

# Az elektromágneses indukció jelensége

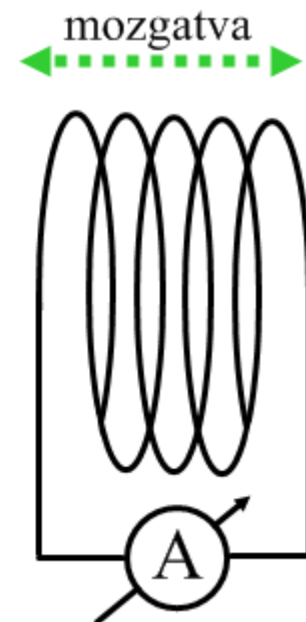
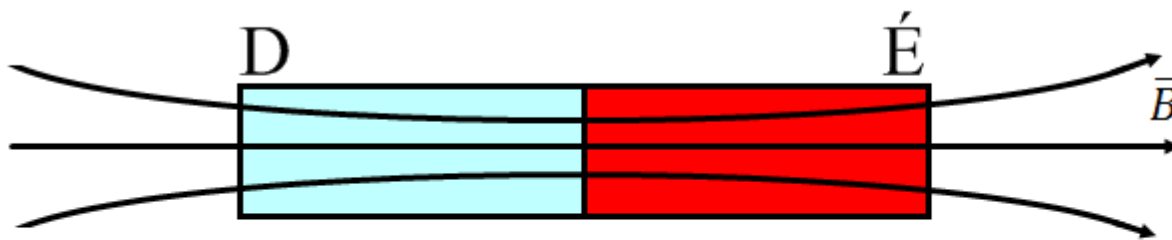
Korábban láttuk, hogy az elektromos áram hatására mágneses tér keletkezik (Ampère-féle gerjesztési törvény)

Kérdés, hogy vajon ez megfordítható-e, és a mágneses tér hatására keletkezhet-e áram:

Ha egy tekercs állandó mágneses térben nyugalomban van akkor semmi nem történik.

Viszont az árammérő kilendül akkor amikor:

- a tekercset vagy a mágnezt mozgatjuk (egymáshoz képest), illetve forgatjuk.
- elektromágnes esetén amikor a teret ki- vagy bekapcsoljuk.



[SZIMULÁCIÓK KATTINTVA](#)

# Mozgási indukció

Ha egy vezetőt mágneses térben mozgatunk akkor a benne lévő töltésekre Lorentz-erő hat.

Ez az az idegen erő amely a töltések mozgatásáért felelős:  $\vec{F}_* = \vec{F}_L = q\vec{v} \times \vec{B}$

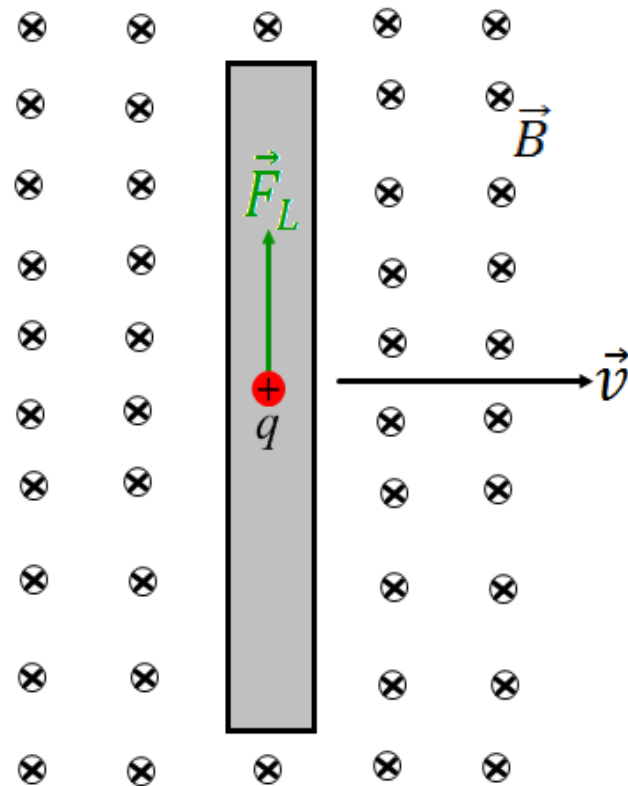
Tehát az idegen térerősség:  $\vec{E}_* = \frac{\vec{F}_*}{q} = \vec{v} \times \vec{B}$

A **Neumann-törvény** megadja a mozgó vezető  $A$  és  $B$  pontja között indukálódó elektromotoros erőt amint az a mágneses térben mozog:

$$\varepsilon_{AB} = \int_A^B \vec{E}_* \cdot d\vec{s} = \int_A^B (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{s}$$

Ebben a jobbra látható egyszerű esetben, ha a rúd hossza  $l$ , az elektromotoros erő:

$$\varepsilon = vBl$$



# Alkalmazás: Lineáris generátor

Ha a mágneses térben mozgó vezető végeit összekötjük egy párhuzamos sínpárral egy  $R$  ellenálláson keresztül, akkor a körben áram folyik.

Az áramerősség: 
$$I = \frac{\varepsilon_{AB}}{R} = \frac{vBl}{R}$$

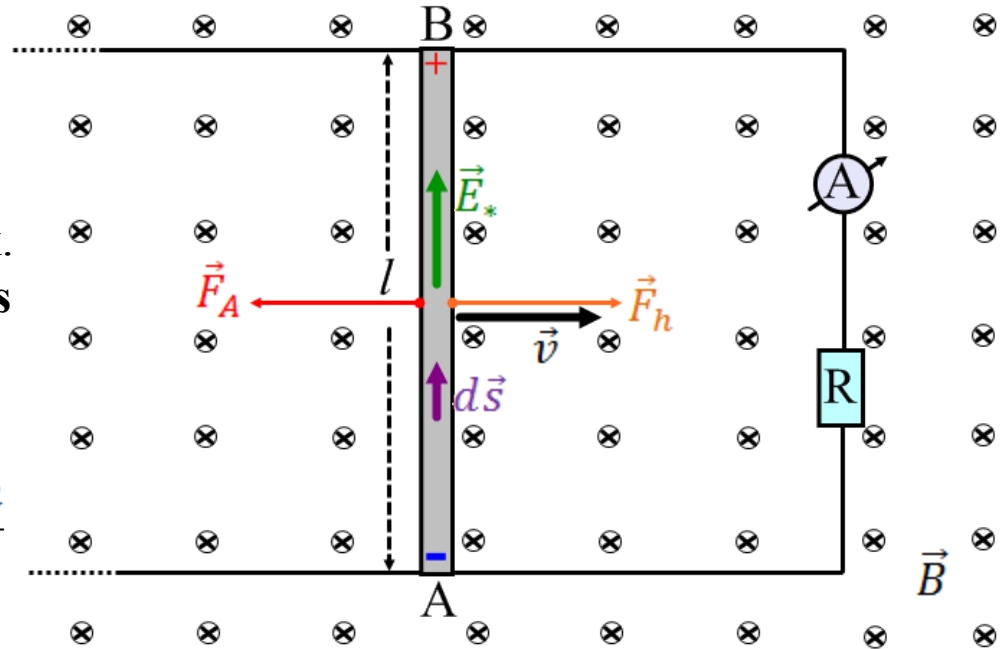
Az áramjárta vezetőre hat az Ampère-erő amit egy húzóerővel kell kompenzálnunk.  
**Mechanikai teljesítményből elektromos teljesítmény a fogyasztón.**

Legyen  $h$  a mozgó rúd és az ellenállás közötti távolság. Ekkor:  $v = -\frac{dh}{dt}$

A **mágneses indukciófluxus** ebben az egyszerű esetben:  $\Phi = BA = Blh$

A mágneses indukciófluxus időderiváltja pedig: 
$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d(BA)}{dt} = B \frac{dA}{dt} = -Blv = -\varepsilon_{AB}$$

Faraday és Lenz törvénye:  $\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}$



## 6. feladat

Zárt vezetőhurokban indukált elektromotoros erő egyenlő a hurok által körülfogott mágneses indukciófluxus változási gyorsaságának ellentettjével (másképpen az Ampère-erő segítene!)

