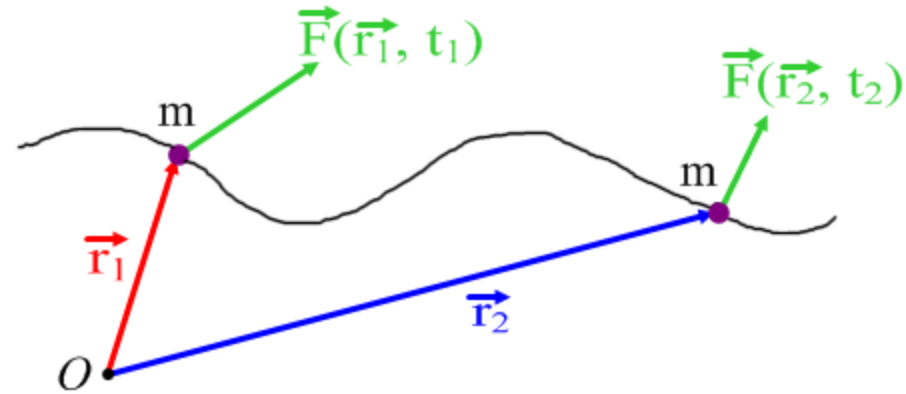


Fizikai mező (erőtér)

Fizikai mező: Fizikai mezőről akkor beszélünk, ha a tér valamely tartományában és valamely időközben, az akkor és ott jelenlévő tömegpontra erő hat és ez a helykoordináták és az idő folytonosan differenciálható függvénye.

Tehát az $\vec{r}$ és t az erő vektorfüggvény változói: $\vec{F}(\vec{r}, t)$



- Az erőter lehet időtől független (**stacionárius**), tehát $\frac{\partial \vec{F}}{\partial t} = 0$.

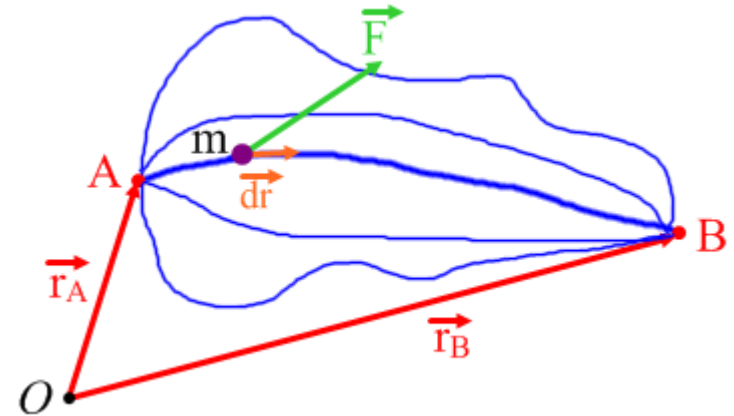
Ekkor az erő csak a helytől függ: $\vec{F}(\vec{r})$

- Az erőter lehet helytől független (**homogén**), tehát $\frac{\partial \vec{F}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{F}}{\partial y} = \frac{\partial \vec{F}}{\partial z} = 0$

Ekkor az erő csak az időtől függ: $\vec{F}(t)$

Konzervatív erőkterek

Konzervatív erőter: Olyan időtől független erőter amelyben két pont között az erőter által végzett munka független az úttól (ez ekvivalens azzal, hogy bármely zárt görbére a munka nulla).

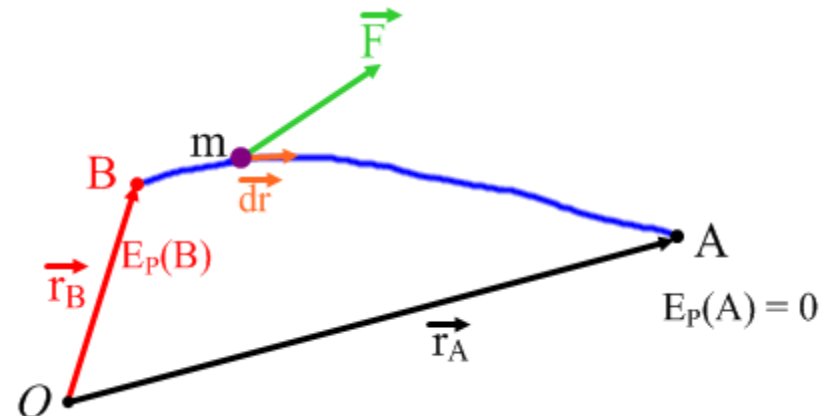


Ekkor a pontokat (pl. B) jellemezhetjük a munkával amit a tér végez amíg onnan a test egy kiválasztott nullpontba (pl. A) mozdul.

Potenciális (helyzeti) energia:

A potenciális energia egy pontban (B) egyenlő azzal a munkával amit a **tér** végez miközben a test onnan a nullpontba (A) mozdul.

$$E_P(B) = W_{BA} = \int_B^A \vec{F} \cdot d\vec{r}$$



Példa: súlyerő munkája

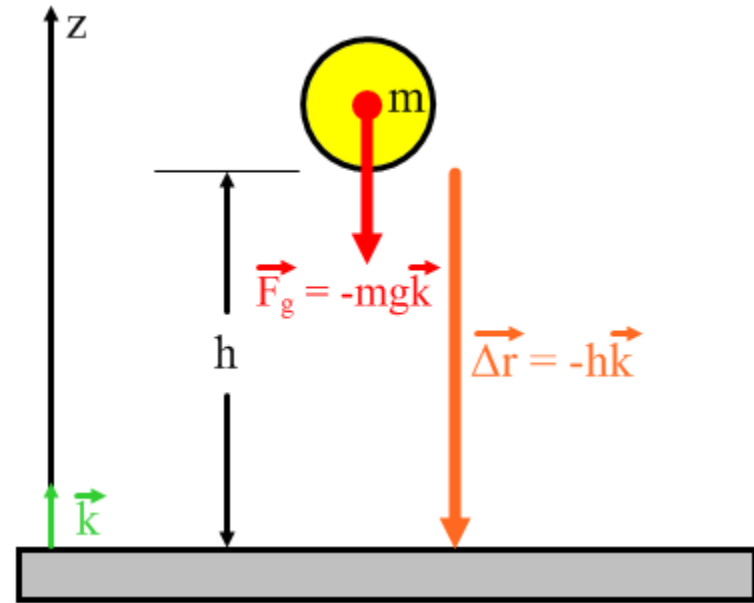
Legyen a padló szintje a potenciális energia nullpontja, és ejtsünk le egy $F_g = 20\text{N}$ súlyú testet 80m magasról.

