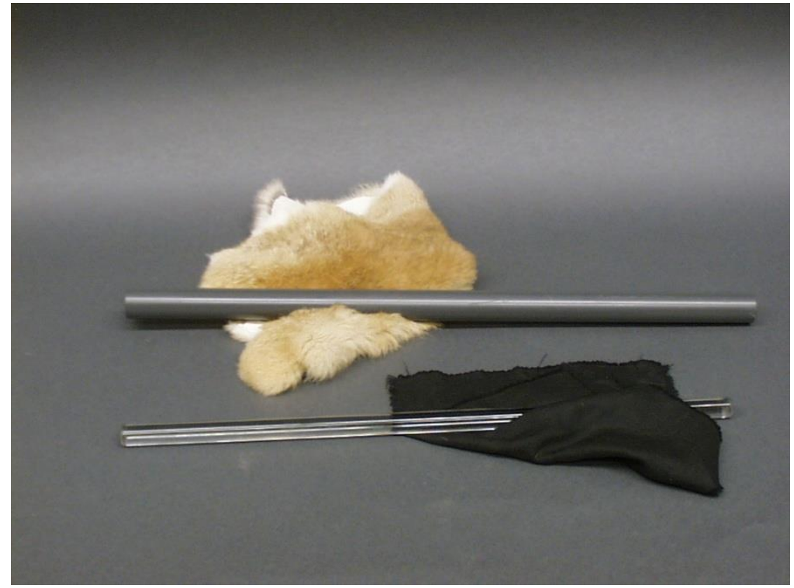
Elektrosztatikai jelenségek



Ebonit vagy üveg rudat megdörzsölve az az apró tárgyakat magához vonzza.

Két selyemmel megdörzsölt üvegrúd között taszítás, üvegrúd és gyapjúval megdörzsölt borostyánkő között vonzás lép fel.

Kétféle elektromos állapot.

Megdörzsölt üvegrúd pozitív.
Borostyán negatív.

Elektromos töltés: milyen mértékben vesz rész egy test az elektromos kölcsönhatásban.
Jele: Q SI mértékegysége: C (coulomb)

Egynemű töltések között taszítás, ellenkező neműek között vonzás.

Elektromos töltések szétválasztása

Semleges test: pozitív és negatív töltések egyenlő mértékben vannak jelen.

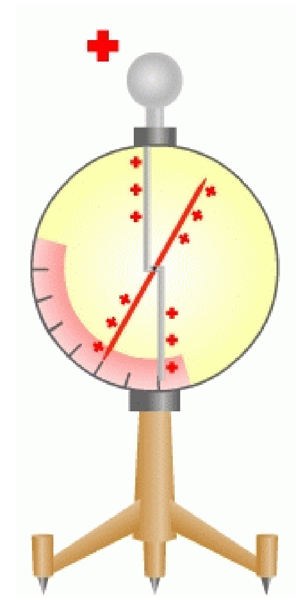
A töltés **megmaradó mennyiség**, viszont szétválasztható.
Elektromos megosztás, vagy influencia.

Vezetők: a töltések szabadon elmozdulhatnak.
(pl. fémek; sók, savak, bázisok vizes oldatai)

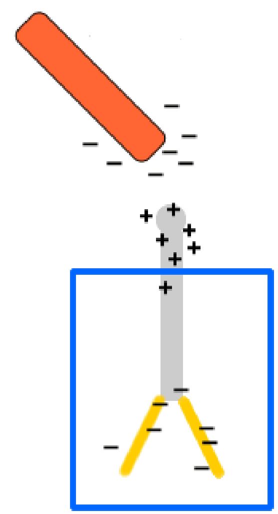
Szigetelők: a töltések csak néhány nanométert mozdulhatnak el.
(polarizáció). (pl. kvarc, gumi, ebonit, porcelán)

A töltések fizikai kontaktus során átvihetők egyik testről a másikra.
Vezető esetén a töltés szétterjed a test teljes felületére.

Töltött test közelében lévő fémben a töltések megoszlanak.



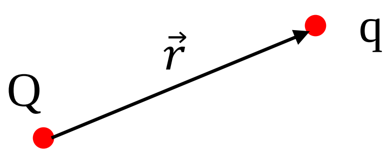
elektroszkóp



Coulomb törvény

Inerciarendszerben nyugvó, pontszerű elektromos töltésekre:

q: próbatöltés



$$\vec{F}_q = k\frac{Qq}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} = k\frac{Qq}{r^2}\vec{e}_r$$

k: Coulomb állandó

$$k \approx 9 \cdot 10^9 \frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{C}^2}$$

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \quad \text{ahol}$$

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi k} \approx 8{,}85 \cdot 10^{-12}\ \frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{Nm}^2}$$

a vákuum permittivitás, vagy a vákuum dielektromos állandója.