# Alkalmazás: Váltakozó áramú generátor

Vezető keret állandó  $\omega$  szögsebességgel forog egy homogén mágneses térben.

Ha kezdetben  $\vec{n} \parallel \vec{B}$  akkor:  $\alpha = \omega t$

A mágneses indukciófluxus az idő függvényében:

$$\Phi = \int_F \vec{B} \cdot d\vec{A} = BA \cos \alpha = BA \cos \omega t$$

A Faraday-Lenz törvényt felhasználva:

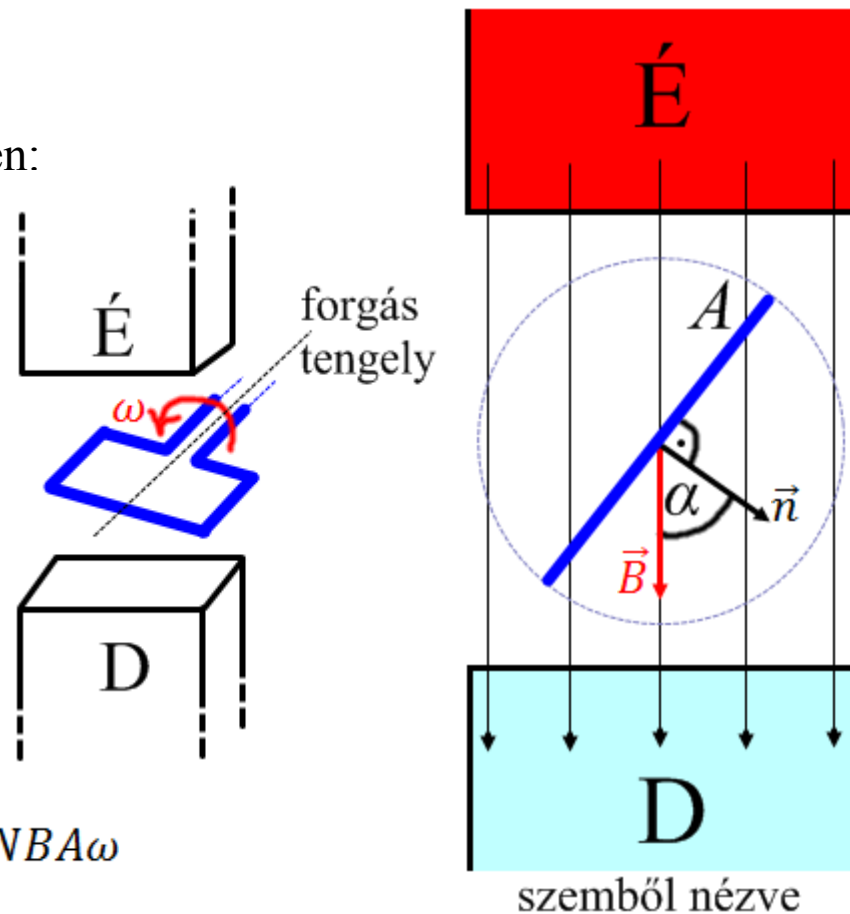
$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = BA\omega \sin \omega t$$

Ha a keret  $N$  menetből áll:

$$\varepsilon = NBA\omega \sin \omega t$$

Az elektromotoros erő maximális értéke:  $\varepsilon_0 = NBA\omega$

Tehát az indukált elektromotoros erő:  $\varepsilon = \varepsilon_0 \sin \omega t$



[Szimuláció kattintva!](#)

7. feladat

# A feszültség és áramerősség effektív értéke

A váltakozó áram effektív értéke a hőhatás szempontjából egyenértékű stacionárius (egyen-) áramot jelenti.

Tehát egy periódusidő alatt a fogyasztón az elektromos munkavégzés megegyezik:

$$I_{eff}^2 RT = \int_0^T I^2 R dt$$

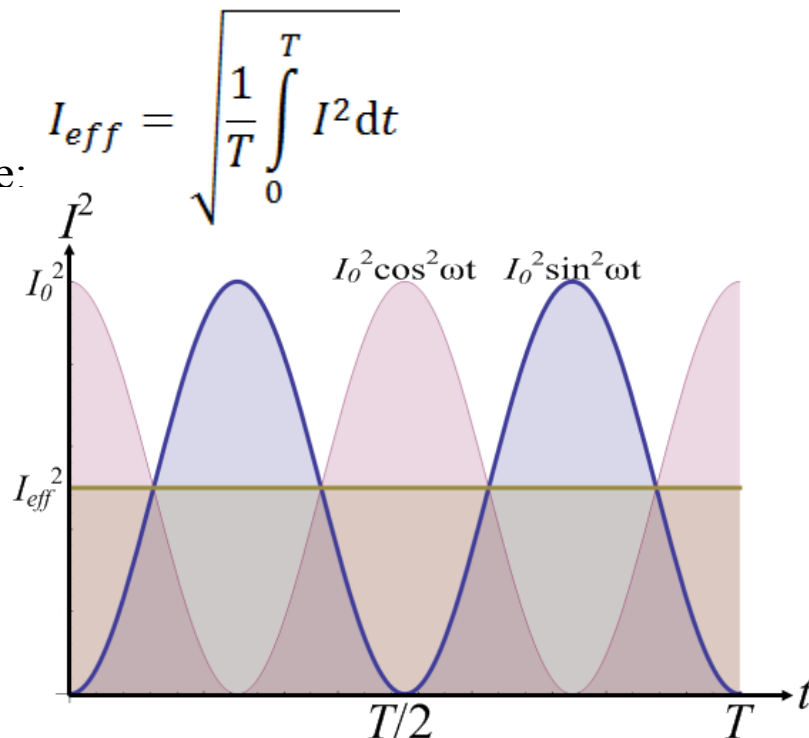
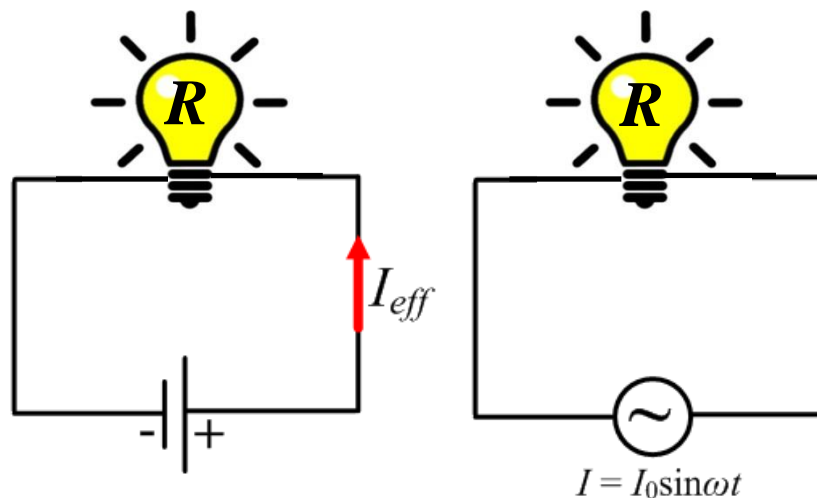
Innen  $R$ -el egyszerűsítve az effektív áramerősségre:

Szinuszosan változó áramra:

$$\int_0^T I_0^2 \sin^2 \omega t dt = \frac{I_0^2}{2} \int_0^T 1 dt = \frac{I_0^2 T}{2}$$

Tehát az effektív értékekre:

$$I_{eff} = \frac{I_0}{\sqrt{2}} \quad U_{eff} = \frac{U_0}{\sqrt{2}} \quad (U = IR)$$



# Nyugalmi indukció - Kölcsönös indukció

Láttuk, hogy a mágneses indukciófluxus változása elektromotoros erőt indukál.