Ekkor a súlyerő munkája (vagyis a potenciális energia 80m magasan):

$$\begin{aligned} E_P(h) &= W_{h0} = \int_{h\vec{k}}^0 \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{h\vec{k}}^0 (-mg\vec{k}) \cdot (dz\vec{k}) = \\ &= \int_h^0 -mg dz = -mg[z]_h^0 = mgh \end{aligned}$$

Természetesen ebben az egyszerű esetben használható a $W = Fs$ képlet is, tehát a $W = (mg)h = mgh$ egyből látható.

vagyis esetünkben: $W = (20\text{N})(80\text{m}) = 1600\text{J}$



Az energiaminimum elve

Nagyobb erő nagyobb potenciális energiakülönbséget jelent ugyanazon két pont között.
Megfordítva: Minél nagyobb ütemben változik a potenciális energia a hely változásával, annál nagyobb a **tér által** kifejtett erő.

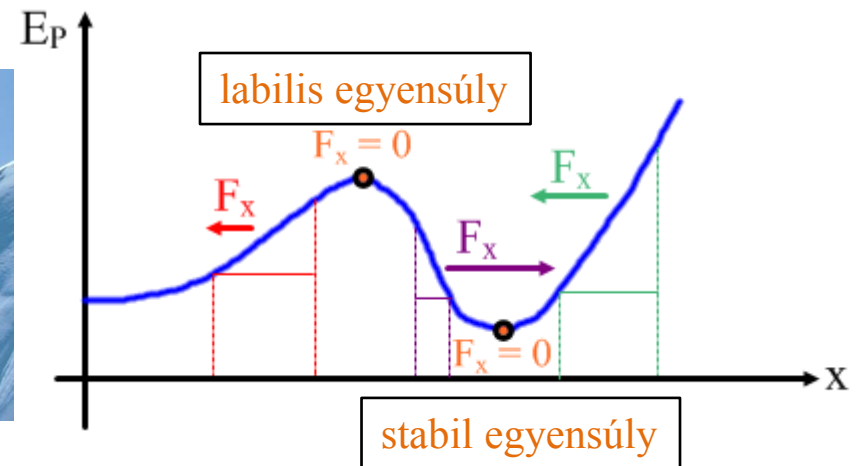
Homogén erőter esetén (illetve az átlagos erőt számolva) egy dimenzióban: $F_x = -\frac{\Delta E_P}{\Delta x}$

Általánosan egy tetszőleges pontban egy dimenzióban: $F_x = -\frac{\partial E_P}{\partial x}$

Energiaminimum elve: Az erő a csökkenő potenciális energia irányába hat (negatív jel).

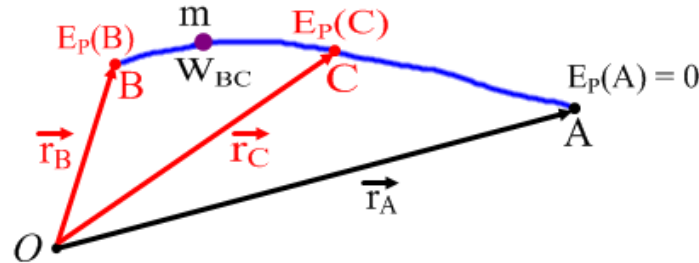
Három dimenzióban:

$$\begin{aligned}\vec{F} &= F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k} = \\ &= -\frac{\partial E_P}{\partial x} \vec{i} - \frac{\partial E_P}{\partial y} \vec{j} - \frac{\partial E_P}{\partial z} \vec{k} = \\ &= -\nabla E_P = -\text{grad} E_P\end{aligned}$$



Mechanikai energia

Vegyük azt a speciális esetet **amikor csak konzervatív erők hatnak** miközben a test B -ből C -be mozdul.



Ekkor bármely B és C pontokra: $E_p(B) - E_p(C) = W_{BC} = E_K(C) - E_K(B)$

$$-\Delta E_p = W_{BC} = \Delta E_K$$

Ennek az egyenletnek a differenciális alakja: $-dE_p = \delta W = \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = dE_K$

Tehát az **elemi munka a potenciális energia teljes differenciálja**.

Az eredeti egyenletet átrendezve: $E_p(B) + E_K(B) = E_p(C) + E_K(C)$

A potenciális és a kinetikus energia összege **minden pontban megegyezik**.

Vezessük be a **mechanikai energiát**, mely a kinetikus és potenciális energiák összege:

$$E_M = E_p + E_K$$

Ez a mechanikai energia konzervatív erőterben megmarad: $E_M(B) = E_M(C)$

Nem konzervatív erők munkája

Amikor **nem konzervatív** erők (*nk*) is hatnak (pl. súrlódás, közegellenállás, emberi munka) a tömegpontra:

$$W_{BC} = W_{BC}^k + W_{BC}^{nk} = E_K(C) - E_K(B)$$

Ahol: $W_{BC}^k = E_P(B) - E_P(C)$ a konzervatív erő munkája.

Átrendezve a nem konzervatív erők munkájára, és behelyettesítve:

$$W_{BC}^{nk} = E_K(C) - E_K(B) - E_P(B) + E_P(C)$$

$$W_{BC}^{nk} = E_K(C) + E_P(C) - E_P(B) - E_K(B)$$

Mivel: $E_K(C) + E_P(C) = E_M(C)$ és $E_P(B) + E_K(B) = E_M(B)$

$$W_{BC}^{nk} = E_M(C) - E_M(B)$$

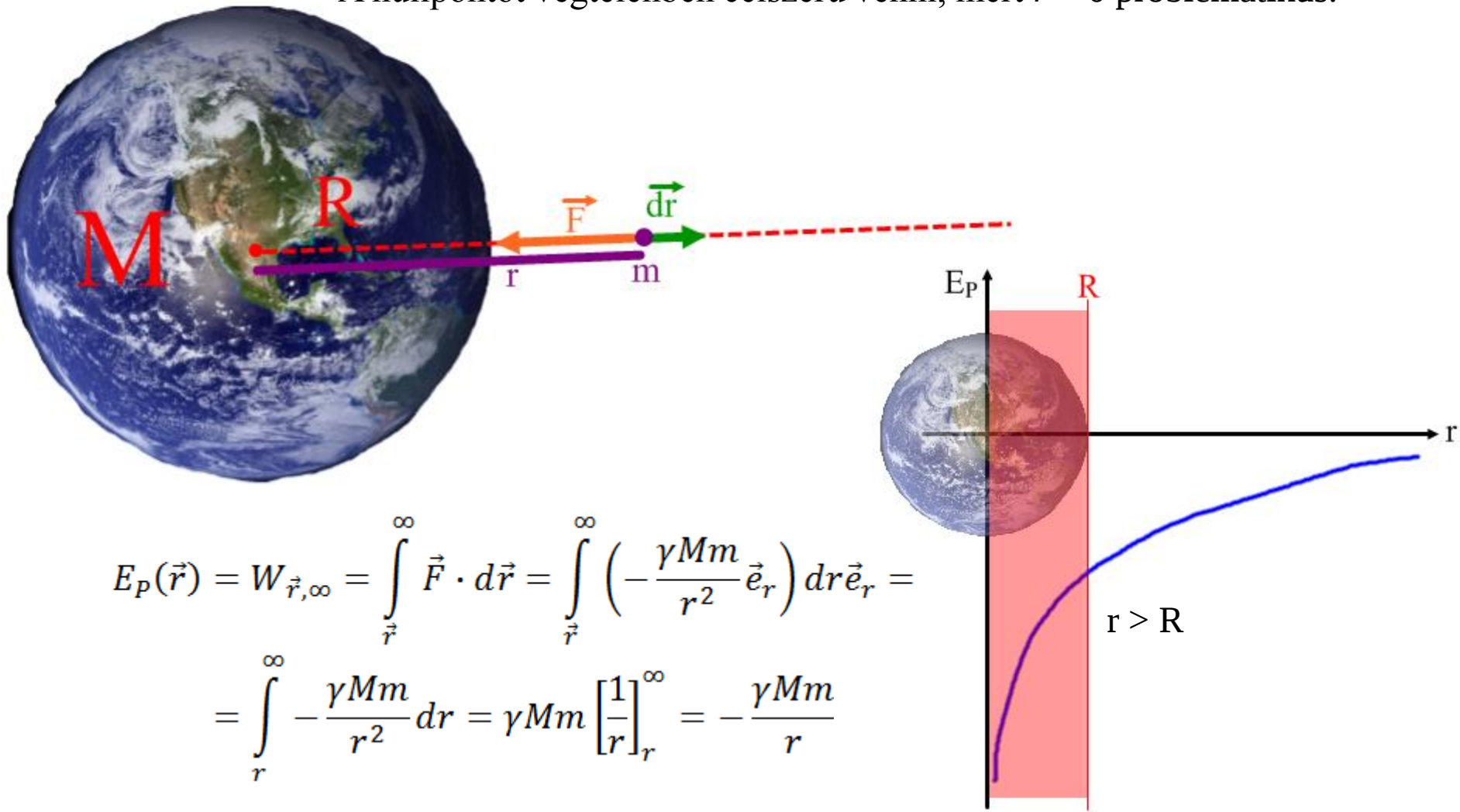
Tehát a nem konzervatív erők munkája egyenlő a mechanikai energia megváltozásával.

Példák konzervatív erőterekre

Potenciális energia Newton-féle gravitációs mezőben

Legyen a M tömegű test rögzítve, és tőle r távolságban kiszámoljuk a m tömegű test potenciális energiáját. Az erő sugárirányú, ezért célszerű sugárirányú pályát venni.

A nullpontot végtelenben célszerű venni, mert $r = 0$ problematikus.



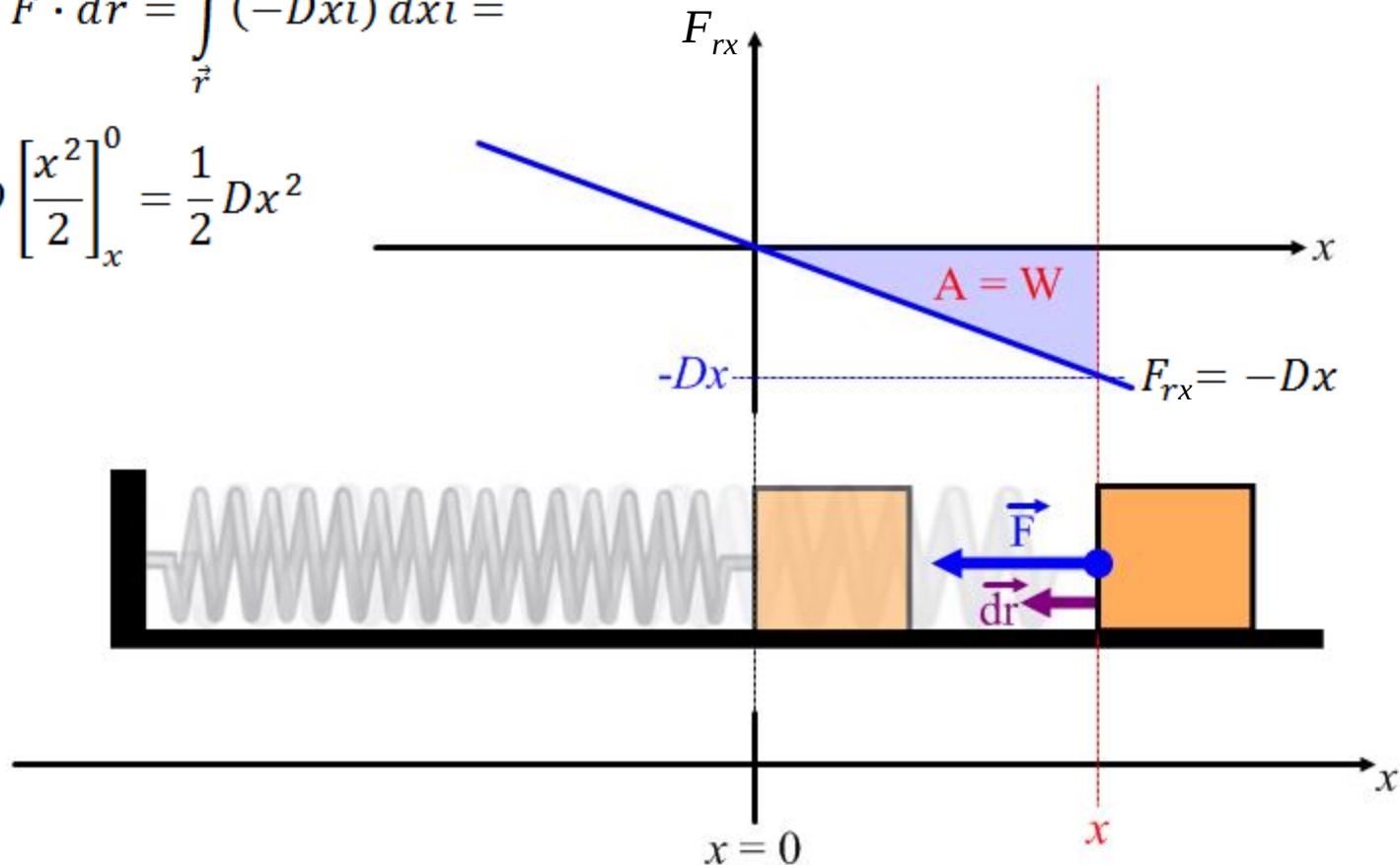
$$\begin{aligned} E_P(\vec{r}) &= W_{\vec{r}, \infty} = \int_{\vec{r}}^{\infty} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}}^{\infty} \left(-\frac{\gamma M m}{r^2} \vec{e}_r \right) dr \vec{e}_r = \\ &= \int_r^{\infty} -\frac{\gamma M m}{r^2} dr = \gamma M m \left[\frac{1}{r} \right]_r^{\infty} = -\frac{\gamma M m}{r} \end{aligned}$$

