Huroktörvény általánosítása változó áramra

A tekercsben indukálódott elektromotoros erő:

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_F \vec{B}\cdot d\vec{A} = -L\frac{d\mathrm{I}}{dt}$$

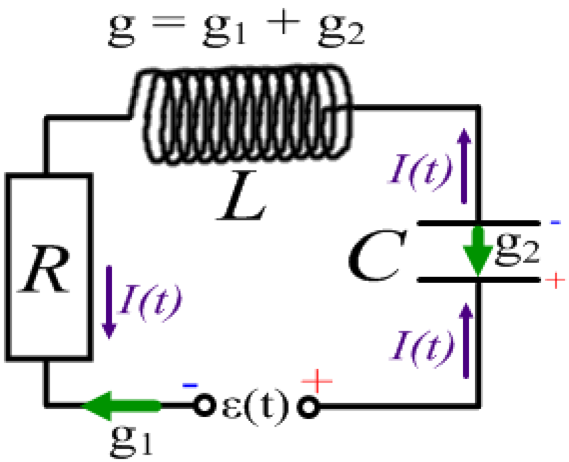
A tekercs L önindukciós együtthatója egyben a kör önindukciós együtthatója.

A kondenzátoron eső feszültség (g_2 görbe):

$$U = \frac{Q}{C}$$

A $g = g_1 + g_2$ zárt görbe mentén kiintegrálva az elektromos térerősséget (nem nulla, mert az indukált tér örvényes és nem konzervatív):

$$IR + \frac{Q}{C} - \varepsilon = \varepsilon_i$$



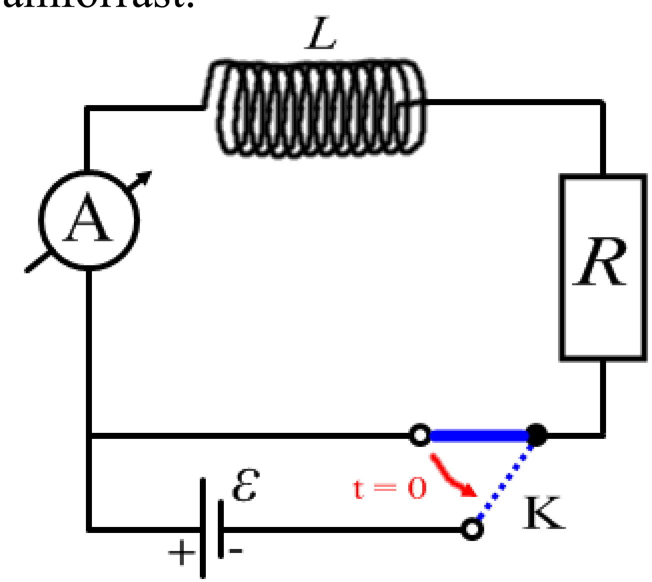
Valamilyen t időben $I(t)$ áram folyik.

Tehát a huroktörvény általánosított egyenlete soros *RLC* körre:

$$IR + L\frac{d\mathrm{I}}{dt} + \frac{Q}{C} = \varepsilon$$

Bekapcsolási jelenségek *RL* körben

A K kapcsolóval a $t = 0$ időpontban rákapcsoljuk a körre az áramforrást.
Az *RL* körre felírva az általános huroktörvényt:



$$IR + L\frac{dI}{dt} = \varepsilon$$

Átrendezve és szétválasztva a változókat:

$$\frac{1}{L}dt = \frac{dI}{\varepsilon - IR}$$

Kiintegráljuk mindkét oldalt $t = 0$ és egy t idő között, miközben az áramerősség 0-ról I-re nő:

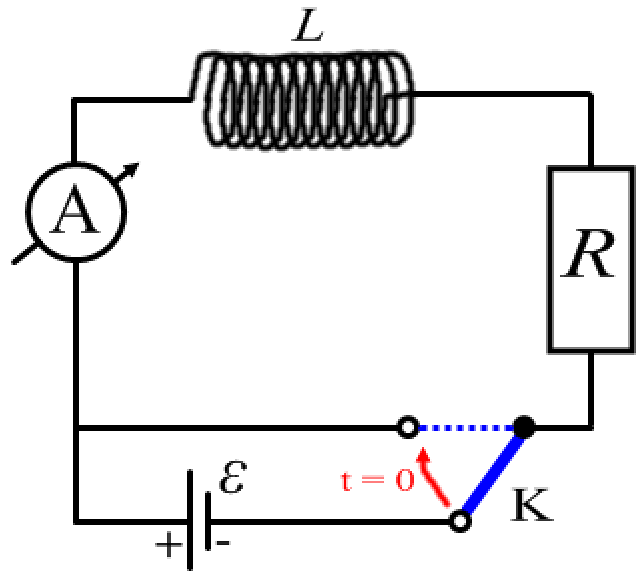
$$\int_0^t \frac{1}{L}dt = \int_0^I \frac{dI}{\varepsilon - IR} \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{L}t = \left[\frac{-\ln(\varepsilon - IR)}{R}\right]_0^I = \frac{-\ln(\varepsilon - IR)}{R} + \frac{\ln\varepsilon}{R}$$

$$-\frac{R}{L}t = \ln\frac{\varepsilon - IR}{\varepsilon} \quad \longrightarrow \quad e^{-\frac{R}{L}t} = \frac{\varepsilon - IR}{\varepsilon} \quad \longrightarrow \quad \frac{\varepsilon}{R}e^{-\frac{R}{L}t} = \frac{\varepsilon}{R} - I$$

Tehát az áramerősség az idő függvényében: $I = \frac{\varepsilon}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$

Kikapcsolási jelenségek *RL* körben

A K kapcsolóval a $t = 0$ időpontban lekapcsoljuk a körről az áramforrást.
Az *RL* körre felírva az általános huroktörvényt:



$$IR + L\frac{dI}{dt} = 0$$

Átrendezve és szétválasztva a változókat:

$$-\frac{R}{L}dt = \frac{dI}{I}$$

Kiintegráljuk mindkét oldalt $t = 0$ és egy t idő között,
miközben az áramerősség $I_0 = \varepsilon/R$-ről I-re csökken:

$$\int_0^t -\frac{R}{L}dt = \int_{I_0}^{I} \frac{dI}{I} \longrightarrow -\frac{R}{L}t = \ln I - \ln I_0$$

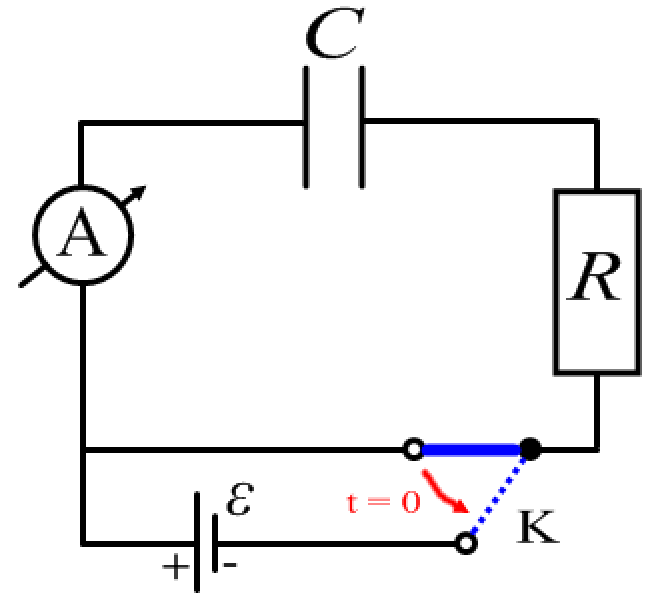
$$-\frac{R}{L}t = \ln\frac{I}{I_0} \longrightarrow e^{-\frac{R}{L}t} = \frac{I}{I_0}$$

Tehát az áramerősség az idő függvényében: $I = \frac{\varepsilon}{R}e^{-\frac{R}{L}t} = \frac{\varepsilon}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}$ $\qquad \tau = \frac{L}{R}$

Az *RL* kör időállandója τ adja meg, hogy mennyi idő alatt esik az áram e-ad részére.

