

Dinamika

A dinamika feladata a test(ek) gyorsulását okozó erők matematikai leírása.

Az erők kölcsönhatások során lépnek fel.

Ezek a kölcsönhatások lehetnek:

- test és test között
- mező(erőtér) és test között

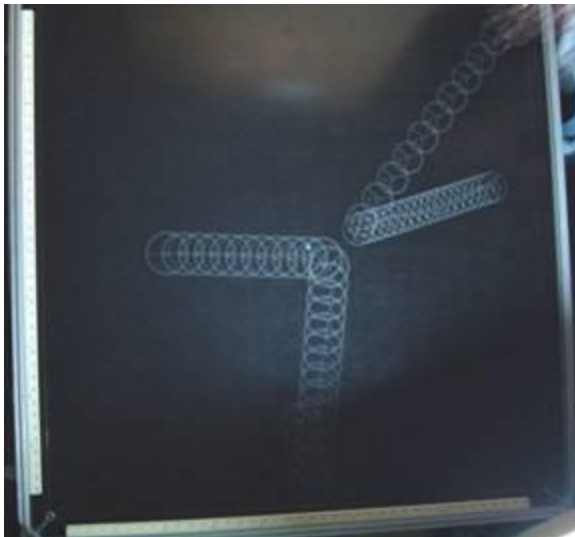
A magára hagyott test egy olyan test, amely nem áll kölcsönhatásban sem más testtel, sem pedig mezővel.

Newton törvényei: I.

Newton I. törvénye: Minden nyugalomban lévő test megtartja nyugalmi állapotát, minden mozgó test pedig egyenes vonalú egyenletes mozgását mindaddig, amíg egy másik test vagy mező annak megváltoztatására nem kényszeríti.

Ugyanez kicsit pontosabban megfogalmazva:

Kiválasztási axióma: Létezik olyan vonatkoztatási rendszer amelyben a magára hagyott testek megtartják eredeti mozgásállapotukat (azaz a sebesség vektor állandó). Az ilyen rendszereket **inerciarendszereknek** nevezzük.



A légpárnás asztalon mozgó korong jó közelítéssel egy magára hagyott testnek számít.

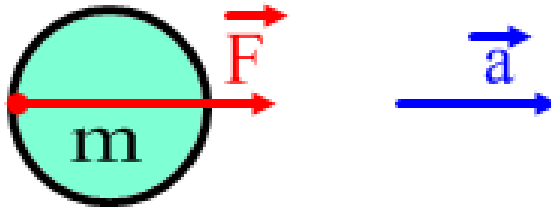
Mozgása az asztalhoz (Föld felszínéhez) képest jó közelítéssel egyenes vonalú egyenletes, tehát a Föld felszínéhez rögzített rendszer jó közelítéssel (mindennapi élet történéseire) inerciarendszer.

Newton törvényei: II.

Ha egy pontszerű testre erő hat az megváltoztatja annak mozgásállapotát (a sebesség vektort). Ekkor a test gyorsul (a gyorsulás vektor nem nulla).

Newton II. törvénye: Egy állandó tömegű pontszerű test gyorsulása arányos a testre ható erővel és ellentétesen arányos a test tömegével. A gyorsulás a testre ható erő irányába mutat.

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$



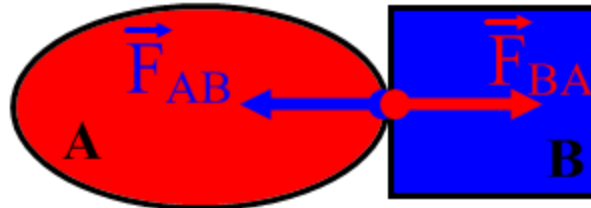
Newton törvényei: III.

Newton III. törvénye: (Hatás-ellenhatás törvénye)

Ha az A test a B testre $\vec{F}_{BA}$ erőt fejt ki, akkor a B test is erőt fejt ki az A testre.

Ez az $\vec{F}_{AB}$ erő azonos nagyságú, de ellentétes irányú az $\vec{F}_{BA}$ erővel.

