rendelkezésre álló szabadsági fokra időátlagban jutó ε_f energia megegyezik.

Egy részecske egy szabadsági fokára: $\varepsilon_f = \frac{1}{2} kT$ $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$ (Boltzmann-állandó)

Ideális gáz belső energiája

Ha az egy szabadsági fokra jutó energia átlagban $\varepsilon_f = \frac{1}{2}kT$, akkor egy részecskére átlagban $\bar{\varepsilon} = f \cdot \varepsilon_f = f \cdot \frac{1}{2}kT = \frac{f}{2}kT$ energia jut.

Ha a rendszer N db részecskéből áll, akkor a belső energia ennek egyszerűen az N -szerese:

$$E_b = \frac{f}{2}NkT = \frac{f}{2}nRT \quad \text{ahol } n = N / N_A \text{ és } R = kN_A$$

n : a mólok száma N_A : az Avogadro-szám $R = 8,31 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$ az egyetemes gázállandó.

A belső energia tehát csak a hőmérséklettől függ (adott mennyiségű és típusú gáz esetén).

Annak a testnek magasabb a hőmérséklete, ahol az egy szabadsági fokra jutó energia több.

A belső energia megváltozása tehát: $\Delta E_b = \frac{f}{2}Nk\Delta T = \frac{f}{2}nR\Delta T$

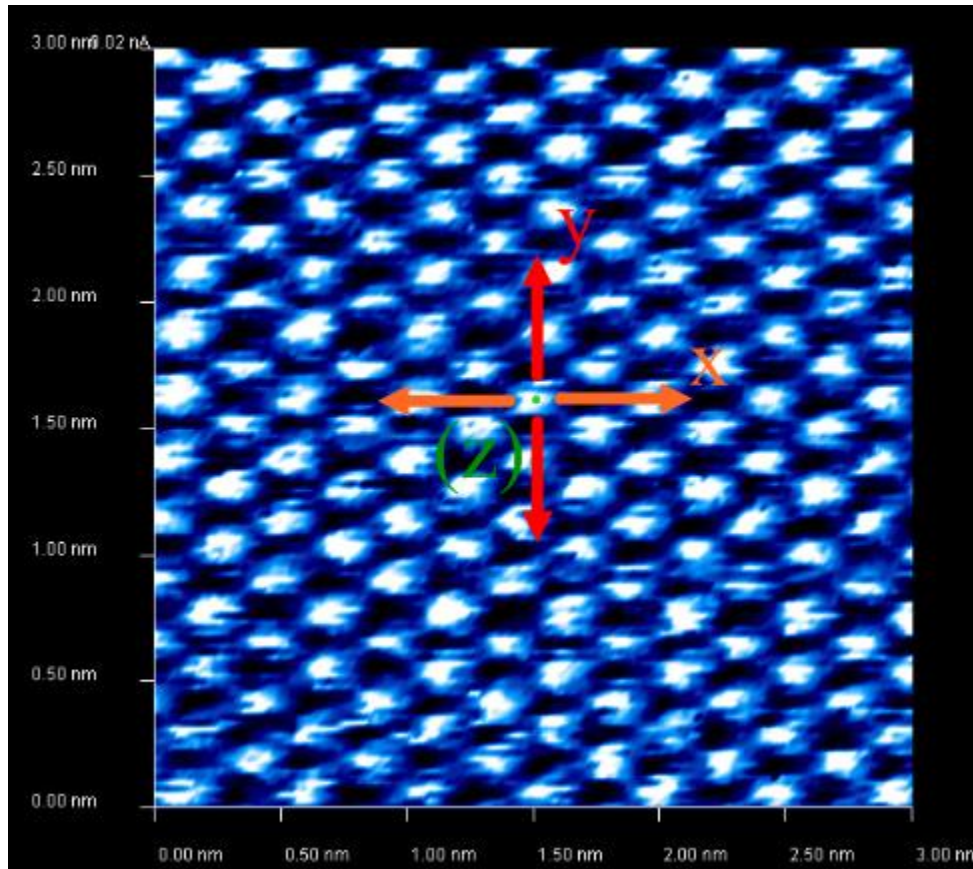
Ha visszatérünk egy pillanatra az egyatomos ideális gázokhoz, akkor kiszámíthatjuk az atomok sebességének **négyzetes középértékét** (v_{rms} vagyis „root mean square”):

$$E_b = N\bar{\varepsilon} = N\frac{3}{2}kT \quad \text{de így akkor} \quad \bar{\varepsilon} = \frac{1}{2}m_0\overline{v^2} = \frac{3}{2}kT \rightarrow \sqrt{\overline{v^2}} = v_{rms} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$$