Bekapcsolási jelenségek *RC* körben

A K kapcsolóval a $t = 0$ időpontban rákapcsoljuk a körre az áramforrást.
Az *RC* körre felírva az általános huroktörvényt:



$$IR + \frac{Q}{C} = \varepsilon \qquad \left(I = \frac{dQ}{dt}\right) \qquad \longrightarrow \qquad R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = \varepsilon$$

Átrendezve és szétválasztva a változókat:

$$\frac{dt}{RC} = \frac{dQ}{\varepsilon C - Q}$$

Kiintegráljuk mindkét oldalt $t = 0$ és egy t idő között,
miközben az töltés 0-ról Q-ra nő:

$$\int_0^t \frac{dt}{RC} = \int_0^Q \frac{dQ}{\varepsilon C - Q} \longrightarrow \qquad \frac{t}{RC} = \left[-\ln(\varepsilon C - Q)\right]_0^Q = \ln\varepsilon C - \ln(\varepsilon C - Q)$$

$$-\frac{t}{RC} = \ln\frac{\varepsilon C - Q}{\varepsilon C} \longrightarrow e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{\varepsilon C - Q}{\varepsilon C} \longrightarrow Q = \varepsilon C\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

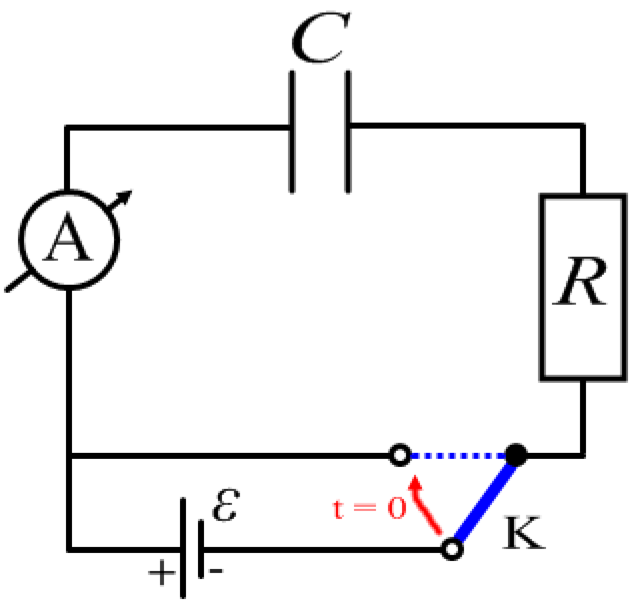
Deriválva az idő szerint: $I = \dfrac{dQ}{dt} = \dfrac{\varepsilon C}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} = \dfrac{\varepsilon}{R} e^{-\frac{t}{RC}} = \dfrac{\varepsilon}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad \tau = RC$

A τ időállandó adja meg, hogy mennyi idő alatt esik a töltő áram *e*-ad részére.