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$$

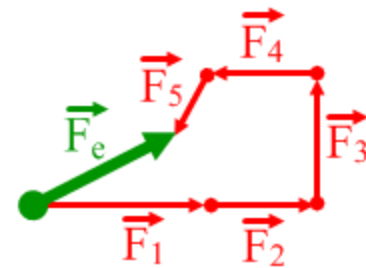
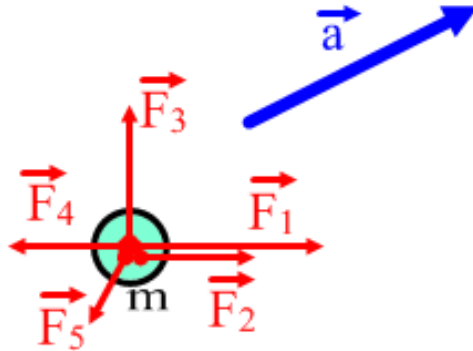


Newton törvényei: IV.

Newton IV. törvénye: (A szuperpozíció elve)

Ha egy tömegpont egyidejűleg több erőhatásnak is ki van téve, akkor azok együttes hatása egy eredő erővel helyettesíthető. Az eredő erő a testre ható összes erő vektori összege:

$$\vec{F}_e = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \quad \vec{a} = \frac{\vec{F}_e}{m}$$



$$\vec{F}_e = \sum_{i=1}^5 \vec{F}_i$$

A Galilei-féle relativitási elv

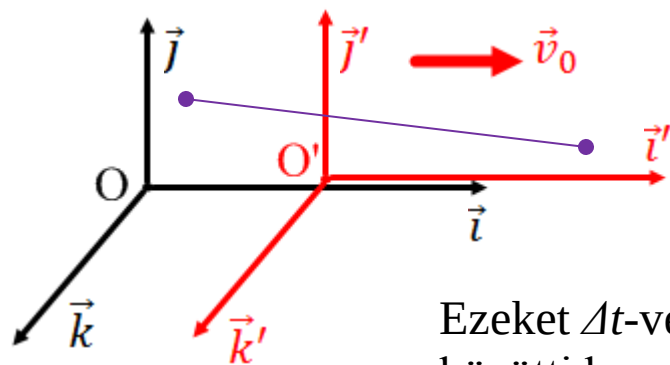
Bármely két egymáshoz képest **állandó** sebességgel mozgó vonatkoztatási rendszerben a **mechanikai jelenségek** ugyanúgy mennek végbe.

Pl. a rázkódástól eltekintve nem érezzük, hogy mozog-e a vonat, ha állandó sebességgel halad. A leejtett pénzérme ugyanúgy függőlegesen egyenletesen gyorsulva esik.

Az ilyen vonatkoztatási rendszerek közül tehát egyik sincs kitüntetve, nincsen egy abszolút nyugvó vonatkoztatási rendszer.

Egymáshoz képest mozgó rendszerek közötti kapcsolat:

Mozogjon a K' rendszer a K -hoz képest a pozitív x irányba **állandó** v_0 sebességgel.



Egy Δt idő alatt az origók közötti távolság: $\overline{OO'} = v_0 \Delta t$

Tehát a mért koordinátakülönbségek K' -ben:

$$\Delta x' = \Delta x - v_0 \Delta t$$

$$\Delta y' = \Delta y$$

$$\Delta z' = \Delta z \quad \text{Továbbá: } \Delta t' = \Delta t \text{ (órák szinkronban)}$$

Ezeket Δt -vel (ill. $\Delta t'$) osztva megkapjuk a sebességek közötti kapcsolatot (lila vonal egy mozgó test pályadarabja):

$$v'_x = v_x - v_0$$

$$v'_y = v_y$$

$$v'_z = v_z$$

Ezt vektori formában írva kapunk egy általános érvényű kifejezést:

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{v}_0$$

Erőtörvények

Olyan függvények, amelyek matematikai alakban megadják a testre ható erőket.