Rugóerő potenciális energiája

A Hooke-törvény értelmében az erő lineáris függvénye a hosszváltozásnak.
Ez konzervatív erőteret eredményez.

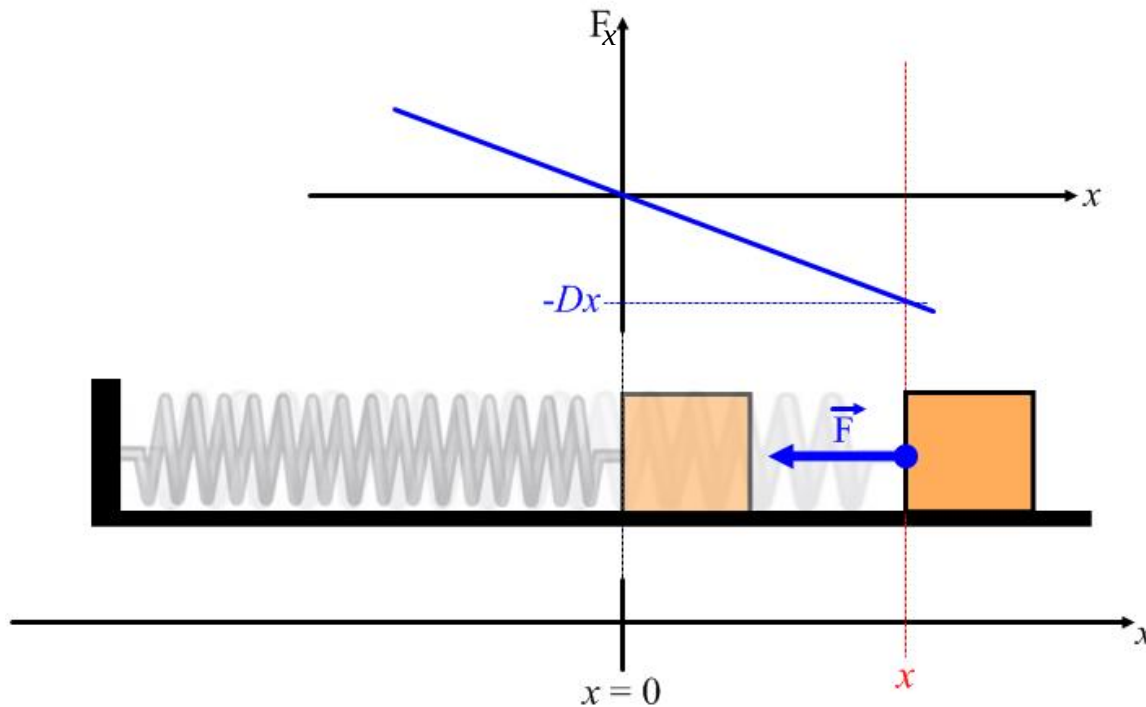
Az x hosszal megnyújtott rúgó potenciális energiája:

$$\begin{aligned} E_P(x) &= W_{\vec{r},0} = \int_{\vec{r}}^0 \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}}^0 (-Dx\vec{i}) dx\vec{i} = \\ &= \int_x^0 -Dx dx = -D \left[\frac{x^2}{2} \right]_x^0 = \frac{1}{2} Dx^2 \end{aligned}$$



Harmonikus rezgőmozgás mozgásegyenlete

Harmónikus rezgés: Feltétele, hogy a testre ható erő harmonikus legyen: $F_x = -Dx$ (Hooke-törvény). Tehát pl. egy rúgóhoz rögzített test (ha minden más erő elhanyagolható vagy kiejti egymást, esetleg konstans, mint pl. a súlyerő).



Felírva a mozgásegyenletet:

$$ma_x = -Dx$$

$$m\ddot{x} = -Dx$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{D}{m}x$$

Általános megoldás
(mozgástörvény):

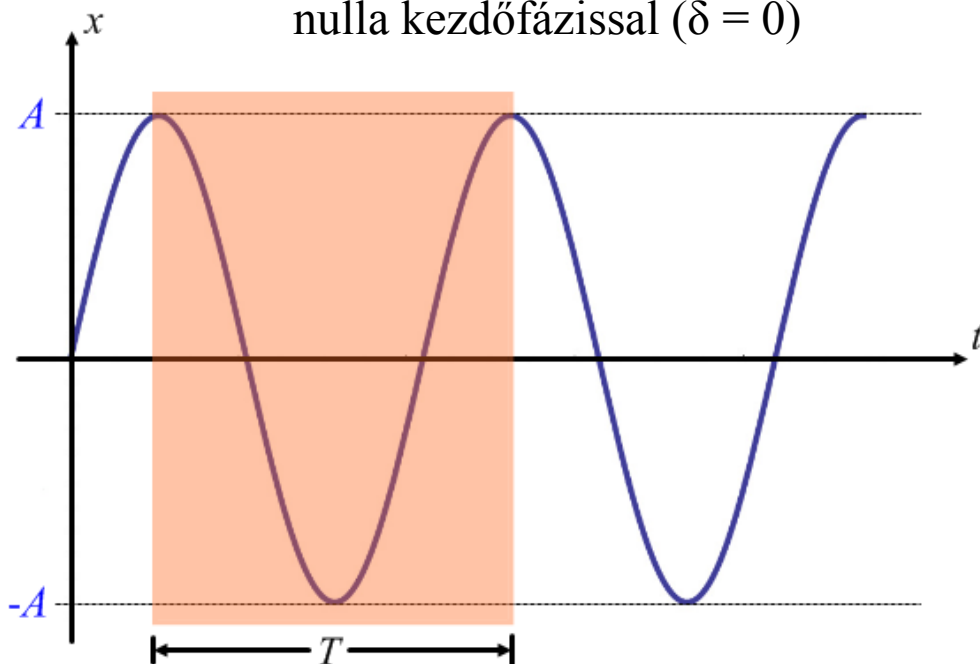
$$x(t) = A\sin(\omega t + \delta)$$

kezdeti feltételek határozzák meg őket { A : amplitúdó (maximális kitérés)
 δ : kezdőfázis