Mivel a *q*-ra ható erő nagysága csak a távolságtól függ, iránya pedig centrális, így az erőtér konzervatív.
(mint a gravitáció)

Newton 4. axióma:
Bármely töltéselrendezés erőtere is konzervatív.

$$\vec{F}_e = \sum_i \vec{F}_i$$

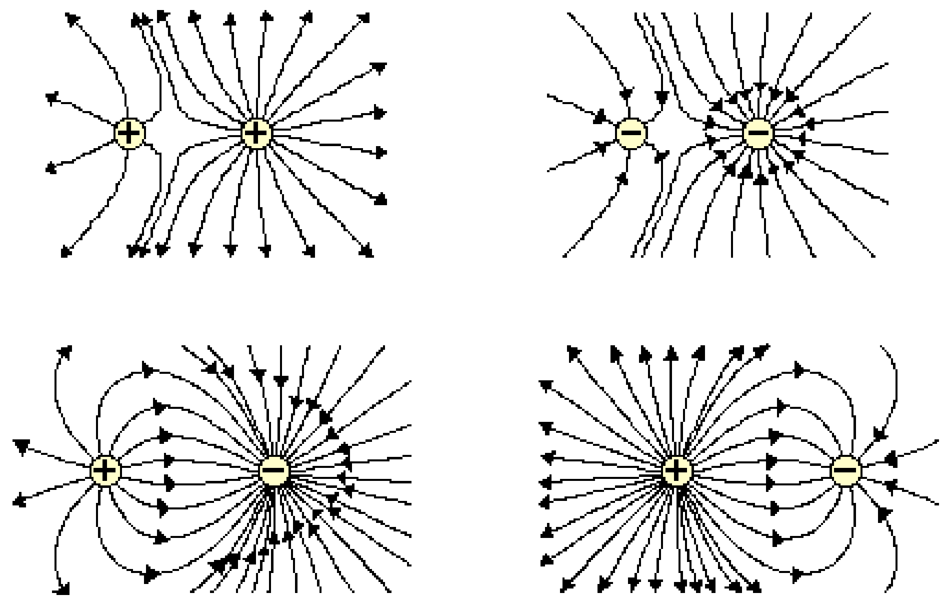
Az elektromos térerősség

Az **elektromos térerősség** a próbatöltéstől független, egy P pontban csak a teret jellemző mennyiség:

$$\vec{E}(P) = \frac{\vec{F}_q(P)}{q} \qquad \text{Mértékegysége: } \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}} \text{ vagy } \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$$

Térerősség érzékeltetésére az erővonalakat használjuk
- iránya a vonalakkal párhuzamos minden pontban
- nagysága a vonalak sűrűségével van jelölve
- pozitív töltésekről indulnak, negatív töltéseken végződnek

<u>Szuperpozíció:</u> két vagy több töltés esetén a térerősség az egyes töltések által létrehozott térerősségek vektori összege.



A q-ra ható eredő erő :

$$\vec{F}_e = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_N$$

$$q\vec{E} = q\vec{E}_1 + q\vec{E}_2 + \cdots + q\vec{E}_N$$

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \cdots + \vec{E}_N$$

Elektromos feszültség

Az elektrosztatikus tér munkája a *q* próbatöltésen amíg az *A*-ból *B*-be jut:

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B q\vec{E} \cdot d\vec{r} = q \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

A **feszültség** az egységnyi próbatöltésen végzett munka:

$$U_{AB} = \frac{W_{AB}}{q} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

Mértékegysége: V

Homogén térben, azzal egyirányú *d* elmozdulás esetén: $U = Ed$

Az elektromos feszültség csak a térre és a két pontra jellemző mennyiség.

Potenciális energia és potenciál

Konzervatív erőtérben a tér által az *A* és *B* pontok között végzett munka megegyezik a kezdő és végpontbeli potenciális energia különbségével:

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = E_P(A) - E_P(B)$$

Az egységnyi pozitív töltésre jutó potenciális energia a **potenciál**:

$$U_A = \frac{E_P(A)}{q}$$

Két pontban vett potenciálok különbsége a két pont közötti feszültség:

$$U_A - U_B = U_{AB} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

Az elektrosztatikus potenciált általában (véges töltéseloszlások esetén) a végtelenben vehetjük zérusnak:

$$U_A = \int_A^\infty \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

Hasonlóan: $E_P(A) = \int_A^\infty \vec{F} \cdot d\vec{r}$

A potenciális energia és a potenciál gradiense

Az erő mindig az alacsonyabb potenciális energiájú hely irányába hat, és annál nagyobb minél nagyobb az egységnyi hosszra eső energiaváltozás:

$$\vec{F} = -gradE_P = -\nabla E_P = (-\frac{\partial E_P}{\partial x}, -\frac{\partial E_P}{\partial y}, -\frac{\partial E_P}{\partial z})$$