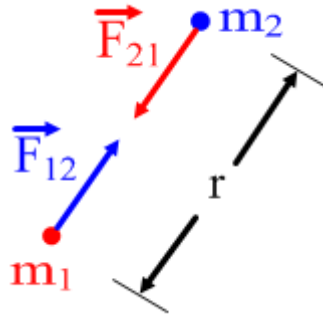
Ezeknek a függvényeknek a változói lehetnek:

- a test helye
- a test sebessége
- az idő

Newton-féle gravitációs erő

Két tömegpont közötti erő arányos a két tömeg szorzatával és fordítottan arányos a távolságuk négyzetével.

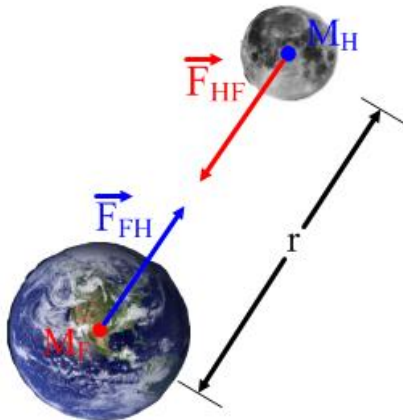
$$F = \frac{\gamma m_1 m_2}{r^2}$$



A kölcsönhatás mindig vonzó.

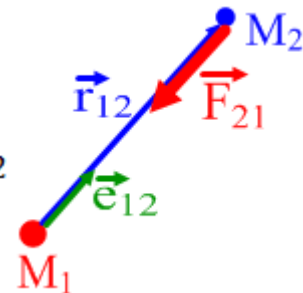
Az arányossági tényező az univerzális gravitációs állandó: $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}$

Az erőtvény egyszerű alakja kiterjedt testekre is
érvényes, amennyiben gömbszimmetrikusok.
A távolság a középpontok között mérendő.



A vektori alak megadja az
erő irányát is:

$$\vec{F}_{21} = -\frac{\gamma M_1 M_2}{r_{12}^2} \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}} = -\frac{\gamma M_1 M_2}{r^2} \vec{e}_{12}$$



Súlyerő

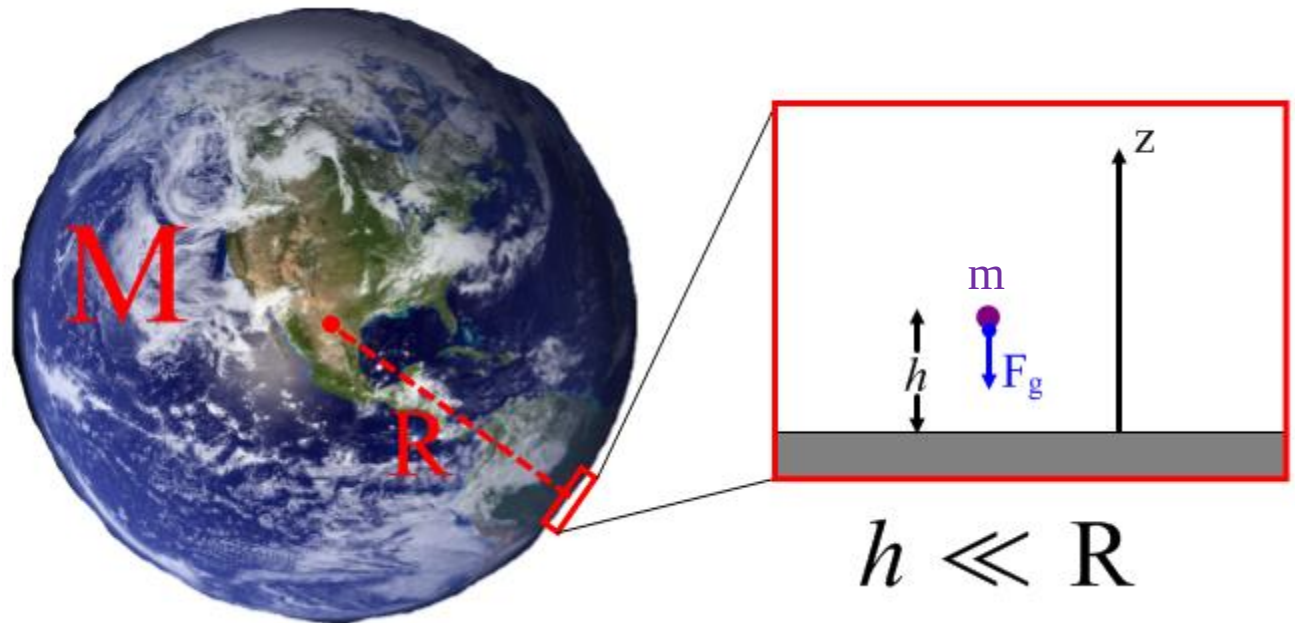
Amikor a test elmozdulása elhanyagolható méretű a bolygó (vagy hold stb.) sugarához képest, akkor a gravitációs erő homogénnek (helytől független) vehető.