ω : körfrekvencia (lásd később)

Harmonikus rezgőmozgás mozgástörvénye

Szinuszos harmonikus rezgőmozgás,
nulla kezdőfázissal ($\delta = 0$)



$$x(t) = x(t + T)$$

$$\omega(t + T) = \omega t + 2\pi$$

$$\omega T = 2\pi$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \text{körfrekvencia}$$

$$\omega = 2\pi f$$

A kitérés-idő függvény:

$$x(t) = A \sin(\omega t + \delta)$$

Ezt deriválva kapjuk a
sebességet:

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt} = A\omega \cos(\omega t + \delta)$$

A sebesség deriváltja pedig a
gyorsulás:

$$a_x(t) = \frac{dv_x}{dt} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \delta)$$

Felhasználhatjuk: $x(t) = A \sin(\omega t + \delta)$

Tehát a gyorsulásra: $a_x(t) = -\omega^2 x$

Mozgásegyenletben volt: $a_x = -\frac{D}{m}x$

$$\text{Tehát: } \omega^2 = \frac{D}{m}$$

Kinetikus és potenciális energia

Kinetikus energia: A sebesség-idő függvényt felhasználva ($\delta = 0$)

$$E_K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\cos^2(\omega t) = \frac{1}{2}DA^2\cos^2(\omega t)$$

Potenciális energia: A kitérés-idő függvényt felhasználva ($\delta = 0$) – rugalmas erőter

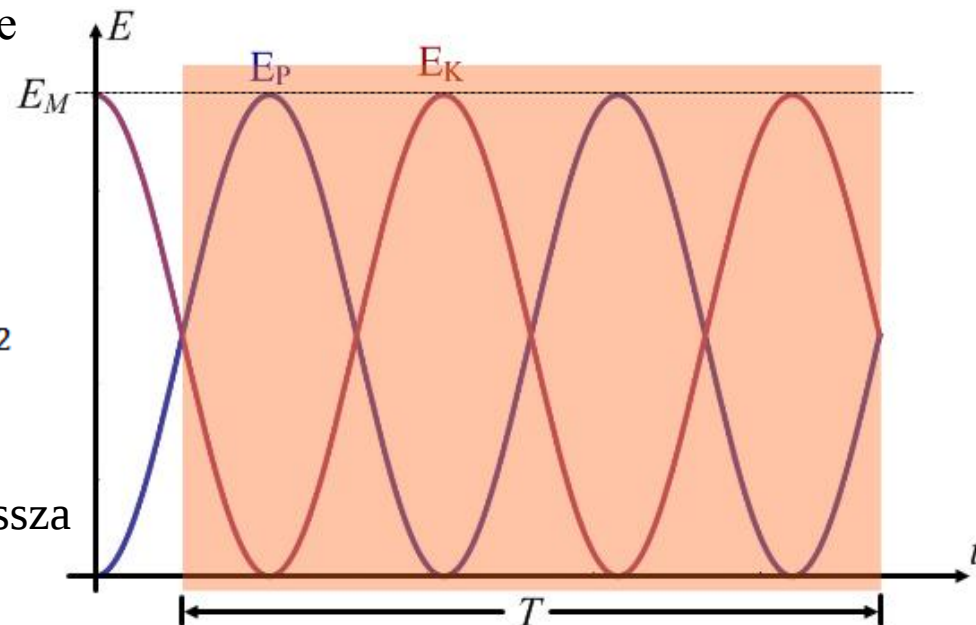
$$E_P = \frac{1}{2}Dx^2 = \frac{1}{2}DA^2\sin^2(\omega t)$$

Mechanikai energia:

A potenciális és a kinetikus energia összege

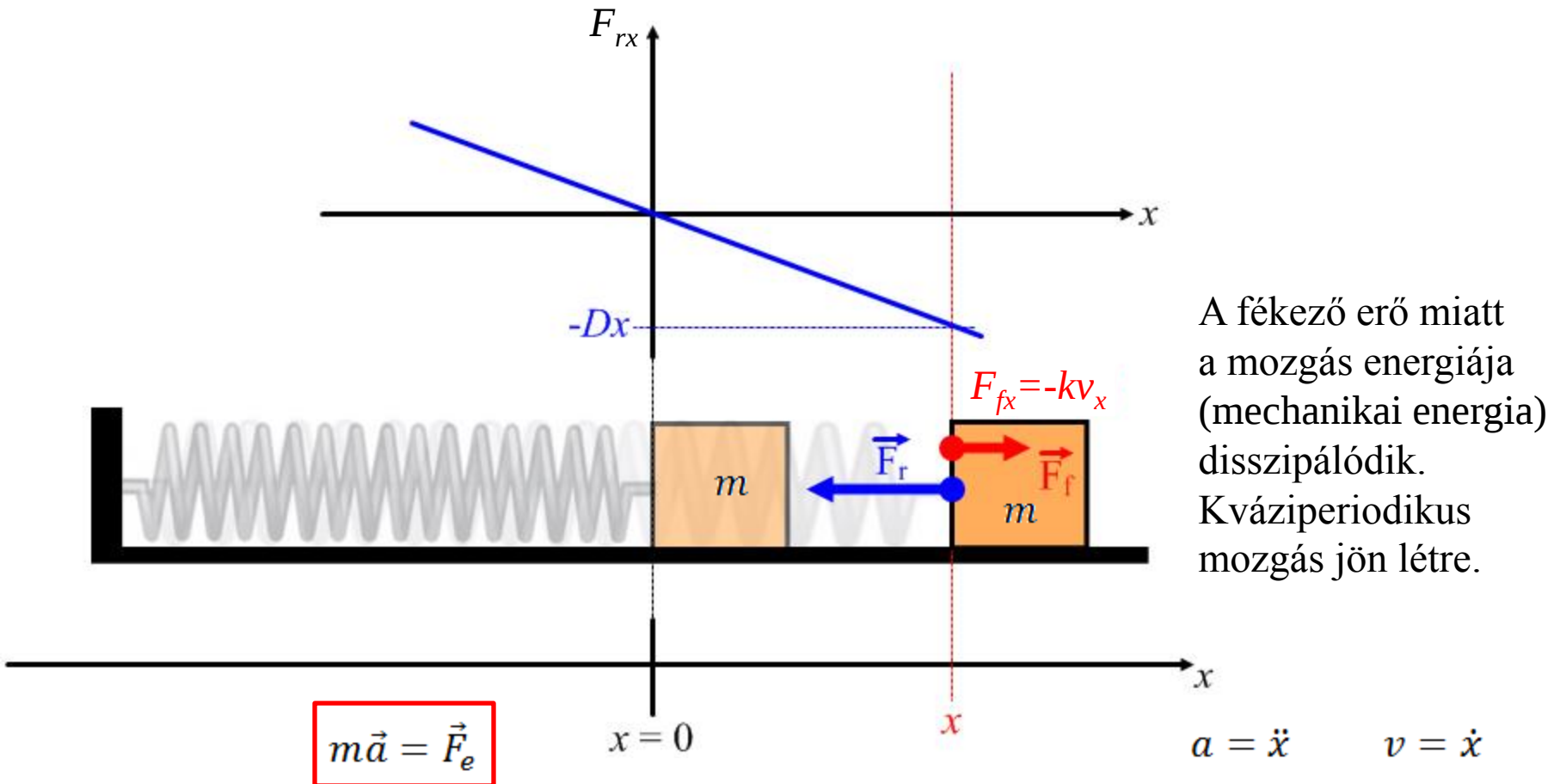
$$\begin{aligned} E_M &= E_K + E_P \\ &= \frac{1}{2}DA^2\cos^2(\omega t) + \frac{1}{2}DA^2\sin^2(\omega t) \\ &= \frac{1}{2}DA^2[\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t)] = \frac{1}{2}DA^2 \end{aligned}$$

A potenciális és a kinetikus energia oda-vissza egymásba alakul a mozgás során.



Csillapított rezgés

Csillapított rezgés: A valóságban a rezgések lassan vagy gyorsan, de csillapodnak. A rugalmas erőn kívül, még egy sebességgel arányos fékező erőt figyelembe véve:



A mozgásegyenlet (egyenes vonalú mozgás x mentén): $m\ddot{x} = -Dx - k\dot{x}$

Csillapított rezgés mozgástörvénye

Kiindulva a mozgásegyenletből : $m\ddot{x} = -Dx - k\dot{x}$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}\dot{x} + \frac{D}{m}x = 0 \quad \frac{D}{m} = \omega_0^2 \quad \omega_0 - \text{a csillapítatlan rezgés körfrekvenciája (lenne!)}$$

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad \alpha = \frac{k}{2m} \quad \alpha - \text{a csillapítási tényező}$$

Homogén, lineáris, másodrendű differenciálegyenlet. Megoldás exponenciális: $x = e^{\lambda t}$

Behelyettesítve: $\lambda^2 e^{\lambda t} + 2\alpha\lambda e^{\lambda t} + \omega_0^2 e^{\lambda t} = 0$ és $e^{\lambda t} \neq 0$

Egyszerűsítve kapjuk a karakterisztikus egyenletet: $\lambda^2 + 2\alpha\lambda + \omega_0^2 = 0$

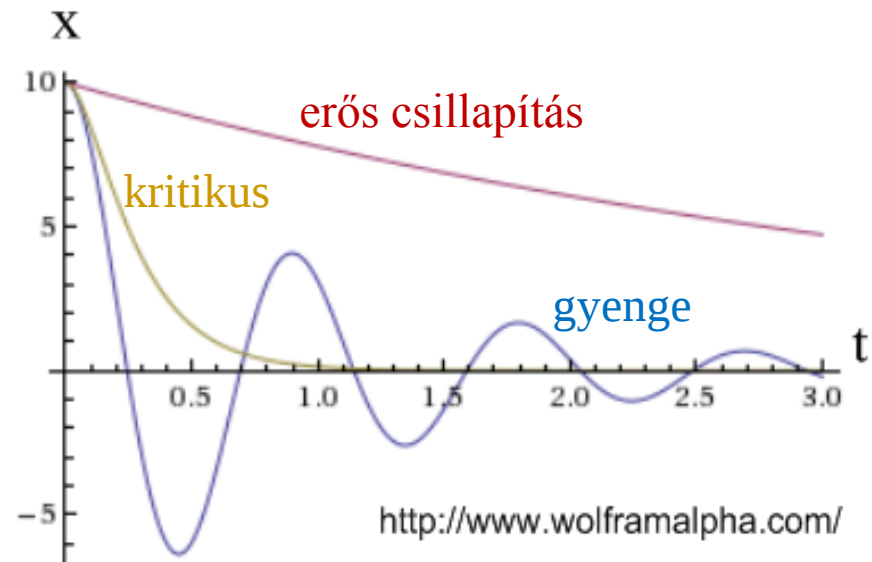
Megoldásai: $\lambda_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$

Három lehetséges eset

1. gyenge csillapítás: $\alpha^2 - \omega_0^2 < 0$

2. kritikus csillapítás: $\alpha^2 - \omega_0^2 = 0$

3. erős csillapítás: $\alpha^2 - \omega_0^2 > 0$



Gyengén csillapított rezgés

$$\alpha^2 - \omega_0^2 < 0$$

A negatív diszkriminánst átalakítva:

$$\lambda_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -\alpha \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = -\alpha \pm i\omega$$