A fluxus változhat azért, hogy:

- változik vagy elfordul a felület (mozgási indukció)
- a mágneses tér változik (nyugalmi indukció)

$$\Phi = \int_F \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

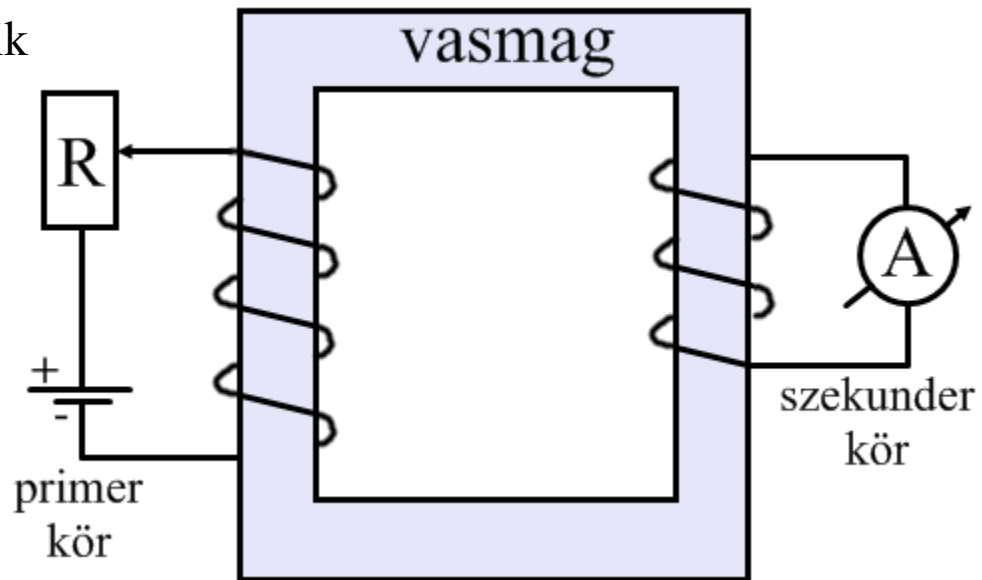
A változtatható ellenállást állítgatva változik az áramerősség és ezáltal a mágneses indukció. Tehát változik a mágneses fluxus. A vasmag biztosítja, hogy ezt szinte teljes mértékben körül fogja a szekunder tekercs.

Amíg a fluxus változik addig a szekunder körben áram folyik.

A magyarázat most nem a Lorentz-erő, hisz a szekunder kör nem mozog.

Az **időben változó mágneses tér elektromos teret indukál** és ez mozgatja a szekunder körben a töltéseket.

Ezt a jelenséget **kölcsönös indukciónak** is nevezzük.

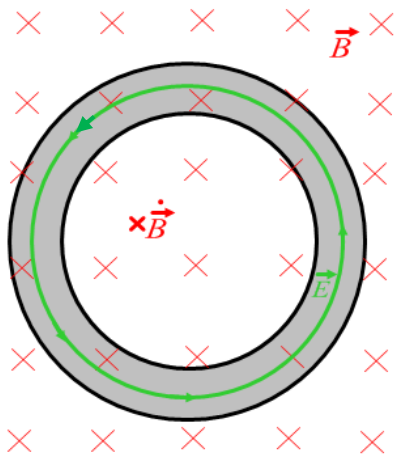


**8. feladat**

# Nyugalmi indukció - Önindukció

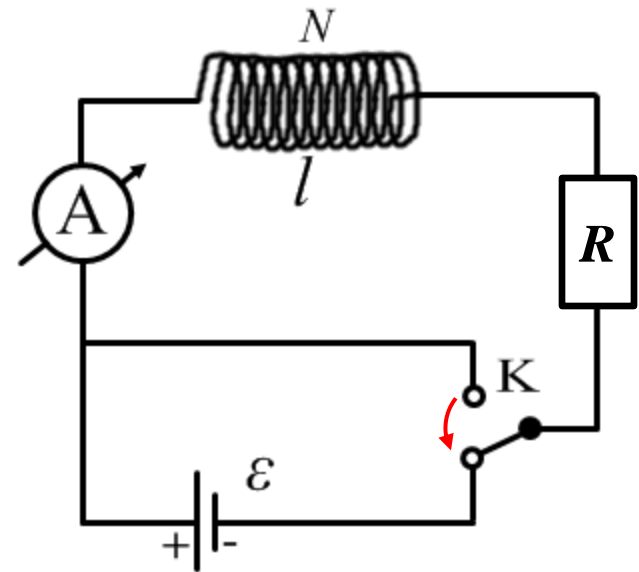
A kapcsoló segítségével a feszültséget ráadhatjuk a tekercsre. Be- és kikapcsolásnál az áramerősség nem ugrásszerűen változik. A változó áram változó mágneses teret kelt, ami egy változó fluxust okoz. Az indukált elektromotoros erő az őt létrehozó hatást próbálja gyengíteni. (**Lenz-törvénye**)

A Faraday-Lenz törvényben az indukált elektromotoros erőt kifejezve az **elektromos térerősség** zárt görbe mentén vett integráljával:



$$\varepsilon_i = - \frac{d\Phi}{dt}$$

$$\oint_G \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \frac{d}{dt} \int_F \vec{B} \cdot d\vec{A}$$



Az elektromos térerősség integrálját a Stokes-tétel segítségével átalakítva felületi integrállá, majd állandó, nagyon kicsi felületet véve egy pont körül megkapjuk a lokális alakot:

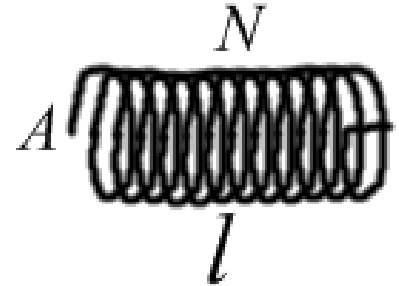
$$\oint_G \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_F \text{rot } \vec{E} \cdot d\vec{A} = - \int_F \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{A} \longrightarrow \text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

A változó mágneses tér által indukált elektromos térerősség örvényes (**nem konzervatív**) és forrásmentes, míg a töltések által létrehozott elektromos tér forrásos és örvénymentes.