(m_0 : egy atom tömege, M : moláris tömeg)

Dulong-Petit szabály

Szilárd testekben az atomok rezgéseket végeznek három egymásra merőleges (x, y, z) irányban. Minden irányhoz tartozik egy kinetikus és egy potenciális energia tag.



szén atomok pásztázó alagútmikroszkópos képe ($3 \text{ nm} \times 3 \text{ nm}$) grafitban

Minden atomra: $f = 6$
szabadsági fok.

Szilárd test belső energiája:

$$E_b = \frac{f}{2} NkT = 3NkT = 3nRT$$

Mivel $V = \text{áll}$, $W = 0$,
a hőtan első főtétele alapján:

$$\Delta E_b = Q + W = Q$$

$$Q = 3nR\Delta T = c_M n\Delta T$$

Dulong-Petit szabály:

a szilárd test mólhője:

$$c_M = 3R$$

Ideális gázok állapotegyenlete

A belső energiát egyatomos ideális gázokra kétféle módon is megkaptuk:

$$E_b = \frac{3}{2}NkT = \frac{3}{2}nRT \qquad E_b = \frac{3}{2}pV \qquad \rightarrow \qquad pV = NkT = nRT$$

Ez nem csak egyatomos, hanem többatomos molekulákból álló ideális gázokra is igaz, az adott ideális gáz bármely állapotában. Innen az egyenlet neve...

Állapotegyenlet: Ideális gáz minden állapotában, az állapothatározók között érvényes a következő összefüggés:

$$pV = NkT \quad \text{vagy} \quad pV = nRT$$

A belső energia tehát többféleképp írható: $E_b = \frac{f}{2}NkT = \frac{f}{2}nRT = \frac{f}{2}pV$

Abban az esetben, ha a gáz mennyisége állandó ($N = \text{állandó}$, vagy $n = \text{állandó}$), az állapotegyenletből megkapjuk az **egyesített gáztörvényt**.

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}$$

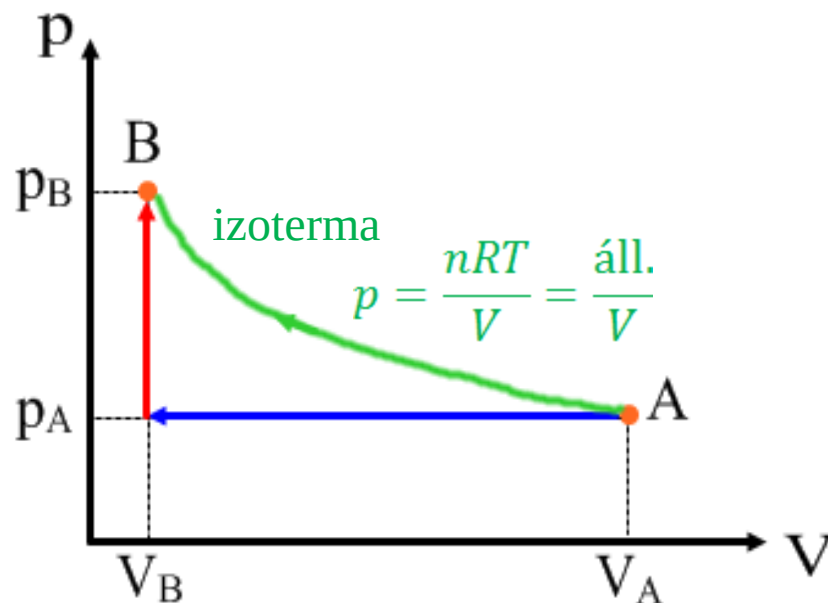
Ideális gázok speciális állapotváltozásai

Gáz mennyisége mindig adott, tehát $n = \text{áll!}$

- izobár: a nyomás is állandó ($pV = nRT$)
($V/T = \text{áll.}$ $W = -p\Delta V = -nR\Delta T$)