A differenciálegyenlet általános megoldása:

$$x(t) = Ce^{-\alpha t} \sin(\omega t + \delta)$$

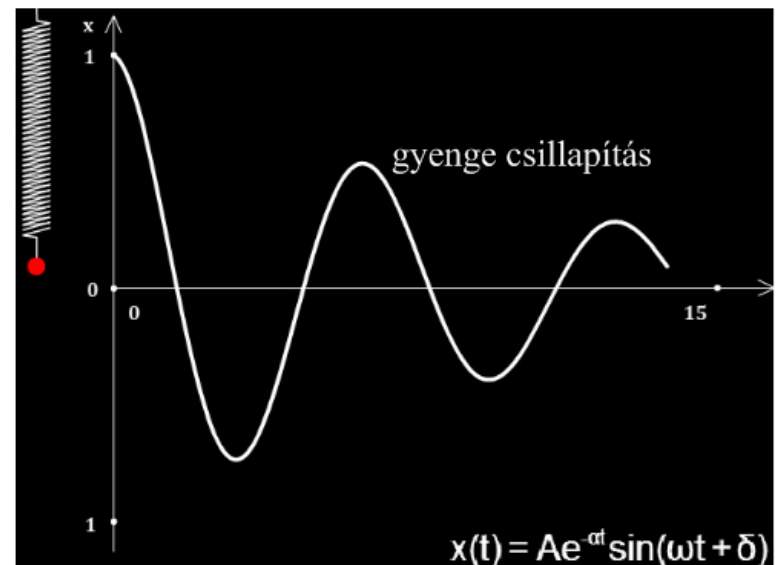
Ezt deriválva kapjuk a sebesség általános alakját:

$$v(t) = -\alpha C e^{-\alpha t} \sin(\omega t + \delta) + \omega C e^{-\alpha t} \cos(\omega t + \delta)$$

A C és δ konstansokat a **határfeltételekből** lehet meghatározni.

Pl. $x(0)$ és $v(0)$ megadható, és a két egyenletet megoldva a konstansok kiszámolhatók.

[ANIMÁCIÓ IDEKATTINTVA!](#)



Kényszerrezgés

Egy periodikus erő pótolja a disszipált energiát:

$$m\ddot{x} = -Dx - k\dot{x} + F_0\sin(\omega t)$$

Megoldás: egy időben lecsengő (előzőhöz hasonlóan) rezgés, és egy állandósuló rezgés a gerjesztő frekvencián.

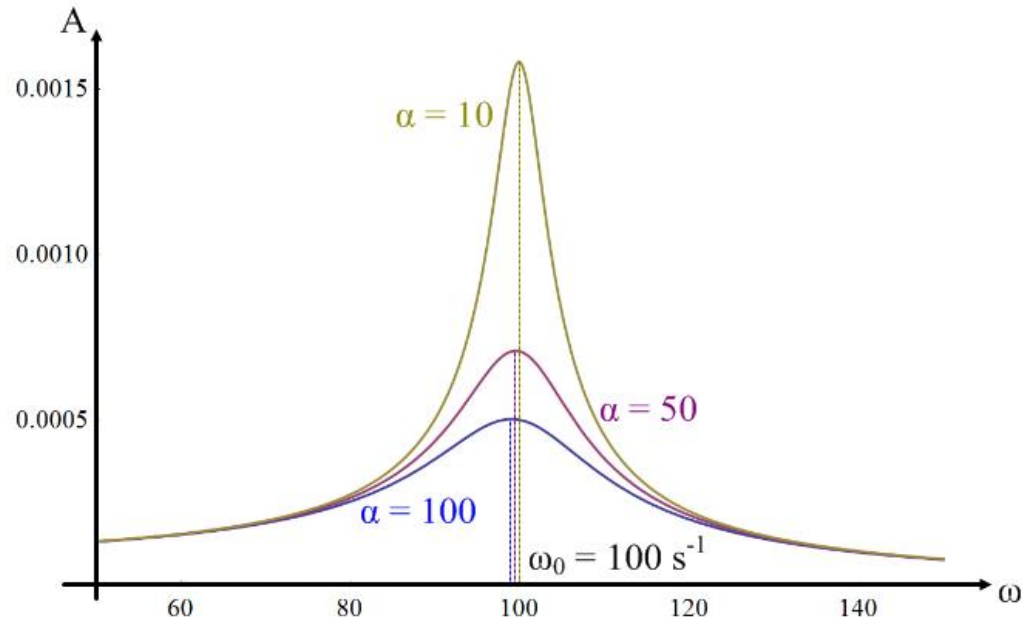
Tehát hosszabb idő múlva a mozgástörvény:

$$x(t) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}} \sin(\omega t - \delta)$$

$$\frac{D}{m} = \omega_0^2 \quad \omega_0 - \text{sajátfrekvencia}$$
$$\delta - \text{fáziskésés}$$

Rezonancia: Az az ω_r körfrekvencia, amire a rezgés amplitúdója a lehető legnagyobb.

Ha a csillapítás gyenge (α kicsi), akkor $\omega_r \approx \omega_0$ és az amplitúdó minden határon túl nőhet (amíg a rendszer szét nem esik...) – rezonancia katasztrófa.



Hullámok

Hullámok akkor jönnek létre amikor egy rugalmas közegben a közeg egy részének rezgése tovaterjed a közegben, azáltal, hogy a szomszédos pontok is átveszik a rezgést.

Pl. gitárhúr (1D), víz felülete (2D), hang vagy fény (3D)

A tovaterjedés sebessége a hullám **fázissebessége** (c).

Ez határozza meg milyen időközés van a két távoli pont rezgése között.

Tekintsünk egy x irányban terjedő síkhullámot
(vagy egy 1 dimenziós húron terjedő hullámot).

A rezgés az $x = 0$ helyen a szokásos harmonikus függvény: $y(t) = A \sin(\omega t)$

Ehhez képest az x helyen a rezgés x/c idővel késik:

$$\begin{aligned} y(x, t) &= A \sin \left[\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right] = A \sin \left(\omega t - \frac{\omega x}{c} \right) \\ &= A \sin \left(\omega t - \frac{2\pi x}{Tc} \right) = A \sin \left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda} \right) = A \sin(\omega t - kx) \end{aligned}$$

T : a rezgés **periódusideje** ω : a rezgés **körfrekvenciája** $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$

λ : a **hullámhossz** (periódusidő alatt megtett út) $\lambda = Tc$

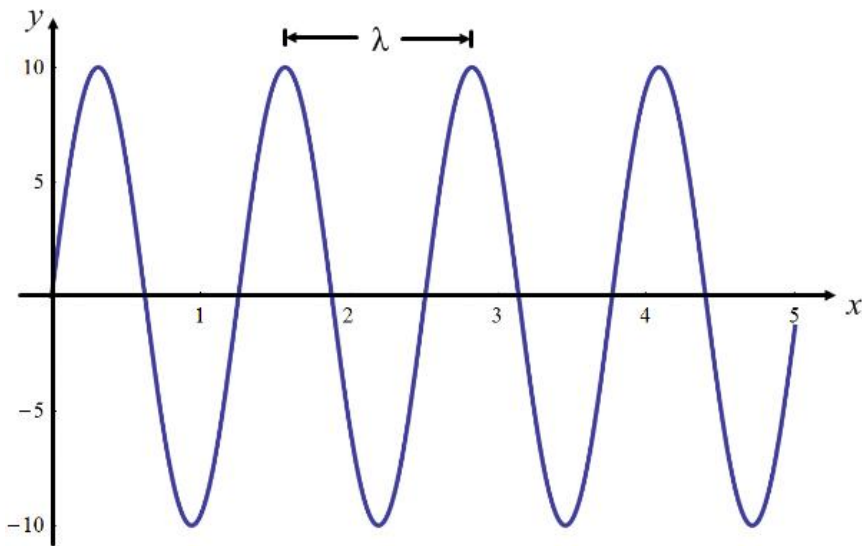
k : **körhullámszám** $k = 2\pi/\lambda$