# Szolenoid önindukciós együtthatója

Múlt előadáson láttuk, hogy hosszú egyenes tekercs esetén a mágneses térerősség és indukció:

$$H = \frac{NI}{l} \quad B = \frac{\mu NI}{l}$$



Az  $N$  menetes  $A$  keresztmetszetű tekercsre a mágneses indukciófluxus:

$$\Phi = BAN = \frac{\mu NI}{l} AN = \frac{\mu N^2 A}{l} I$$

Tehát a fluxus arányos az őt létrehozó árammal. Az arányossági tényező az **önindukciós együttható** ( $L$ ):

$$\Phi = \frac{\mu N^2 A}{l} I = LI \quad L = \frac{\mu N^2 A}{l} \quad [L] = \frac{Vs}{A} = \text{H(Henry)}$$

A tekercsben indukálódott elektromotoros erő:  $\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -L \frac{dI}{dt}$

A tekercsben lévő mágneses tér energiája:

$$W_M = w_M V = \frac{1}{2} BHA l = \frac{1}{2} \mu H^2 A l = \frac{1}{2} \mu \left( \frac{NI}{l} \right)^2 A l$$

$$W_M = \frac{1}{2} \frac{\mu N^2 A}{l} I^2 = \frac{1}{2} LI^2$$



# Kölcsönös indukciós együttható

Szorosan csatolt szolenoidok esetén a vasmag miatt a menetenkénti mágneses-indukciófluxus ugyanaz, így a fluxusok arányosak a menetszámokkal.

A primer körre váltóáramot csatolva:

$$B_1 = \frac{\mu N_1 I_1}{l_1}$$

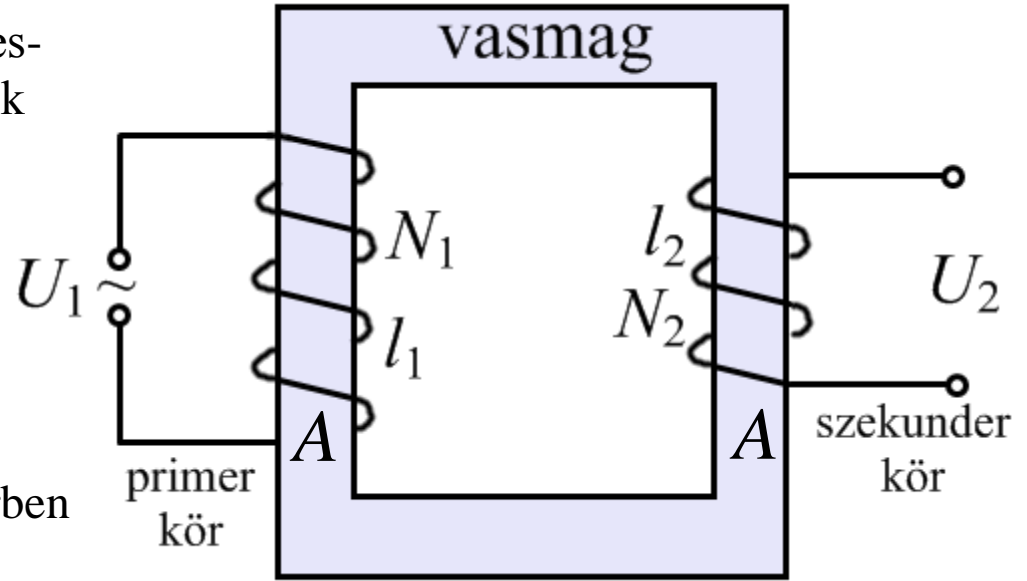
A szekunder tekercs fluxusa az primerben folyó áram miatt ( $A$  ugyanaz):

$$\Phi_{12} = B_1 N_2 A = \frac{\mu N_1 N_2 A I_1}{l_1} = L_{12} I_1$$

A szekunder körben indukálódott elektromotoros erő:  $\varepsilon_{12} = -\frac{d\Phi_{12}}{dt} = -L_{12} \frac{dI_1}{dt}$

Szerepeket megcserélve kapnánk:  $\Phi_{21} = B_2 N_1 A = \frac{\mu N_2 N_1 A I_2}{l_2} = L_{21} I_2$

Látható, hogy ha  $l_1 = l_2$  akkor  $L_{12} = L_{21} = M$  (**kölcsönös indukciós együttható**).



# Huroktörvény általánosítása változó áramra

A tekercsben indukálódott elektromotoros erő:

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_F \vec{B} \cdot d\vec{A} = -L \frac{dI}{dt}$$

A tekercs  $L$  önindukciós együtthatója egyben a kör önindukciós együtthatója.

A kondenzátoron eső feszültség ( $g_2$  görbe):

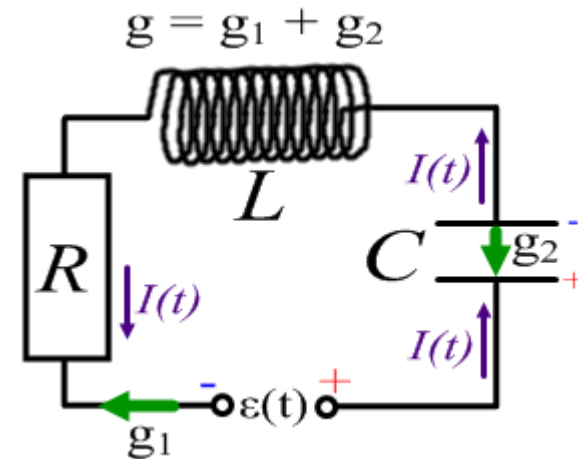
$$U = \frac{Q}{C}$$

A  $g = g_1 + g_2$  zárt görbe mentén kiintegrálva az elektromos térerősséget (nem nulla, mert az indukált tér örvényes és nem konzervatív):

$$IR + \frac{Q}{C} - \varepsilon = \varepsilon_i$$

Tehát a huroktörvény általánosított egyenlete soros  $RLC$  körre:

$$IR + L \frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} = \varepsilon$$



Valamilyen  $t$  időben  
 $I(t)$  áram folyik.

## Bekapcsolási jelenségek $RL$ körben\*

A K kapcsolóval a  $t = 0$  időpontban rákapcsoljuk a kört az áramforrást.  
Az  $RL$  körre felírva az általános huroktörvényt:

$$IR + L \frac{dI}{dt} = \varepsilon$$

Átrendezve és szétválasztva a változókat:

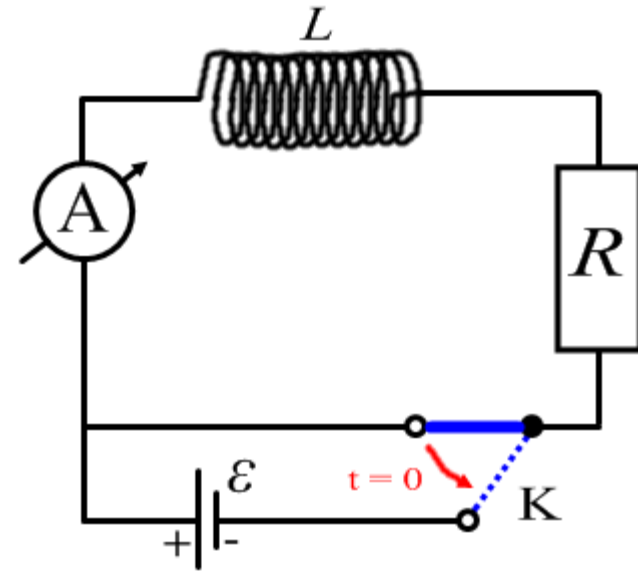
$$\frac{1}{L} dt = \frac{dI}{\varepsilon - IR}$$

Kiintegráljuk mindkét oldalt  $t = 0$  és egy  $t$  idő között,  
miközben az áramerősség 0-ról  $I$ -re nő:

$$\int_0^t \frac{1}{L} dt = \int_0^I \frac{dI}{\varepsilon - IR} \rightarrow \frac{1}{L} t = \left[ \frac{-\ln(\varepsilon - IR)}{R} \right]_0^I = \frac{-\ln(\varepsilon - IR)}{R} + \frac{\ln \varepsilon}{R}$$

$$-\frac{R}{L} t = \ln \frac{\varepsilon - IR}{\varepsilon} \rightarrow e^{-\frac{R}{L} t} = \frac{\varepsilon - IR}{\varepsilon} \rightarrow \frac{\varepsilon}{R} e^{-\frac{R}{L} t} = \frac{\varepsilon}{R} - I$$

Tehát az áramerősség az idő függvényében:  $I = \frac{\varepsilon}{R} \left( 1 - e^{-\frac{R}{L} t} \right)$



[Animáció kattintva!](#)

## Kikapcsolási jelenségek $RL$ körben\*

A  $K$  kapcsolóval a  $t = 0$  időpontban lekapcsoljuk a körről az áramforrást.