A q próbatöltéssel végigosztva kapjuk a térerősségre:

$$\vec{E} = -gradU = -\nabla U = (-\frac{\partial U}{\partial x}, -\frac{\partial U}{\partial y}, -\frac{\partial U}{\partial z})$$

<u>Példa:</u>

Az elektrosztatikus potenciál az $U = b(3x^2 + 4z)$ módon függ a koordinátáktól (vagyis a helytől). Mekkora és milyen irányú a térerősség az origóban és a (2, 1, 0) pontban?

$$\vec{E} = -\nabla[b(3x^2 + 4z)] = -b\nabla(3x^2 + 4z) =$$

$$= -b\left[\frac{\partial(3x^2 + 4z)}{\partial x}, \frac{\partial(3x^2 + 4z)}{\partial y}, \frac{\partial(3x^2 + 4z)}{\partial z}\right] =$$

$$= -b(6x, 0,4) = -6bx\vec{\imath} - 4b\vec{k}$$

Origó: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$

$$\vec{E}(0,0,0) = -b(0,0,4) = -4b\vec{k}$$

(2,1,0) pont: $x = 2$, $y = 1$, $z = 0$

$$\vec{E}(2,1,0) = -b(12,0,4) = -12b\vec{\imath} - 4b\vec{k}$$

Az elektrosztatikus tér I. alaptörvénye

Mivel az elektrosztatikus tér konzervatív, az általa bármely zárt görbe mentén végzett munka nulla:

$$W_0 = \oint_G \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_G q\vec{E} \cdot d\vec{r} = 0 \quad q\text{-val végigosztva:} \quad \oint_G \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$$

Felhasználva Stokes tételét a zárt hurok által határolt felületre:

$$\oint_G \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_F \mathrm{rot}\,\vec{E} \cdot d\vec{A} = 0$$

Majd a zárt görbe méretével nullához tartva kapjuk a törvény lokális alakját:

$$rot\vec{E} = \nabla \times \vec{E} = 0$$

(az elektrosztatikus tér örvénymentes)

Az elektrosztatikai tér I. alaptörvényét egy áramköri hurokra alkalmazva kapjuk a ***Kirchhoff-féle huroktörvényt.*** Bármely zárt görbén végighaladva a potenciálváltozások (feszültségek) előjeles összege nulla.

$$\sum_i U_i = 0$$

Ponttöltés elektromos tere és potenciálja

A térerősség definíciójából és a Coulomb törvényből:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_q}{q} = k\,\frac{Qq}{qr^2}\frac{\vec{r}}{r} = k\,\frac{Q}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} = k\,\frac{Q}{r^2}\,\vec{e}_r$$

A Q ponttöltés potenciálja attól R távolságra:

$$U(R) = \int_R^\infty \vec{E}(r)\cdot d\vec{r} = \int_R^\infty \frac{kQ}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}\cdot d\vec{r} = kQ\int_R^\infty \frac{1}{r^2}\,\vec{e}_r\cdot d\vec{r}$$

$$= kQ\int_R^\infty \frac{1}{r^2}\,dr = kQ\left[-\frac{1}{r}\right]_R^\infty = \frac{kQ}{R}$$

Töltött részecske mozgása homogén elektrosztatikus térben

A *q* töltésű és *m* tömegű részecskére felhasználva Newton 2. axiómáját:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{q\vec{E}}{m}$$

Homogén elektrosztatikus tér esetén ez a gyorsulás is homogén és időben állandó. Vegyük fel az *x* tengelyt a gyorsulás irányába. Ekkor:

$$\vec{a} = (a, 0{,}0) = \left(\frac{qE}{m}, 0{,}0\right)$$

$$\vec{v} = (v_{x0} + at, v_{y0}, v_{z0}) = \left(v_{x0} + \frac{qE}{m}t, v_{y0}, v_{z0}\right)$$

$$\vec{r} = \left(x_0 + v_{x0}t + \frac{a}{2}t^2, y_0 + v_{y0}t, z_0 + v_{z0}t\right)$$
$$= \left(x_0 + v_{x0}t + \frac{qE}{2m}t^2, y_0 + v_{y0}t, z_0 + v_{z0}t\right)$$