Kikapcsolási jelenségek *RC* körben

A K kapcsolóval a $t = 0$ időpontban lekapcsoljuk az áramforrást és kisütjük a kondenzátort. Az *RC* körre felírva az általános huroktörvényt:

$$R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = 0 \quad \left(I = \frac{dQ}{dt}\right) \quad \rightarrow \quad -Q = RC\frac{dQ}{dt}$$



Átrendezve és szétválasztva a változókat:

$$-\frac{dt}{RC} = \frac{dQ}{Q}$$

Kiintegráljuk mindkét oldalt $t = 0$ és egy t idő között, miközben az töltés $Q_0 = \varepsilon C$-ről Q-ra csökken:

$$\int_0^t -\frac{dt}{RC} = \int_{Q_0}^{Q} \frac{dQ}{Q} \quad \rightarrow \quad -\frac{t}{RC} = \ln Q - \ln Q_0$$

$$-\frac{t}{RC} = \ln\frac{Q}{Q_0} \quad \rightarrow \quad e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{Q}{Q_0} \quad \rightarrow \quad Q = Q_0 e^{-\frac{t}{RC}} = \varepsilon C e^{-\frac{t}{RC}}$$

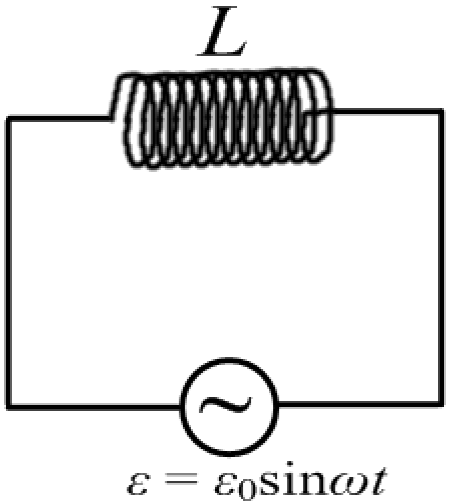
Deriválva az idő szerint: $I = -\dfrac{dQ}{dt} = \dfrac{\varepsilon C}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} = \dfrac{\varepsilon}{R} e^{-\frac{t}{RC}} = \dfrac{\varepsilon}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad \tau = RC$

A τ időállandó adja meg, hogy mennyi idő alatt esik a kisütő áram *e*-ad részére.
A negatív jel most azért kell, mert a töltés csökken de mi szeretnénk pozitív értékeket.

Ideális tekercs szinuszos váltakozó feszültségen

A körre most is az általános huroktörvényt írjuk fel figyelembe véve hogy az elektromotoros erő most függ az időtől:

$$L\frac{dI}{dt} = \varepsilon(t) = \varepsilon_0 \sin \omega t$$



Átrendezve és az idő szerint kiintegrálva kapjuk:

$$I(t) = -\frac{\varepsilon_0}{L\omega}\cos \omega t = \frac{\varepsilon_0}{L\omega}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = I_0 \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

A feszültség és az áramerősség maximális értékeinek hányadosára bevezetjük az induktív reaktanciát:

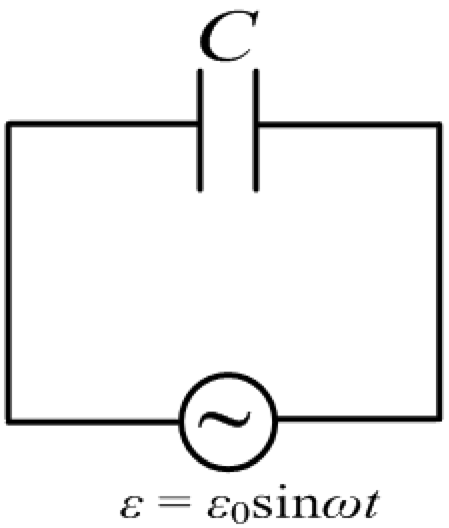
$$X_L = \frac{\varepsilon_0}{I_0} = L\omega$$

Az áramerősség továbbá $\pi/2$ fáziskésésben van a tekercsre kapcsolt feszültséghez képest.