Pl. a Földünk felszínének közelében végbemenő mozgásokra az általános Newton-féle erőtvényből kapjuk:

$$\vec{F}_g = -\frac{\gamma M m}{r^2} \vec{e}_r = -\frac{\gamma M m}{(R + h)^2} \vec{e}_r \approx -\frac{\gamma M m}{R^2} \vec{e}_r = -mg \vec{k}$$

$$g = \frac{\gamma M}{R^2} = 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

gravitációs gyorsulás
a Föld felszínén

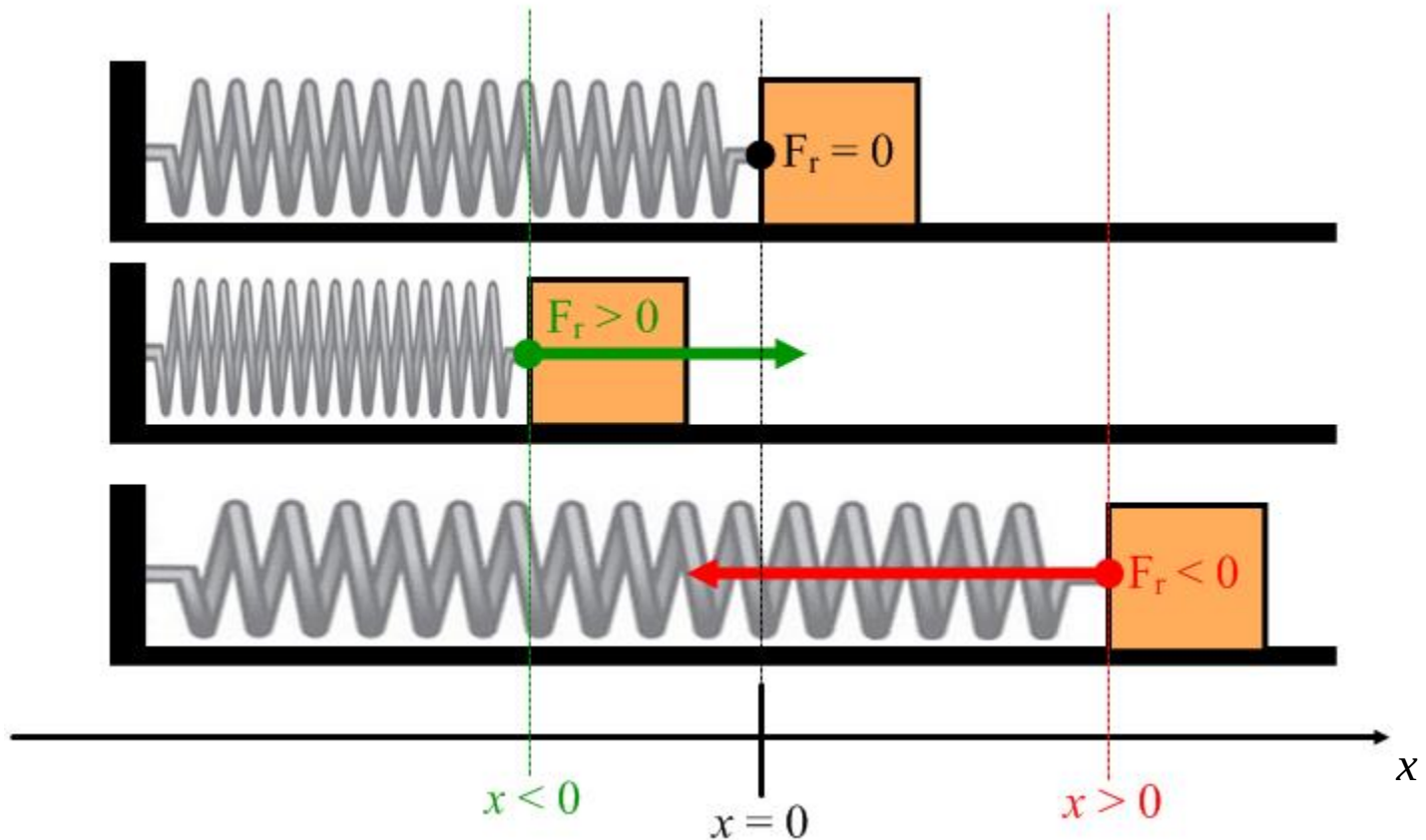


Rugóerő

Hooke-törvény: Az erő az egyensúlyi helyzettől mért deformáció méretével arányos és azzal ellentétes irányú.

Az arányossági tényező a rugóállandó D .