- izochor: a térfogat is állandó ($pV = nRT$)
($p/T = \text{áll.}$ $W = 0$)

- izoterm: a hőmérséklet is állandó ($pV = nRT$)
($pV = \text{áll.}$)



$$\delta W = -pdV$$

$$\begin{aligned} W &= - \int_{V_1}^{V_2} p dV = -nRT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = -nRT [\ln V]_{V_1}^{V_2} = \\ &= -nRT \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right) = nRT \ln \left(\frac{V_1}{V_2} \right) = p_1 V_1 \ln \left(\frac{V_1}{V_2} \right) \end{aligned}$$

- adiabatikus: a közölt hő nulla $Q = 0$ (később...)

Izobár és izochor mólhő

A belső energia megváltozása izochor folyamat esetén ($V = \text{állandó}$, így $W = 0$):

$$Q = c_{MV} n \Delta T \qquad \Delta E_b = \frac{f}{2} n R \Delta T = Q \quad \text{izochor mólhő: } c_{MV} = \frac{f}{2} R$$

A belső energia megváltozása izobár folyamat esetén:

$$\Delta E_b = \frac{f}{2} n R \Delta T = Q + W = Q - p \Delta V = Q - n R \Delta T$$

$$\frac{f}{2} n R \Delta T + n R \Delta T = Q$$

$$Q = c_{Mp} n \Delta T \qquad Q = \left(\frac{f}{2} + 1 \right) n R \Delta T \quad \text{izobár mólhő: } c_{Mp} = \left(\frac{f}{2} + 1 \right) R$$

A két mólhő hányadosa (fajhők hányadosa) az **adiabatikus kitevő**:

$$\kappa = \frac{c_{Mp}}{c_{MV}} = \frac{c_p}{c_v} = \frac{\frac{f}{2} + 1}{\frac{f}{2}} = \frac{f + 2}{f} \qquad \kappa = \frac{5}{3}, \frac{7}{5}, \frac{4}{3}$$

Adiabatikus állapotváltozás

A folyamat során a hőátadás nulla: $Q = 0 \rightarrow \Delta E_b = W$

A belső energia megváltozása: $dE_b = \delta W \rightarrow \frac{f}{2} nRdT = -pdV$

Mivel: $nRT = pV \rightarrow nRdT = pdV + dpV$

$$\frac{f}{2} (pdV + dpV) = -pdV$$

$$\frac{f}{2} pdV + p dV = -\frac{f}{2} V dp$$

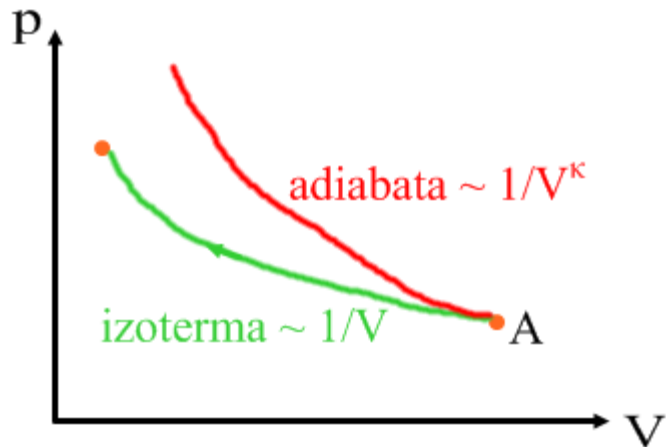
$$\left(\frac{f}{2} + 1\right) \frac{dV}{V} = -\frac{f}{2} \frac{dp}{p}$$

$$\kappa \frac{dV}{V} = -\frac{dp}{p} \rightarrow \kappa \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = -\int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{p}$$

$$\kappa \cdot [\ln V]_{V_1}^{V_2} = -[\ln p]_{p_1}^{p_2}$$

$$\kappa \cdot \ln \left(\frac{V_2}{V_1}\right) = \ln \left(\frac{p_1}{p_2}\right)$$

$$\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^\kappa = \frac{p_1}{p_2}$$



Poisson-egyenlet:

$$p_1 V_1^\kappa = p_2 V_2^\kappa$$