Kondenzátor szinuszos váltakozó feszültségen

A kondenzátor a váltakozó feszültség hatására periodikusan feltöltődik és kisül.
Az általános hurokegyenletet felírva:

$$\frac{Q}{C} = \varepsilon(t) = \varepsilon_0 \sin \omega t$$



Átrendezve és az idő szerint deriválva kapjuk az áramerősséget:

$$I(t) = \frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt}(C\varepsilon_0 \sin \omega t) = C\varepsilon_0 \omega \cos \omega t = I_0 \cos \omega t$$

A feszültség és az áramerősség maximális értékeinek hányadosára bevezetjük a kapacitív reaktanciát:

$$X_C = \frac{\varepsilon_0}{I_0} = \frac{1}{C\omega}$$

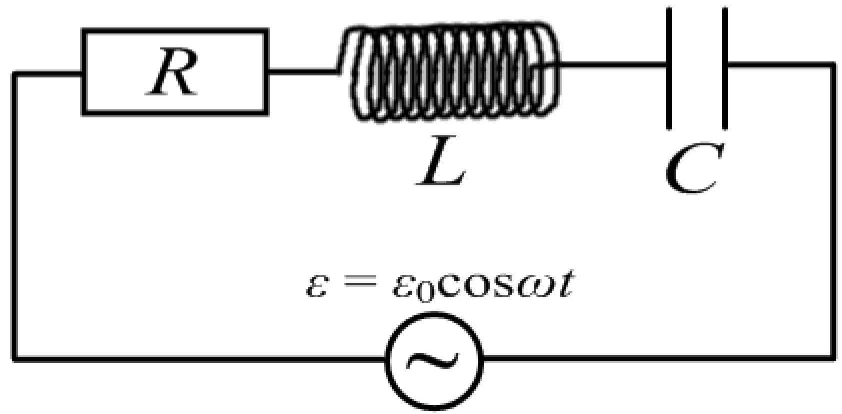
Az áramerősség továbbá π/2 fázissal siet a kondenzátorra kapcsolt feszültséghez képest:

$$I(t) = I_0 \cos \omega t = I_0 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Soros *RLC* kör gerjesztett elektromágneses rezgései

Felírva az általános huroktörvényt:

$$IR + L\frac{d\mathrm{I}}{dt} + \frac{Q}{C} = \varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cos \omega t$$



Ez szerkezetét tekintve ugyanolyan mint a gerjesztett rezgés mozgásegyenlete:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + Dx = F_0 \cos \omega t$$

<u>A megfelelő mennyiségek</u>: x → Q ; m → L (tehetetlenség) ; b → R (csillapítás); D → 1/C (rúgóállandó)

rezonancia körfrekvencia: $\omega_r = \sqrt{\frac{D}{m}} \rightarrow \sqrt{\frac{1}{LC}}$

LÁSD VIDEÓ IDEKATTINVA!

Lederiváljuk az eredeti egyenletet, hogy az áramerősségre kapjunk egy inhomogén másodrendű differenciálegyenletet:

$$L\frac{d^2\mathrm{I}}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = -\varepsilon_0 \omega \sin \omega t$$

Soros *RLC* kör gerjesztett elektromágneses rezgései

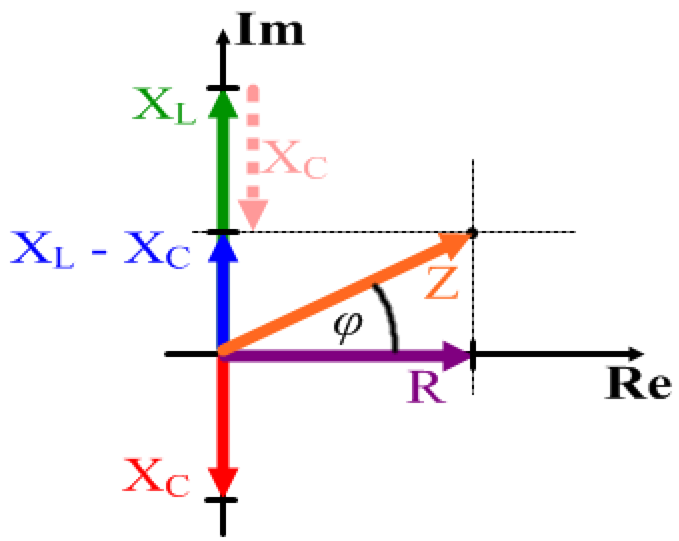
Soros RLC körben az áramerősségre kaptuk: $L\dfrac{d^2\mathrm{I}}{dt^2} + R\dfrac{dI}{dt} + \dfrac{I}{C} = -\varepsilon_0\omega\sin\omega t$