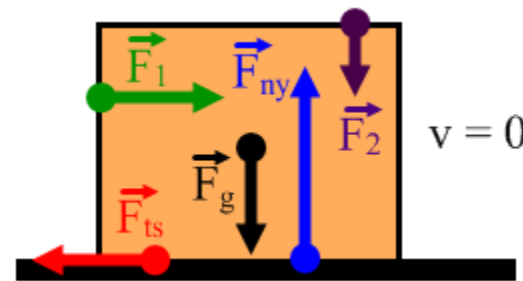
$$F_r = -Dx$$



Súrlódási erő

Három fajta lehet:

1. **tapadási**: A két felület egymáshoz képesti mozdulatlanságát igyekszik megőrizni. Értéke **bármekkora** lehet egy bizonyos **maximális** értékig (míg meg nem csúszik).

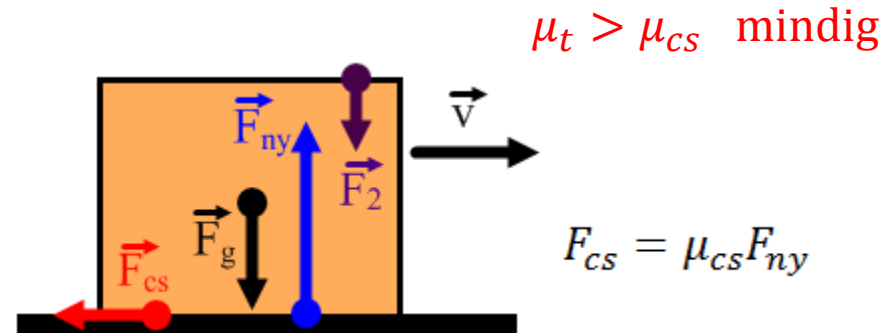


$$F_{ts} = F_1$$

amíg

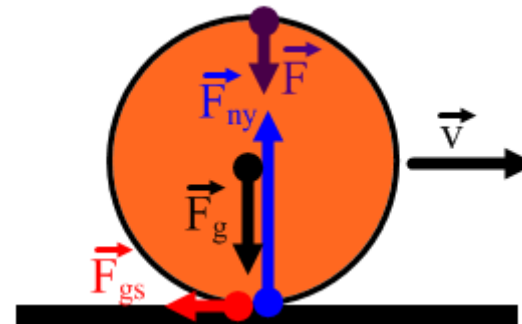
$$F_1 \leq F_{ts,max}$$
$$F_{ts,max} = \mu_t F_{ny}$$

2. **csúszási**: Két egymáson csúszó felület között fellépő erő, mely a mozgást igyekszik gátolni. Csak az anyagi minőségtől (μ) és a felületeket összenyomó erőttől függ.