Az  $RL$  körre felírva az általános huroktörvényt:

$$IR + L \frac{dI}{dt} = 0$$

Átrendezve és szétválasztva a változókat:

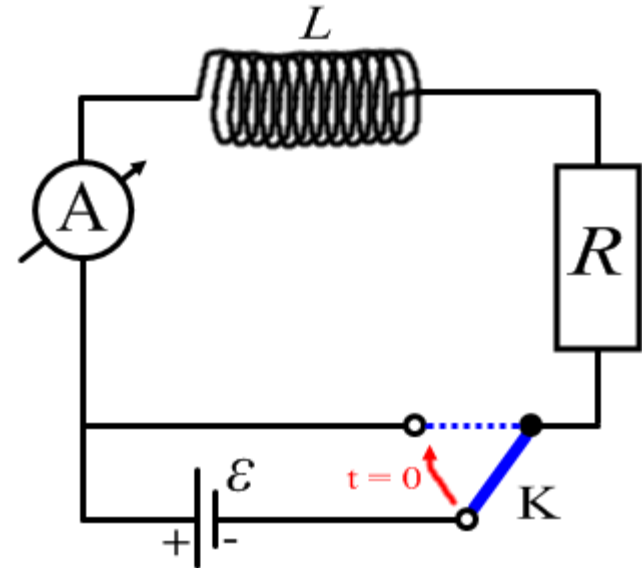
$$-\frac{R}{L} dt = \frac{dI}{I}$$

Kiintegráljuk mindkét oldalt  $t = 0$  és egy  $t$  idő között, miközben az áramerősség  $I_0 = \varepsilon/R$ -ről  $I$ -re csökken:

$$\int_0^t -\frac{R}{L} dt = \int_{I_0}^I \frac{dI}{I} \rightarrow -\frac{R}{L} t = \ln I - \ln I_0$$
$$-\frac{R}{L} t = \ln \frac{I}{I_0} \rightarrow e^{-\frac{R}{L} t} = \frac{I}{I_0}$$

Tehát az áramerősség az idő függvényében:  $I = \frac{\varepsilon}{R} e^{-\frac{R}{L} t} = \frac{\varepsilon}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \tau = \frac{L}{R}$

Az  $RL$  kör időállandója  $\tau$  adja meg, hogy mennyi idő alatt esik az áram  $e$ -ad részére.



## Bekapcsolási jelenségek $RC$ körben\*

A  $K$  kapcsolóval a  $t = 0$  időpontban rákapcsoljuk a kört az áramforrást.

Az  $RC$  kört felírva az általános huroktörvényt:

$$IR + \frac{Q}{C} = \varepsilon \quad \left( I = \frac{dQ}{dt} \right) \quad \rightarrow \quad R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = \varepsilon$$

Átrendezve és szétválasztva a változókat:

$$\frac{dt}{RC} = \frac{dQ}{\varepsilon C - Q}$$

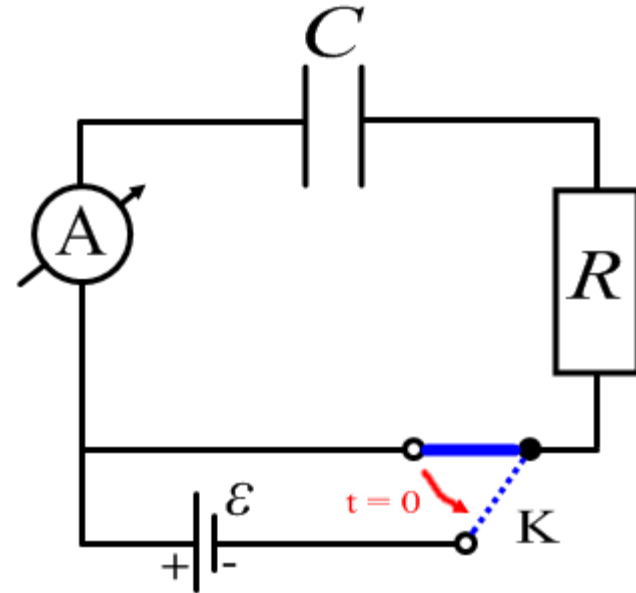
Kiintegráljuk mindkét oldalt  $t = 0$  és egy  $t$  idő között, miközben az töltés  $0$ -ról  $Q$ -ra nő:

$$\int_0^t \frac{dt}{RC} = \int_0^Q \frac{dQ}{\varepsilon C - Q} \quad \rightarrow \quad \frac{t}{RC} = [-\ln(\varepsilon C - Q)]_0^Q = \ln \varepsilon C - \ln(\varepsilon C - Q)$$

$$-\frac{t}{RC} = \ln \frac{\varepsilon C - Q}{\varepsilon C} \quad \rightarrow \quad e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{\varepsilon C - Q}{\varepsilon C} \quad \rightarrow \quad Q = \varepsilon C \left( 1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right)$$

Deriválva az idő szerint:  $I = \frac{dQ}{dt} = \frac{\varepsilon C}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{\varepsilon}{R} e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{\varepsilon}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \tau = RC$

A  $\tau$  időállandó adja meg, hogy mennyi idő alatt esik a töltő áram  $e$ -ad részére.



## Kikapcsolási jelenségek $RC$ körben\*

A  $K$  kapcsolóval a  $t = 0$  időpontban lekapcsoljuk az áramforrást és kisütjük a kondenzátort. Az  $RC$  körre felírva az általános huroktörvényt:

$$R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = 0 \quad \left( I = \frac{dQ}{dt} \right) \quad \rightarrow \quad -Q = RC \frac{dQ}{dt}$$

Átrendezve és szétválasztva a változókat:

$$-\frac{dt}{RC} = \frac{dQ}{Q}$$

Kiintegráljuk mindkét oldalt  $t = 0$  és egy  $t$  idő között, miközben az töltés  $Q_0 = \varepsilon C$ -ről  $Q$ -ra csökken:

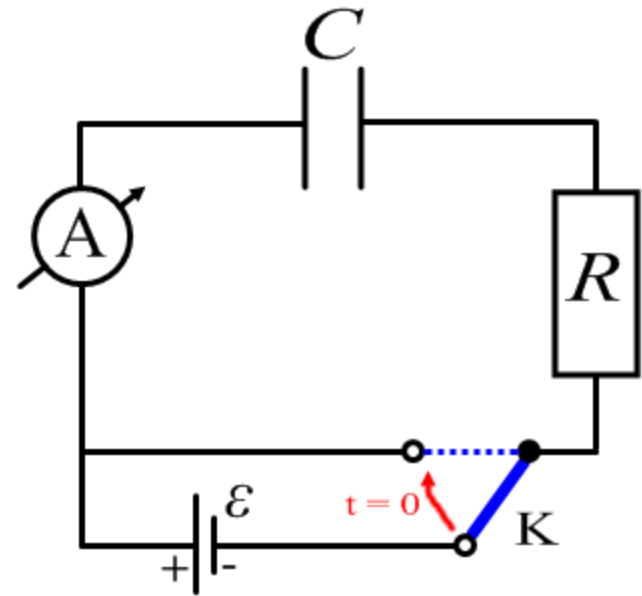
$$\int_0^t -\frac{dt}{RC} = \int_{Q_0}^Q \frac{dQ}{Q} \quad \rightarrow \quad -\frac{t}{RC} = \ln Q - \ln Q_0$$

$$-\frac{t}{RC} = \ln \frac{Q}{Q_0} \quad \rightarrow \quad e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{Q}{Q_0} \quad \rightarrow \quad Q = Q_0 e^{-\frac{t}{RC}} = \varepsilon C e^{-\frac{t}{RC}}$$

Deriválva az idő szerint:  $I = -\frac{dQ}{dt} = \frac{\varepsilon C}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{\varepsilon}{R} e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{\varepsilon}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \tau = RC$

A  $\tau$  időállandó adja meg, hogy mennyi idő alatt esik a kisütő áram  $e$ -ad részére.

A negatív jel most azért kell, mert a töltés csökken de mi szeretnénk pozitív értékeket.



## Ideális tekercs szinuszos váltakozó feszültségen\*

A körre most is az általános huroktörvényt írjuk fel figyelembe véve hogy az elektromotoros erő most függ az időtől:

$$L \frac{dI}{dt} = \varepsilon(t) = \varepsilon_0 \sin \omega t$$

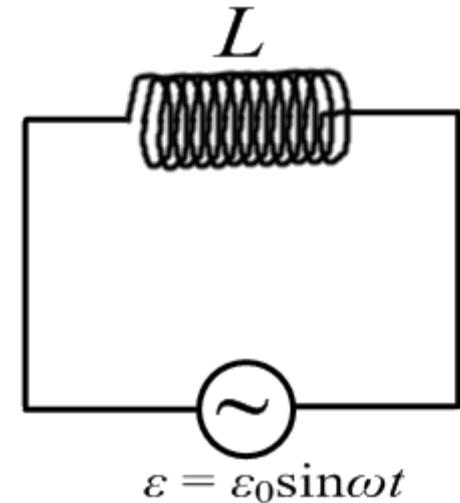
Átrendezve és az idő szerint kiintegrálva kapjuk:

$$I(t) = -\frac{\varepsilon_0}{L\omega} \cos \omega t = \frac{\varepsilon_0}{L\omega} \sin \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right) = I_0 \sin \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right)$$

A feszültség és az áramerősség maximális értékeinek hányadosára bevezetjük az induktív ellenállást:

$$X_L = \frac{\varepsilon_0}{I_0} = L\omega$$

Az áramerősség továbbá  $\pi/2$  fáziskésésben van a tekercsre kapcsolt feszültséghez képest.



# Kondenzátor szinuszos váltakozó feszültségen\*

A kondenzátor a váltakozó feszültség hatására periodikusan feltöltődik és kisül.  
Az általános hurokegyenletet felírva:

$$\frac{Q}{C} = \varepsilon(t) = \varepsilon_0 \sin \omega t$$

Átrendezve és az idő szerint deriválva kapjuk az áramerősséget:

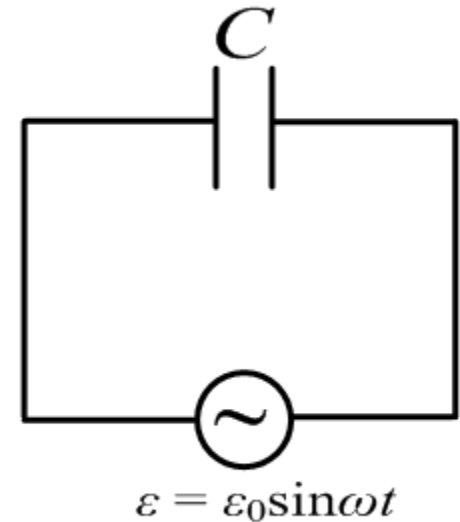
$$I(t) = \frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt} (C\varepsilon_0 \sin \omega t) = C\varepsilon_0 \omega \cos \omega t = I_0 \cos \omega t$$

A feszültség és az áramerősség maximális értékeinek hányadosára bevezetjük a kapacitív ellenállást:

$$X_C = \frac{\varepsilon_0}{I_0} = \frac{1}{C\omega}$$

Az áramerősség továbbá  $\pi/2$  fázissal siet a kondenzátorra kapcsolt feszültséghez képest:

$$I(t) = I_0 \cos \omega t = I_0 \sin \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right)$$





# Soros $RLC$ kör gerjesztett elektromágneses rezgései

Felírva az általános huroktörvényt:

$$IR + L \frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} = \varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cos \omega t$$

Ez szerkezetét tekintve ugyanolyan mint a gerjesztett rezgés mozgásegyenlete:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + Dx = F_0 \cos \omega t$$

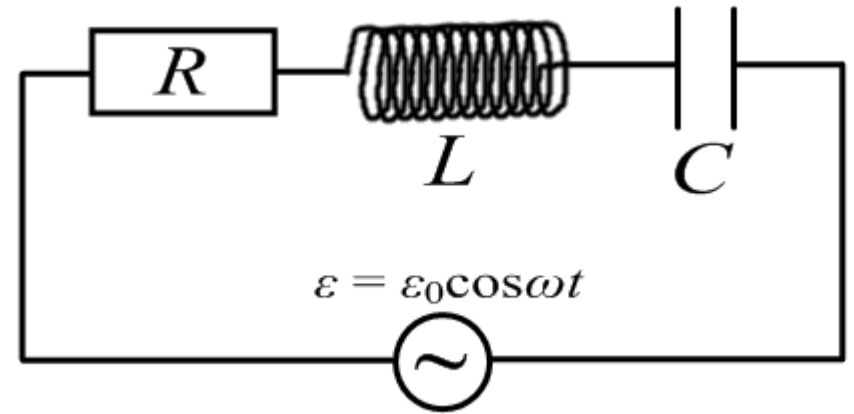
A megfelelő mennyiségek:  $x \rightarrow Q$  ;  $m \rightarrow L$  (tehetetlenség) ;  $b \rightarrow R$  (csillapítás);  
 $D \rightarrow 1/C$  (rúgóállandó)

rezonancia körfrekvencia:  $\omega_r = \sqrt{\frac{D}{m}} \rightarrow \sqrt{\frac{1}{LC}}$

[LÁSD VIDEÓ IDEKATTINVA!](#)

Lederiváljuk az eredeti egyenletet, hogy az áramerősségre kapjunk egy inhomogén másodrendű differenciálegyenletet:

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = -\varepsilon_0 \omega \sin \omega t$$



# Soros $RLC$ kör gerjesztett elektromágneses rezgései

Soros  $RLC$  körben az áramerősségre kaptuk:  $L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = -\varepsilon_0 \omega \sin \omega t$

Ennek megoldása az áramforrással megegyező frekvenciájú, de egy kezdőfázissal eltolt váltóáram:

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t - \varphi)$$

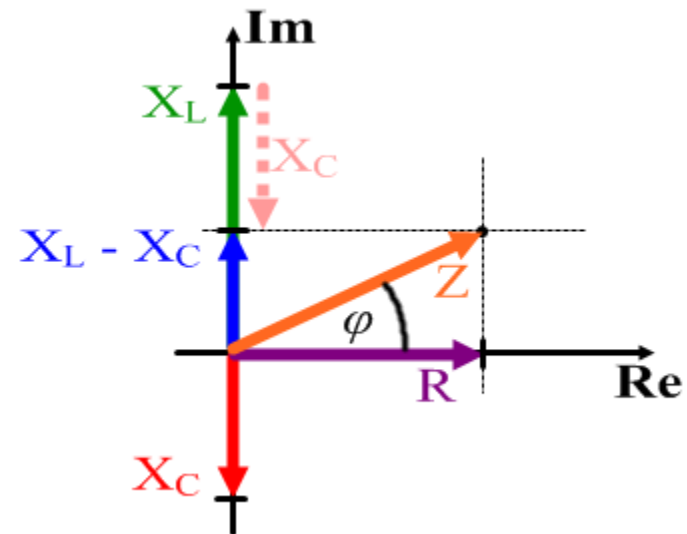
A feszültség és az áramerősség maximális értékeinek hányadosa az **impedancia** ( $Z$ ). Ezzel felírva az Ohm-törvény általános alakja váltóáramú körökre:

$$I_0 = \frac{\varepsilon_0}{Z}$$

Az impedancia az áramkör váltóáramú ellenállása, amely tartalmazza a kapacitív és induktív ellenállások járulékát is. Az impedancia és a fáziskésés kiszámítását segíti a különféle ellenállásokat a komplex síkban ábrázoló fázisábra. Ennek alapján:

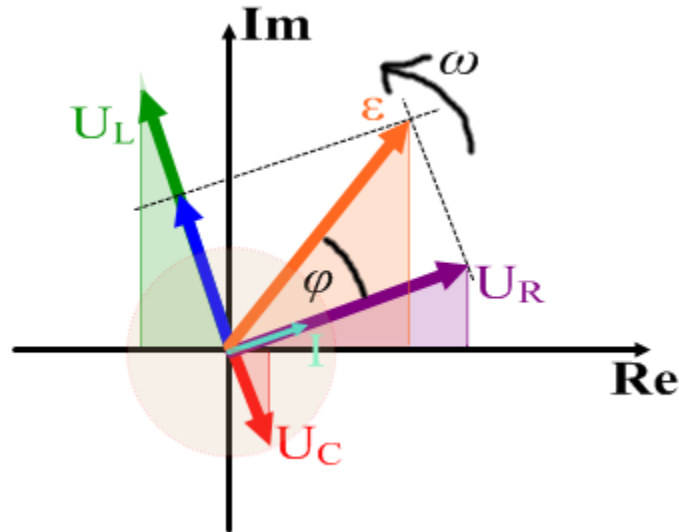
$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

$$\text{és } \operatorname{tg} \varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{\omega C}}{R} \quad \text{vagy} \quad \cos \varphi = \frac{R}{Z}$$



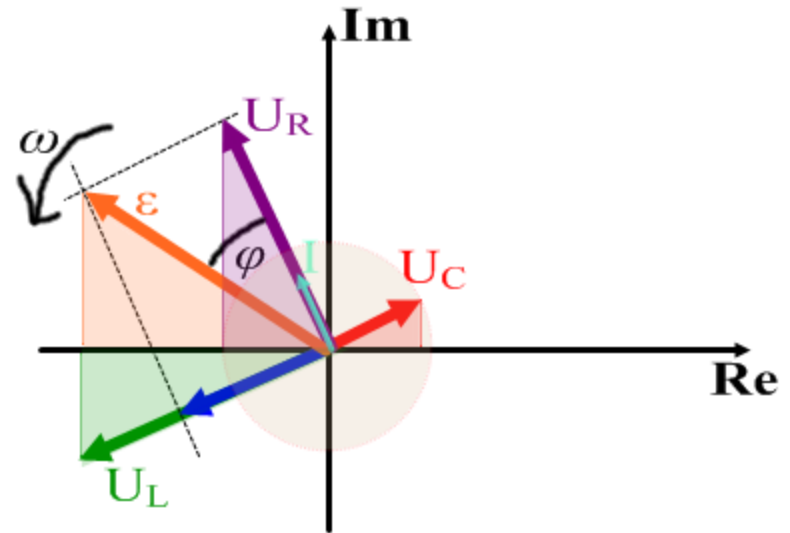
# Feszültség az áramkörü elemeken

Grafikusan a feszültségeket úgy kaphatjuk meg, hogy az impedancia vektorábrán minden ellenállás-jellegű mennyiséget beszorzunk az áramerősséggel.



Látható, hogy az Ohmos ellenálláson a feszültség az áramerősséggel fázisban van, de a kondenzátoron  $\pi/2$ -ővel késik, míg a tekercsen  $\pi/2$  fázissal siet. Az ábra  $\omega$  szögsebességgel forog az origó körül. Egy időpontban a ténylegesen mérhető feszültség a valós tengelyre vett vetület. Az áramerősségre ugyanez vonatkozik.

[Animáció kattintva!](#)



$$U_R(t) = U_{R0} \cos(\omega t - \varphi) \rightarrow U_{R0} = I_0 R$$

$$U_C(t) = U_{C0} \cos\left(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow U_{C0} = \frac{I_0}{C\omega}$$

$$U_L(t) = U_{L0} \cos\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow U_{L0} = I_0 L\omega$$

[Animáció2 kattintva!](#)

## Rezonancia soros $RLC$ körben

A kapacitív és az induktív ellenállások függenek a frekvenciától, ezért az impedancia is frekvenciafüggő:

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

Amikor az impedancia minimális értéket vesz fel az áramerősség a lehető legnagyobb. Rezonancia frekvencia az a frekvencia amelynél az impedancia minimális és (áram)rezonancia lép fel. Látható, hogy ez akkor igaz amikor:

$$L\omega_r = \frac{1}{\omega_r C} \rightarrow \omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Látható, hogy ekkor a kondenzátor és a tekercs éppen kiejtik egymás hatását, tehát az áram fáziskésése nulla lesz, az impedancia pedig egyszerűen az ohmos ellenállással lesz egyenlő:

$$\operatorname{tg} \varphi_r = \frac{L\omega_r - \frac{1}{\omega_r C}}{R} = 0 \rightarrow \varphi_r = 0$$

$$Z_r = \sqrt{R^2 + (0)^2} = \sqrt{R^2} = R$$

# Teljesítmény soros *RLC* körben

Az áramforrás pillanatnyi teljesítménye:  $P(t) = \varepsilon(t)I(t) = \varepsilon_0 \cos \omega t I_0 \cos(\omega t - \varphi)$

Ezt átalakítjuk trigonometrikus összefüggések felhasználásával:

$$\begin{cases} \cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ \cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \end{cases} +$$

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2\cos\alpha\cos\beta$$

$$\frac{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)}{2} = \cos\alpha\cos\beta$$

Legyenek:  $\alpha = \omega t$  és  $\beta = \omega t - \varphi$   $\frac{\cos(2\omega t - \varphi) + \cos \varphi}{2} = \cos\omega t \cos(\omega t - \varphi)$