Ennek megoldása az áramforrással megegyező frekvenciájú, de egy kezdőfázissal eltolt váltóáram:

$$I(t) = I_0\cos(\omega t - \varphi)$$

A feszültség és az áramerősség maximális értékeinek hányadosa az **impedancia** (*Z*). Ezzel felírva az Ohm-törvény általános alakja váltóáramú körökre:

$$I_0 = \frac{\varepsilon_0}{Z}$$



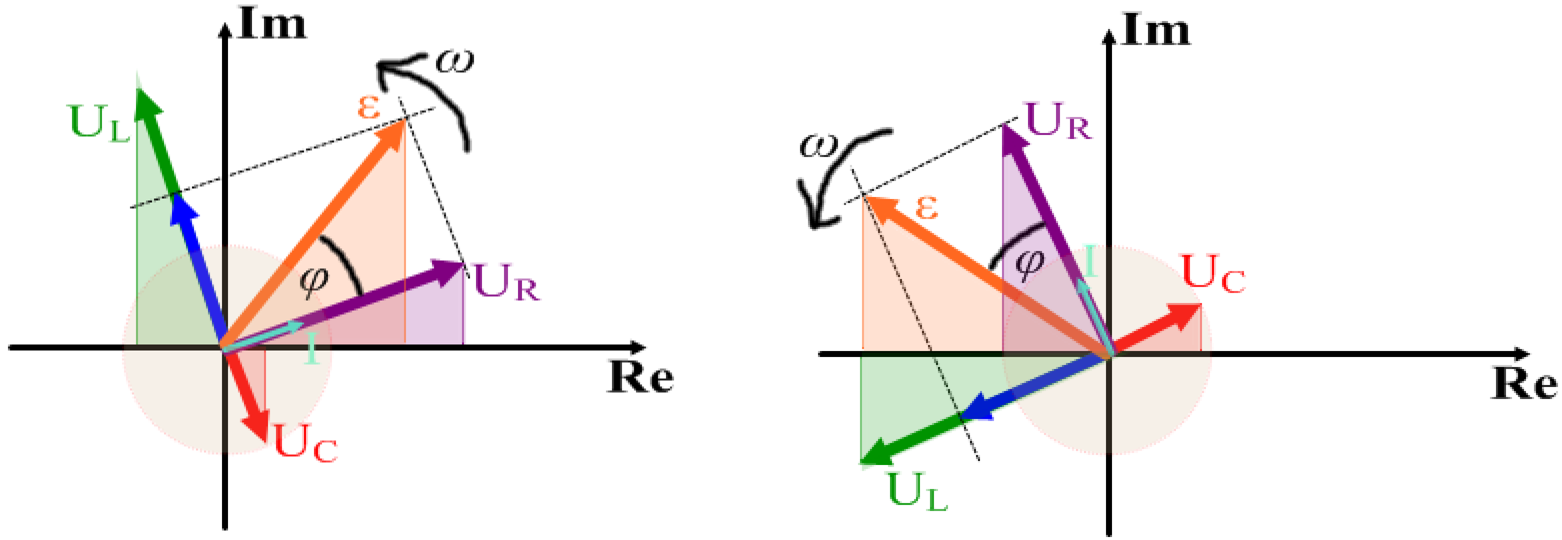
Az impedancia az áramkör váltóáramú „ellenállása”, amely tartalmazza a kapacitív és induktív reaktanciák járulékát is. Az impedancia és a fáziskésés kiszámítását segíti a különféle ellenállásokat a komplex síkban ábrázoló fázisábra. Ennek alapján:

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

és $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{L\omega - \dfrac{1}{\omega C}}{R}$ vagy $\cos\varphi = \dfrac{R}{Z}$

Feszültség az áramköri elemeken

Grafikusan a feszültségeket úgy kaphatjuk meg, hogy az impedancia vektorábrán minden ellenállás-jellegű mennyiséget beszorzunk az áramerősséggel.