$$F_{cs} = \mu_{cs} F_{ny}$$

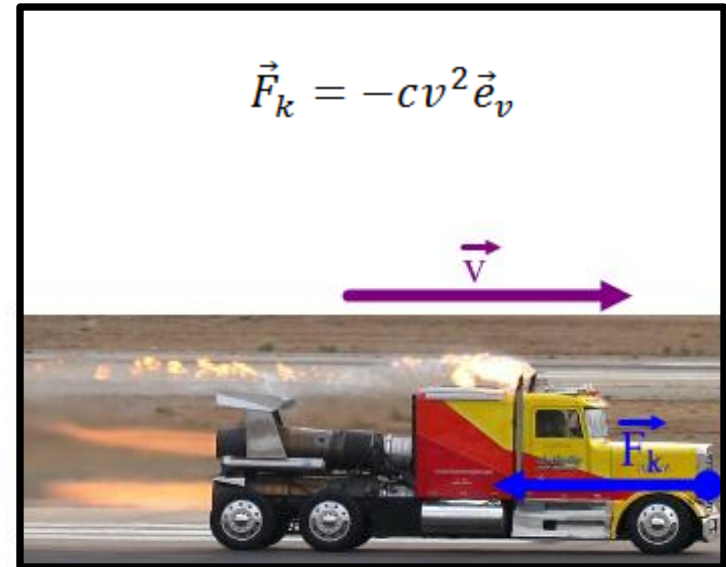
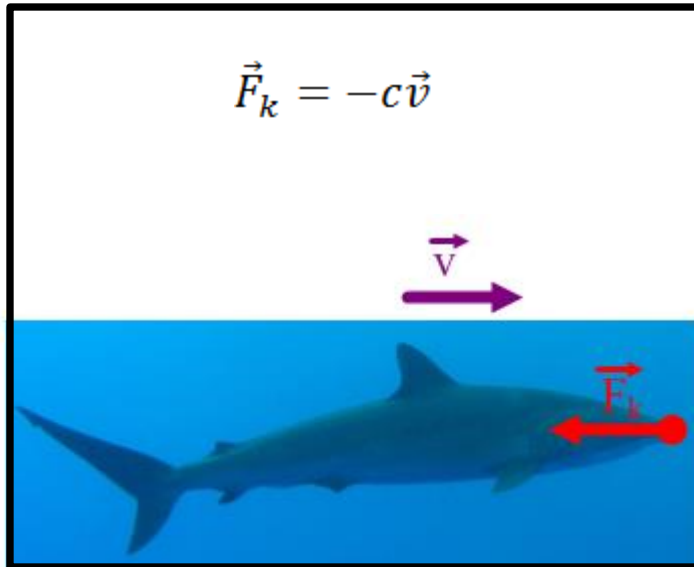
3. **gördülési**: Felületen guruló testre hat a mozgással ellenkező irányban. (pl. emiatt áll meg a guruló billiárd vagy teke golyó)



$$F_{gs} = \mu_g F_{ny}$$

Közegellenállás vagy légellenállás

Arányos a test sebességével, ill. a sebesség négyzetével, és azzal ellentétes irányú.

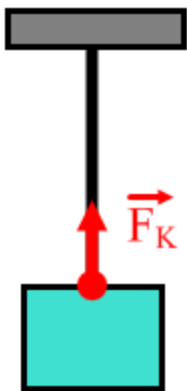


Az arányossági tényező c függ:

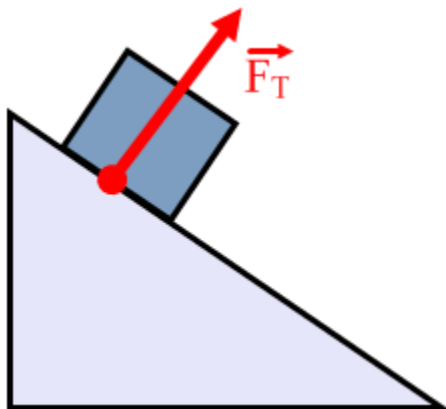
- a test mozgásra merőleges felületének nagyságától
- a test alakjától (mennyire áramvonalas)
- a közeg sűrűségétől