Mivel: $T = 1/f$ ezért $c = \lambda f$

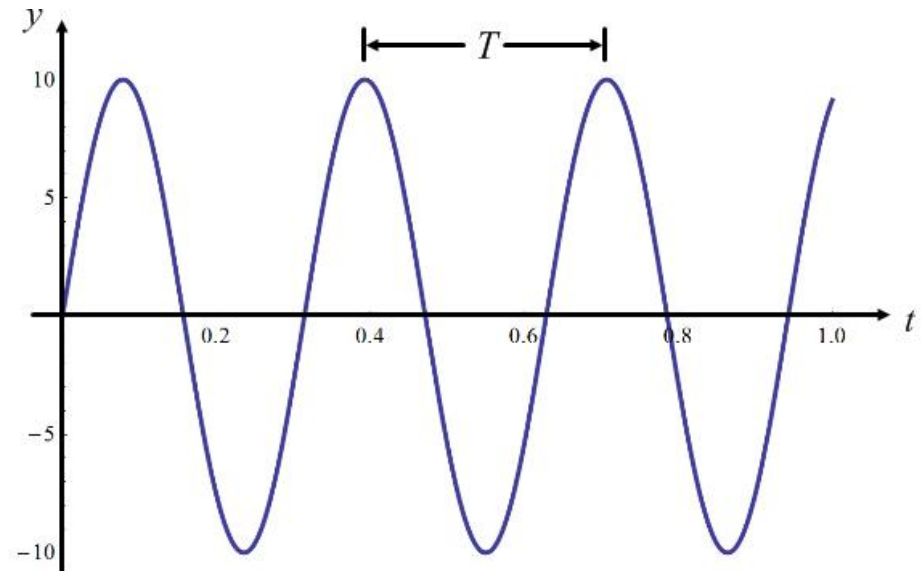


Hullámok: hely és időfüggés

A hullám esetében a hely és időfüggés is periodikus függvény: $y(x, t) = A \sin(\omega t - kx)$

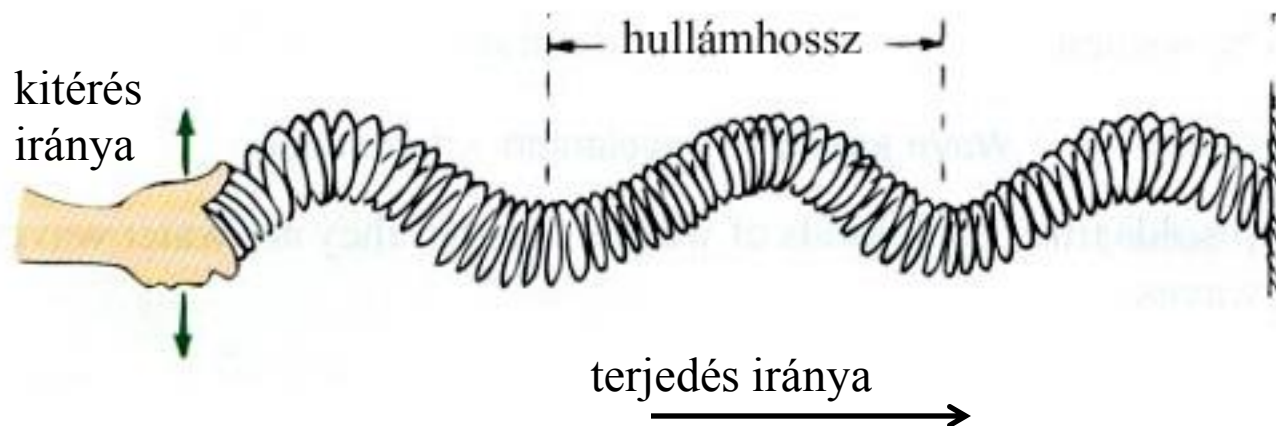


A térbeli periodicitás a hullámhossz
(adott időbeli pillanatkép)

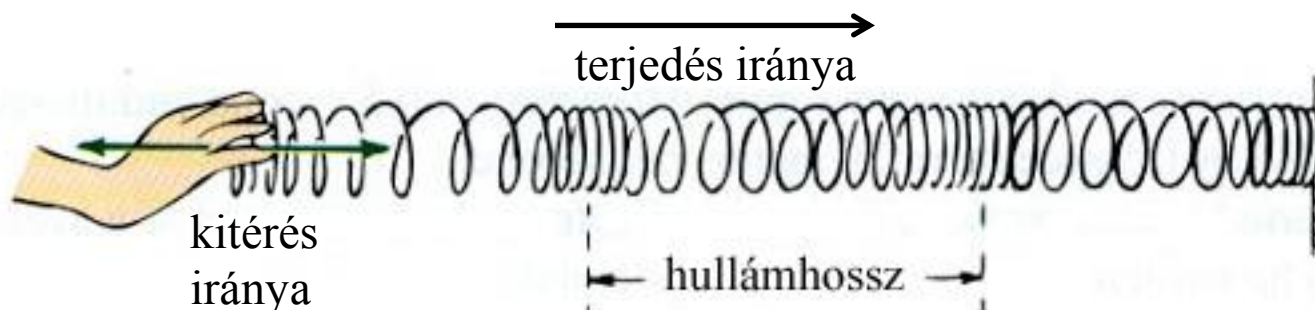


Az időbeli periodicitás a periódusidő
(adott helyen vizsgált rezgés időfüggése)

Transzverzális és longitudinális hullámok



transzverzális hullám:
a kitérés merőleges
a terjedési irányra



longitudinális hullám:
a kitérés párhuzamos
a terjedési irányjal

a hang is
longitudinális
hullám
(20Hz – 20kHz)