Látható, hogy az Ohmos ellenálláson a feszültség az áramerősséggel fázisban van, de a kondenzátoron π/2-ővel késik, míg a tekercsen π/2 fázissal siet. Az ábra ω szögsebességgel forog az origó körül. Egy időpontban a ténylegesen mérhető feszültség a valós tengelyre vett vetület. Az áramerősségre ugyanez vonatkozik.

$$U_R(t) = U_{R0}\cos(\omega t - \varphi) \rightarrow U_{R0} = I_0 R$$

$$U_C(t) = U_{C0}\cos\left(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow U_{C0} = \frac{I_0}{C\omega}$$

$$U_L(t) = U_{L0}\cos\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow U_{L0} = I_0 L\omega$$

Rezonancia soros *RLC* körben

A kapacitív és az induktív reaktanciák függnek a frekvenciától, ezért az impedancia is frekvenciafüggő:

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

Amikor az impedancia minimális értéket vesz fel az áramerősség a lehető legnagyobb. Rezonancia frekvencia az a frekvencia amelynél az impedancia minimális és (áram)rezonancia lép fel. Látható, hogy ez akkor igaz amikor:

$$L\omega_r = \frac{1}{\omega_r C} \to \omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Látható, hogy ekkor a kondenzátor és a tekercs éppen kiejtik egymás hatását, tehát az áram fáziskésése nulla lesz, az impedancia pedig egyszerűen az ohmos ellenállással lesz egyenlő:

$$\operatorname{tg}\varphi_r = \frac{L\omega_r - \frac{1}{\omega_r C}}{R} = 0 \to \varphi_r = 0 \qquad Z_r = \sqrt{R^2 + (0)^2} = \sqrt{R^2} = R$$

Teljesítmény soros *RLC* körben

Az áramforrás pillanatnyi teljesítménye: $P(t) = \varepsilon(t)I(t) = \varepsilon_0 \cos\omega t \, I_0 \cos(\omega t - \varphi)$

Ezt átalakítjuk trigonometrikus összefüggések felhasználásával:

$$\begin{cases} \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ \cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \end{cases} \quad +$$

SOROS és PÁRHUZAMOS RLC körös példák: VIDEÓ IDEKATTITVA!

$$\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\cos\beta$$

$$\frac{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)}{2} = \cos\alpha\cos\beta$$

Legyenek: $\alpha = \omega t$ és $\beta = \omega t - \varphi$ $\quad \dfrac{\cos(2\omega t - \varphi) + \cos\varphi}{2} = \cos\omega t \cos(\omega t - \varphi)$

Tehát a pillanatnyi teljesítmény: $P(t) = \dfrac{\varepsilon_0 I_0}{2}[\cos(2\omega t - \varphi) + \cos\varphi]$

Az átlagteljesítmény ennek az időátlaga, de az első tag egész periódusokra vett integrálja nulla. A második (konstans) tag időátlaga önmaga:

$$\bar{P} = \frac{\varepsilon_0 I_0}{2}\cos\varphi = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{2}}\frac{I_0}{\sqrt{2}}\cos\varphi = \varepsilon_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \frac{R}{Z} = {I_{\text{eff}}}^2 R$$