Kényszererők

Ezek nagysága éppen akkora, hogy a **kényszerfeltétel** teljesüljön:
pl. kötélerő, tartóerő, tapadási súrlódás (a megcsúszás határáig)



kötél nem nyúlik



nem mehet bele a lejtőbe



ne csússzon meg

A dinamika alapegyenlete

Ha összegezzük Newton I., II., és IV. törvényét, akkor megkapjuk a **dinamika alapegyenletét**:

$$\vec{F}_e = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = m\vec{a}$$

Ezeket koordinátánként kiírva, illetve az erőkre beírva a megfelelő erőtvénnyeket, megkapjuk a **mozgásegyenleteket**. Pl. derékszögű Descartes koordinátarendszerben:

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} &= F_{ex}(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \\ m\ddot{y} &= F_{ey}(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \\ m\ddot{z} &= F_{ez}(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \end{aligned} \right\} \text{ másodrendű, csatolt differenciálegyenletek}$$

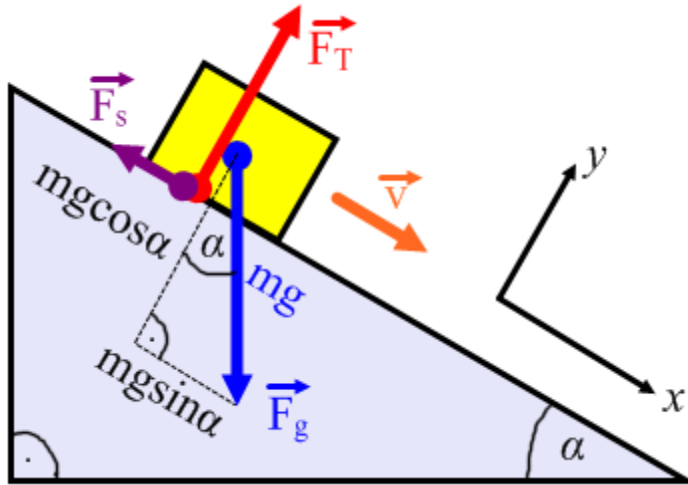
Az erők nem függhetnek a gyorsulástól, mert az ellentmondana a szuperpozíció elvének.

A megoldáshoz meg kell még adni 6 integrálási állandót. Ezek általában a **kezdeti hely** 3 koordinátája és a **kezdeti sebesség** 3 koordinátája: $\vec{r}_0$ és $\vec{v}_0$

Az egyenleteket megoldva megkapjuk a **mozgástörvényt**, mely megmondja, hogy a test hol tartózkodik egy bizonyos időben (a pálya egyenlete): $\vec{r}(t) = \begin{cases} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{cases}$

Példa: Lejtőn mozgó test

Alkalmazva a dinamika alapegyenletét:
$$m\vec{a} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{F}_g + \vec{F}_T + \vec{F}_s$$



[ANIMÁCIÓ IDEKATTINTVA!](#)

Célszerű párhuzamos és merőleges komponenseket vizsgálni, mert tudjuk, hogy az y irányú eredő erőnek zérusnak kell lennie:

$$\begin{aligned} (x) \quad m\ddot{x} &= ma_x = mg\sin\alpha - F_s \\ (y) \quad m\ddot{y} &= ma_y = 0 = F_T - mg\cos\alpha \end{aligned}$$

Mivel a tartóerő egyben a nyomóerő is:

$$F_s = \mu mg\cos\alpha$$

Beírva az (x) egyenletbe a súrlódást:

Ha $a_x < 0$ jön ki megoldásnak: $\leftarrow$

$$\begin{aligned} ma_x &= mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha \\ a_x &= g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) \end{aligned}$$

- a lefelé csúszó test lassul

Lejtőre helyezett test egyensúlyának feltétele:

- a nulla eredő erőhöz szükséges tapadási súrlódási erőnek kisebbnek kell lennie, mint a lehetséges maximális érték ($\mu_t F_T$)

Lendület

Lendület (impulzus): A test tömegének és sebességének szorzata.
vektormennyiség: iránya a sebesség vektor iránya.

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

Lendülettétel: Az lendület erő hatására változik meg.
Az eredő erő határozza meg a változási gyorsaságát:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{F}_e$$

Bizonyítás állandó tömeg esetén:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} = \vec{F}_e$$

Tehát ha az eredő erő zérus (magára hagyott test), akkor a lendület állandó.