Tehát a pillanatnyi teljesítmény:  $P(t) = \frac{\varepsilon_0 I_0}{2} [\cos(2\omega t - \varphi) + \cos \varphi]$

Az átlagteljesítmény ennek az időátlaga, de az első tag egész periódusokra vett integrálja nulla. A második (konstans) tag időátlaga önmaga:

$$\bar{P} = \frac{\varepsilon_0 I_0}{2} \cos \varphi = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{2}} \frac{I_0}{\sqrt{2}} \cos \varphi = \varepsilon_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \frac{R}{Z} = I_{\text{eff}}^2 R$$

ez rezonancia esetén a legnagyobb

SOROS és PÁRHUZAMOS  
RLC körös példák:  
[VIDEÓ IDEKATTITVA!](#)

# A transzformátor

A primer kör tekercse egy váltóáramú áramforrásra van kapcsolva:

$$U_1(t) = U_{1,0} \sin \omega t$$

Ennek hatására az áram a primer körben (elhanyagolható ohmos ellenállás):

$$I_1(t) = -\frac{U_{1,0}}{L_1 \omega} \cos \omega t \quad L_1 = \frac{\mu N_1^2 A_1}{l_1}$$

A primer tekercsben a mágneses indukció:

$$B_1(t) = \frac{\mu N_1 I_1}{l_1} = \mu N_1 \frac{U_{1,0}/l_1}{\frac{\mu N_1^2 A_1}{l_1} \omega} (-\cos \omega t)$$

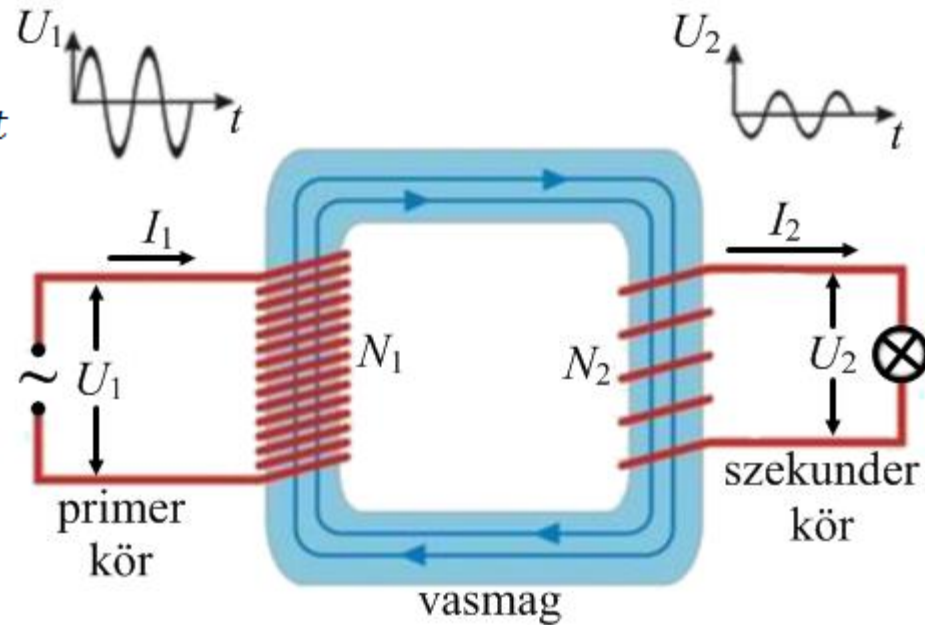
$$B_1(t) = \frac{U_{1,0}}{N_1 A_1 \omega} (-\cos \omega t)$$

A szekunder tekercsben az indukálódott feszültség:

Tehát:  $\frac{U_{2,0}}{U_{1,0}} = \frac{N_2}{N_1}$

Mivel  $P_{1,0} = P_{2,0} \rightarrow U_{1,0} I_{1,0} = U_{2,0} I_{2,0}$

Feszültség feltranszformálásakor az áram letranszformálódik és fordítva:  $\frac{I_{1,0}}{I_{2,0}} = \frac{N_2}{N_1}$



Az indukcióvonalak a vasmagban haladnak ezért a menetfluxus nem változik:

$$B_2 A_2 = B_1 A_1 = \frac{U_{1,0}}{N_1 \omega} (-\cos \omega t)$$

$$U_2(t) = -\frac{d\Phi_2}{dt} = -\frac{d(N_2 A_2 B_2)}{dt} = -\frac{N_2}{N_1} U_{1,0} \sin \omega t$$

# Az Ampère-Maxwell-féle gerjesztési törvény

Maxwell elméleti megfontolások alapján feltételezte, hogy a változó elektromos tér örvényes mágneses teret kelt (hasonlóan ahhoz ahogyan a változó mágneses tér kelt elektromos teret).

Az Ampère-féle gerjesztési törvényt kiegészítette még egy taggal, amit **eltolási áram**nak nevezett el:

$$\oint_g \vec{H} \cdot d\vec{s} = \sum_i I_i + \frac{d}{dt} \int_F \vec{D} \cdot d\vec{A}$$

Felhasználva az elektromos indukciófluxus definícióját:  $\oint_g \vec{H} \cdot d\vec{s} = \sum_i I_i + \frac{d\Psi}{dt}$

Az eltolási áram nem jár töltések áramlásával.

Az első tagban  $I_i$  a vezetési áram.

Példa: Kondenzátor feltöltésénél (ill. kisülésénél) a lemezek közötti változó elektromos tér is ugyanúgy mágneses teret hoz létre mint a lemezekhez futó zsinórokban folyó vezetési áram a vezetékek körül.

A Stokes-tétel és az áramsűrűség felhasználásával egy időben állandó kicsiny  $F$  felületre:

$$\int_F \text{rot} \vec{H} \cdot d\vec{A} = \int_F \vec{j} \cdot d\vec{A} + \int_F \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{A} \rightarrow \text{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (\text{lokális vagy differenciális alak})$$

# A Maxwell-egyenletek rendszere

A XIX. század legnagyobb hatású eredménye, az elektromágneses hullámok elméleti alapja.

1. Az Ampère-Maxwell-féle gerjesztési törvény:

$$\oint_g \vec{H} \cdot d\vec{s} = \sum_i I_i + \frac{d}{dt} \int_F \vec{D} \cdot d\vec{A} \rightarrow \text{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

integrális alak

differenciális alak

A mozgó töltések és az időben változó elektromos tér örvényes mágneses teret keltenek.

2. Faraday-Lenz féle indukciós törvény:

$$\oint_g \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \int_F \vec{B} \cdot d\vec{A} \rightarrow \text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

integrális alak

differenciális alak

Az időben változó mágneses tér örvényes elektromos teret kelt.



# A Maxwell-egyenletek rendszere

3. Az elektromos Gauss-törvény:

$$\oint_F \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q \quad \rightarrow \quad \operatorname{div} \vec{D} = \rho$$

integrális alak      differenciális alak

Az elektromos tér forrásai a töltések.

4. A mágneses Gauss-törvény:

$$\oint_F \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 \quad \rightarrow \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0$$

integrális alak      differenciális alak

A mágneses térnek nincsenek forrásai (nincsenek monopólusok).

Szükség van még az alábbi egyenletekre:

---

Lineáris anyagegyenletek:  $\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$  és  $\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}$  (csak közelítő jellegűek)

Differenciális Ohm-törvény:  $\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{E}^*)$

[3/4. alkalom VIDEÓK:](#)

[1. rész](#)   [2. rész](#)

[4/4. alkalom VIDEÓK:](#)

[1. rész](#)   [2. rész](#)