ez rezonancia esetén a legnagyobb

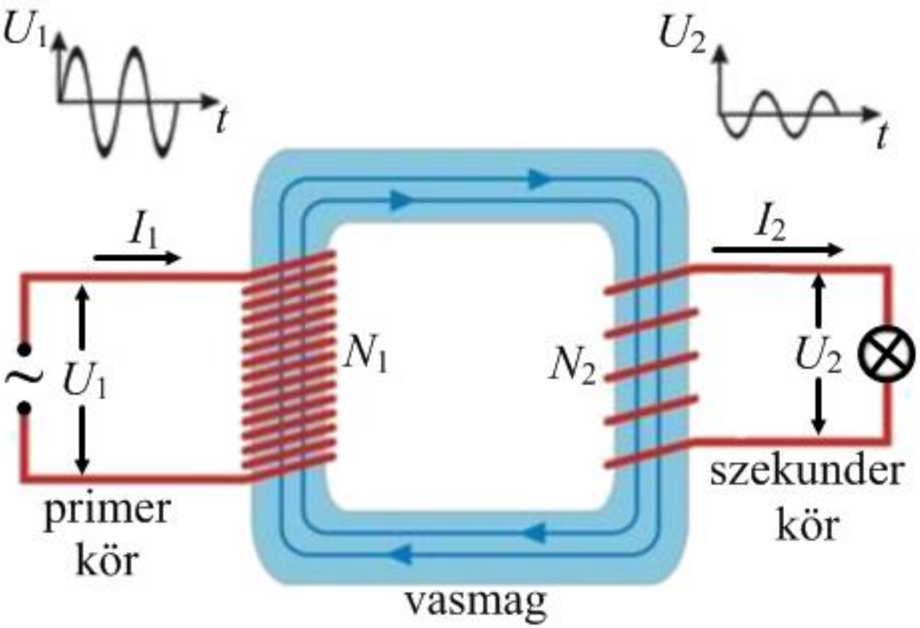
Ezt hívják P_h hatásos teljesítménynek. A $\cos\varphi = R/Z$ szorzó pedig a teljesítménytényező.

Látszólagos teljesítmény: $P_l = \varepsilon_{\text{eff}} I_{\text{eff}}$ Meddő teljesítmény: $P_m = \varepsilon_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \sin\varphi$

A transzformátor

A primer kör tekercse egy váltóáramú áramforrásra van kapcsolva:

$$U_1(t) = U_{1,0}\sin\omega t$$



Ennek hatására az áram a primer körben (elhanyagolható ohmos ellenállás):

$$I_1(t) = -\frac{U_{1,0}}{L_1\omega}\cos\omega t \qquad L_1 = \frac{\mu N_1{}^2 A_1}{l_1}$$

A primer tekercsben a mágneses indukció:

$$B_1(t) = \frac{\mu N_1 I_1}{l_1} = \mu N_1 \frac{U_{1,0}/l_1}{\frac{\mu N_1{}^2 A_1}{l_1}\omega}(-\cos\omega t)$$

$$B_1(t) = \frac{U_{1,0}}{N_1 A_1 \omega}(-\cos\omega t)$$

Az indukcióvonalak a vasmagban haladnak ezért a menetfluxus nem változik:

$$B_2 A_2 = B_1 A_1 = \frac{U_{1,0}}{N_1\omega}(-\cos\omega t)$$

A szekunder tekercsben az indukálódott feszültség:

$$U_2(t) = -\frac{d\Phi_2}{dt} = -\frac{d(N_2 A_2 B_2)}{dt} = -\frac{N_2}{N_1}U_{1,0}\sin\omega t$$

Tehát: $\dfrac{U_{2,0}}{U_{1,0}} = \dfrac{N_2}{N_1}$ Mivel $P_{1,0} = P_{2,0} \rightarrow U_{1,0}I_{1,0} = U_{2,0}I_{2,0}$

Feszültség feltranszformálásakor az áram letranszformálódik és fordítva: $\dfrac{I_{1,0}}{I_{2,0}} = \dfrac{N_2}{N_1}$