Az okozott lendületváltozás t_1 és t_2 között az eredő erő által:

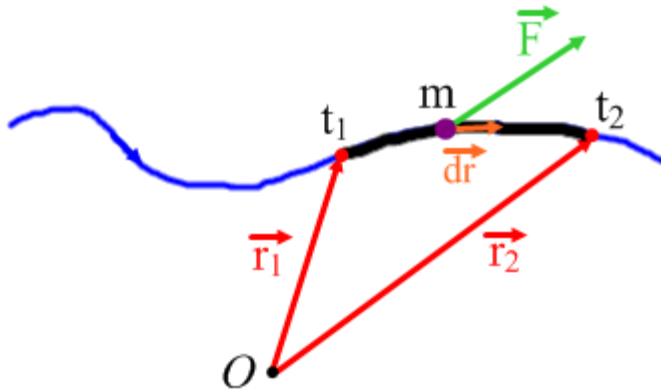
$$\Delta\vec{p} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_e dt$$

tömegtől független



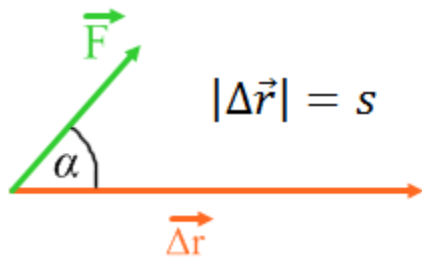
Munka

Munka: Az erő vonal menti (görbe menti) integrálja a test pályája mentén két pont között.



$$W_{1,2} = \int_{\vec{r}_1(g)}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Speciális eset: A mozgás pályája egyenes, az erő pedig mindenütt ugyanaz a vektor.



$$W = \int_g \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_g F \cos \alpha dr = F \cos \alpha \int_g dr = Fs \cos \alpha$$

Ha az erő végig a mozgás irányába mutat ($\alpha = 0$): $W = Fs$

Kinetikus (mozgási) energia

Ha egy nyugalomból induló tömegpontra állandó erő hat:

- a pont gyorsulása állandó: $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$ (a mozgás pályája egyenes vonalú) $\rightarrow a_x \rightarrow a$

- t idő múlva sebessége: $v = at$, a megtett út pedig: $s = x = \frac{a}{2}t^2$

Tehát a testen végzett munka: $W = Fs = ma \frac{a}{2}t^2 = \frac{1}{2}m(at)^2 = \frac{1}{2}mv^2$

Ez a test **kinetikus energiája**: $E_K = \frac{1}{2}mv^2$ (a munkavégzés során átadott energia)

Mértékegység mindkettő esetében: J (Joule)

Negatív munka esetén a kinetikus energia csökken, a test lassul.

Munkatétel: A kinetikus energia megváltozása egyenlő az eredő erő által a testen végzett munkával.

$$W = \Delta E_K$$



Teljesítmény

Teljesítmény: Az energiaközlés üteme (egységnyi idő alatt közölt energia).

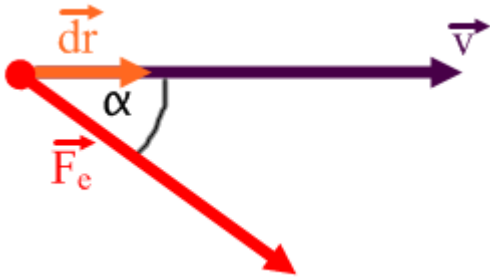
$$P = \frac{dE}{dt} \quad (\text{lehet közölt hőenergia, elektromos energia, mechanikában a munkavégzés során közölt energia})$$

A mechanikai **teljesítménytétel:** A tömegpontra ható erők teljesítménye egyenlő a test kinetikus energiájának változási gyorsaságával:

$$P = \frac{dE_K}{dt}$$

Az elemi munka: $\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{r} = dE_K$

A munkatétel felhasználásával: $P = \frac{dE_K}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$



Végrehajtva egy változótranszformációt:

$$W_{1,2} = \int_{\vec{r}_{1,g}}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot \vec{v} dt = \int_{t_1}^{t_2} P dt$$